ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 3, 1987 Механика

УДК 539.376

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ЦВЕЛОДУБ И. Ю.

1. Рассмотрим односвязное тело объема v с поверхностью S, для которого полные деформации ε_{kl} складываются из упругих, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести ε^c_{kl}

$$\varepsilon_{kl}=a_{klmn}\sigma_{mn}+\varepsilon^c_{kl} \quad (k, l=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где σ_{kl}—компоненты тензора напряжений, $a_{klmn}=a_{mnkl}$—компоненты тензора упругих податливостей, суммирование по повторяющимся индексам производится от 1 до 3. Компоненты полной деформации предполагаются малыми и выражающимися через компоненты вектора перемещений известными соотношениями Коши.

Материал тела считаем неупрочняющимся в процессе ползучести, так что скорости деформаций $\dot{\varepsilon}^c_{kl}=\eta_{kl}$ (точка здесь и в дальнейшем обозначает дифференцирование по времени) являются функциями только напряжений

$$\eta_{kl}=\eta_{kl}(\sigma_{mn}) \quad (k, l, m, n=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Функции (1.2) предполагаются дифференцируемыми и для бесконечно малых приращений $\delta\sigma_{kl}$ и соответствующих им приращений $\delta\eta_{kl}$, удовлетворяющими неравенству

$$\delta\sigma_{kl}\,\delta\eta_{kl}\geqslant 0 \tag{1.3}$$

выражающему известный постулат устойчивости Друккера для вязких деформаций.

Сформулируем задачу о деформировании исходного тела в заданное: какие перемещения нужно мгновенно сообщить поверхности тела (считаем, что массовые силы отсутствуют) в момент времени $t=0$, чтобы, оставляя их фиксированными в течение времени t_*, в момент $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок и соответствующей упругой разгрузки получить заданные значения остаточных перемещений $u_k=u_{k\,\text{ост}}$ на S? При этом предполагаем, что при $t<0$ тело находилось в естественном недеформированном состоянии.

Можно доказать, что если решение такой релаксационной задачи для тела, определяющие уравнения деформирования которого имеют вид (1.1), (1.2) с дополнительным ограничением (1.3), существует, то для сжимаемого при ползучести тела ($\eta_{kk}\neq 0$) оно будет единственным по напряжениям при $0\leqslant t<t_*$; соответствующие перемещения могут

отличаться только на величину смещения тела как жесткого целого. Для несжимаемого при ползучести тела ($\eta_{kk}=0$) два решения для поля напряжений при $0 \leqslant t < t_*$ могут отличаться только на величину произвольного постоянного во всем объеме и во времени гидростатического давления, причем этого произвола не будет, если на части поверхности известны внешние нагрузки или одна из диагональных компонент тензора напряжений (как, например, в случае плоского напряженного состояния).

Доказательство этого утверждения вполне аналогично представленным в [1, 2] для подобных задач, поэтому здесь не приводится.

2. Рассмотрим частный случай указанной релаксационной задачи, когда тело представляет собой изотропную тонкую пластинку и можно говорить о плоском напряженном состоянии. Как отмечалось выше, решение такой задачи будет единственным. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпала с срединной плоскостью пластинки. В качестве (1.2) возьмем общепринятые однородные степени n функции [3]. Тогда для скоростей полных деформаций будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{1}{E}(\dot{\sigma}_x-\nu\dot{\sigma}_y)+B\sigma_i^{n-1}\frac{2\sigma_x-\sigma_y}{2};\quad \dot{\varepsilon}_y=\frac{1}{E}(\dot{\sigma}_y-\nu\dot{\sigma}_x)+B\sigma_i^{n-1}\frac{2\sigma_y-\sigma_x}{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy}=\frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{xy}+B\sigma_i^{n-1}\frac{3}{2}\sigma_{xy} \tag{2.1}$$

где E—модуль Юнга, ν—коэффициент Пуассона, B, n—константы ползучести, $\sigma_i=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\sigma_{xy}^2}$—интенсивность напряжений. В дальнейшем считаем, что $n>1$, что обеспечивает выполнимость (1.3) [1, 2].

Предположим, что после деформирования в течение времени t_* и последующего снятия внешних нагрузок перемещения u_x, u_y точек границы L должны иметь вид:

$$u_x=c[x+\delta u_{x1}(x,y)+\delta^2 u_{x2}(x,y)+\ldots],\quad u_y=c[y+\delta u_{y1}(x,y)+\delta^2 u_{y2}(x,y)+\ldots] \tag{2.2}$$

где c, δ—константы, $0<\delta<1$, то есть могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра δ. Для определенности положим $c>0$.

Для решения этой задачи может быть применен метод возмущений [4]. Так при $\delta=0$ условия (2.2) соответствуют однородному деформированному состоянию, вызванному равномерным растяжением по осям x и y. Решение для этого нулевого приближения может быть получено в замкнутом виде.

Действительно, при $0 \leqslant t < t_*$ положим: $u_x=c_0x$; $u_y=c_0y$ на L, где $c_0>0$—неизвестная константа. Тогда, очевидно, в пластине будем иметь однородное напряженно-деформированное состояние: $\varepsilon_x=\varepsilon_y=c_0$,

$\varepsilon_{xy}=0$, $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_0(t)$, $\sigma_{xy}=0$ при $0\leqslant t<t_*$, причем при $t=0$ $\sigma_0(0)=\frac{E}{1-\nu}c_0$. Функцию $\sigma_0=\sigma_0(t)$ определяем из условия: $\dot\varepsilon_x=\dot\varepsilon_y=0$, то есть, как следует из (2.1), $\frac{1-\nu}{E}\dot\sigma_0+\frac{B}{2}\sigma_0^n=0$, откуда с учетом начального условия получим

$$\sigma_0(t)=\frac{E}{1-\nu}\left[c_0^{1-n}+\frac{B(n-1)}{2}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^n t\right]^{\frac{1}{1-n}} \tag{2.3}$$

При $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок для остаточных деформаций будем иметь $\varepsilon_{x\,\text{ост.}}=\varepsilon_{y\,\text{ост.}}=c_0-\frac{1-\nu}{E}\sigma_0(t_*)$. Эта величина в силу граничных условий (2.2) для нулевого приближения должна равняться c, следовательно, из (2.3) найдем

$$c_0-\left[c_0^{1-n}+\frac{B(n-1)}{2}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^n t_*\right]^{\frac{1}{1-n}}=c \tag{2.4}$$

Легко видеть, что уравнение (2.4) относительно c_0 имеет только один корень, причем $c<c_0<c+\left[\frac{B(n-1)}{2}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^n t_*\right]^{\frac{1}{1-n}}$.

Для нахождения последующих приближений все напряжения, перемещения и деформации при $0\leqslant t<t_*$ представляем в виде рядов по степеням δ. Используя обычную методику [4], из (2.1) для скоростей полных деформаций k-ого приближения получим

$$\begin{aligned}
\dot\varepsilon_{xk}&=\frac{\partial \dot u_{xk}}{\partial x}=\frac{1}{E}(\dot\sigma_{xk}-\nu\dot\sigma_{yk})+\frac{B\sigma_0^{n-1}}{4}(n+3)(\sigma_{xk}-\nu_1\sigma_{yk})+\eta_{x0k}\\
\dot\varepsilon_{yk}&=\frac{\partial \dot u_{yk}}{\partial y}=\frac{1}{E}(\dot\sigma_{yk}-\nu\dot\sigma_{xk})+\frac{B\sigma_0^{n-1}}{4}(n+3)(\sigma_{yk}-\nu_1\sigma_{xk})+\eta_{y0k}\\
\dot\varepsilon_{xyk}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot u_{xk}}{\partial y}+\frac{\partial \dot u_{yk}}{\partial x}\right)=\frac{1+\nu}{E}\dot\sigma_{xyk}+\frac{B\sigma_0^{n-1}}{4}(n+3)(1+\nu_1)\sigma_{xyk}+\eta_{xy0k}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\nu_1=\frac{3-n}{3+n}\left(-1<\nu_1<\frac{1}{2}\right)$, η_{x0k}, η_{y0k}, η_{xy0k}—функции координат и времени, зависящие от компонент напряжений не выше $k-1$ приближения. Так для первого приближения $\eta_{x01}=\eta_{y01}=\eta_{xy01}=0$, для второго

$$\eta_{x02}=\frac{B\sigma_0^{n-2}}{16}(n-1)[(n+9)\sigma_{x1}^2+(n-3)\sigma_{y1}(\sigma_{y1}+2\sigma_{x1})+12\sigma_{xy1}^2]$$

$$\eta_{y02}=\frac{B\sigma_0^{n-2}}{16}(n-1)[(n+9)\sigma_{y1}^2+(n-3)\sigma_{x1}(\sigma_{x1}+2\sigma_{y1})+12\sigma_{xy1}^2]$$

$$\eta_{xy02}=\frac{3B\sigma_0^{n-2}}{4}(n-1)\sigma_{xy1}(\sigma_{x1}+\sigma_{y1})$$

В дальнейшем индексы „k" в (2.5) всюду опустим, считая функции η_{x0}, η_{y0}, η_{xy0} известными для каждого рассматриваемого приближения.

Получим общие выражения для напряжений и перемещений при $0 \leqslant t < t_*$. Для этого введем функцию напряжений $\Phi=\Phi(x, y, t)$, так что [5]:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5), (2.6) в известное уравнение совместности скоростей деформаций и учитывая (2.3), получим

$$\Delta\Delta\dot{\Phi}+(a+bt)^{-1}\Delta\Delta\Phi=\dot{F}_0(x, y, t) \tag{2.7}$$

где $\Delta\Delta$—бигармонический оператор, $a=\dfrac{4c_0^{1-n}(1-\nu)^{n-1}}{BE^n(n+3)}$, $b=\dfrac{2(n-1)}{(1-\nu)(n+3)}$, $\dot{F}_0=E\left(2\dfrac{\partial^2\dot{\eta}_{xy0}}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2\dot{\eta}_{y0}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\dot{\eta}_{x0}}{\partial y^2}\right)$.

Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение (2.7) (относительно $\Delta\Delta\Phi$) по времени и учитывая, что при $t=0$ $\Delta\Delta\Phi=0$ (что соответствует упругому распределению напряжений), найдем

$$\Delta\Delta\Phi=(a+bt)^{-1/b}\int_0^t (a+bt)^{1/b}\dot{F}_0dt \tag{2.8}$$

Предполагая, что функции η_{x0}, η_{y0}, η_{xy0} при любом $0\leqslant t<t_*$ являются аналитическими в занятой пластиной области плоскости и переходя к комплексным переменным $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, (2.8) можно представить в форме

$$16\frac{\partial^4 V}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}=-E(a+bt)^{-1/b}\int_0^t (a+bt)^{1/b}\left(\frac{\partial^2\dot{\varepsilon}}{\partial\bar{z}^2}+\frac{\partial^2\dot{\bar{\varepsilon}}}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\dot{I}}{\partial z\partial\bar{z}}\right)dt \tag{2.9}$$

где $V(z, \bar{z}, t)=\Phi\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \dfrac{z-\bar{z}}{2i}, t\right)$, $\varepsilon=\displaystyle\int_0^t (\dot{\eta}_{y0}-\dot{\eta}_{x0}+2i\dot{\eta}_{xy0})\,dt$, $\bar{\varepsilon}=\displaystyle\int_0^t(\dot{\eta}_{y0}-\dot{\eta}_{x0}-2i\dot{\eta}_{xy0})dt$, $I=\displaystyle\int_0^t(\dot{\eta}_{x0}+\dot{\eta}_{y0})dt$. (При указанной замене все аналитические функции переменных x и y аналитически продолжаются в область комплексных значений при подстановке: $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, при этом z и $\bar{z}$ считаются независимыми комплексными переменными. Законность такой замены и соответствующих операций доказана в [6]).

Общее решение (2.9) запишем в виде

$$V=V_0(z,\ \bar{z},\ t)+V_1(z,\ \bar{z},\ t)+V_2(z,\ \bar{z},\ t) \tag{2.10}$$

где $V_0=-\dfrac{E}{16}(a+bt)^{-1/b}\displaystyle\int_0^t (a+bt)^{1/b}(\dot{F}+\dot{\bar{F}}+2\dot{a})dt$, $F=\displaystyle\int_0^z\left(\int_0^z \varepsilon dz\right)dz$

$\bar{F}=\displaystyle\int_0^{\bar{z}}\left(\int_0^{\bar{z}} \bar{\varepsilon} d\bar{z}\right)d\bar{z}$, $Q=\displaystyle\int_0^z\left(\int_0^{\bar{z}} I d\bar{z}\right)dz$, а функции V_1 и V_2—бигармоничны, то есть $V_i=\dfrac{1}{2}\left[\bar{z}\varphi_i(z,t)+z\overline{\varphi_i(z,t)}+\chi_i(z,t)+\overline{\chi_i(z,t)}\right]$ $(i=1,2)$ [5], причем последние выбираются таким образом, что сумма V_0+V_1 соответствует решению, дающему нулевые нагрузки на L в любой момент t: $0\leqslant t<t_*$, а V_2—решению задачи теории упругости с заданными граничными условиями, зависящими от времени. Введем обозначения: $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, $\psi=\psi_1+\psi_2$, где $\psi_i=\chi_i'(i=1,\ 2)$, штрих обозначает дифференцирование по z.

Компоненты напряжений определяются из соотношений (2.6), которые в переменных z, $\bar{z}$ можно записать как

$$\sigma_x+\sigma_y=4\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\bar{z}},\quad \sigma_y-\sigma_x+2i\sigma_{xy}=4\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{2.11}$$

Определим компоненты перемещений и их скоростей при $0\leqslant t<t_*$, для чего из первого уравнения (2.5) вычтем второе и прибавим третье, умноженное на $2i$. Получившееся равенство с введением комплексного перемещения $w=u_x+iu_y$ и с учетом (2.3), (2.11) можно представить в виде

$$2\frac{\partial\dot{w}}{\partial\bar{z}}=-\frac{4(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\dot{V}}{\partial\bar{z}^2}-\frac{4(1+\nu_1)}{E(a+bt)}\frac{\partial^2 V}{\partial\bar{z}^2}-\dot{\bar{\varepsilon}}$$

откуда

$$\dot{w}=-\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial\dot{V}}{\partial\bar{z}}-\frac{2(1+\nu_1)}{E(a+bt)}\frac{\partial V}{\partial\bar{z}}-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{z}}\dot{\bar{\varepsilon}}d\bar{z}+f_1(z,t) \tag{2.12}$$

Неизвестную функцию $f_1=f_1(z,t)$, входящую в (2.12), определим из условия удовлетворения сумме первых двух уравнений (2.5), которую можно записать в форме

$$\frac{\partial\dot{w}}{\partial z}+\frac{\partial\dot{\bar{w}}}{\partial\bar{z}}=\frac{4(1-\nu)}{E}\frac{\partial^2\dot{V}}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{4(1-\nu_1)}{E(a+bt)}\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\bar{z}}+\dot{I} \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12) и аналогичное представление для $\dot{\bar{w}}$ в (2.13) и учитывая выражение (2.10) для V, получим $f_1'-\dfrac{4}{E}\left(\dot{\varphi}'+\dfrac{\varphi'}{a+bt}\right)=$

$= -\left[\overline{f}_1 - \frac{4}{E}\left(\dot{\overline{\varphi}}' + \frac{\overline{\varphi}'}{a+bt}\right)\right]$, что возможно только при $f_1 - \frac{4}{E}\left(\dot{\varphi}' + \frac{\varphi'}{a+bt}\right) = ic_1(t)$, $c_1(t)$—действительная функция, откуда $f_1(z, t) = \frac{4}{E}\left(\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{a+bt}\right) + ic_1(t)z + c_2(t)$, $c_2(t)$ —комплексная функция. Отбрасывая в выражении для f_1 члены $ic_1z + c_2$, дающие только жесткое смещение, и учитывая (2.10), (2.12), после некоторых упрощений найдем

$$\dot{w} = -\frac{2(\nu_1-\nu)}{E}(a+bt)^{-1}\frac{\partial V_0}{\partial \overline{z}} + \frac{1+\nu}{8}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\dot{F} - \varkappa\dot{\overline{F}} + 2\dot{a}) +$$

$$+ \frac{1+\nu}{E}(\varkappa\dot{\varphi} - z\dot{\overline{\varphi}}' - \dot{\overline{\psi}}) + \frac{1+\nu_1}{E(a+bt)}(\varkappa_1\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\psi}), \quad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \varkappa_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1} \tag{2.14}$$

Интегрируя (2.14) по времени от 0 до t и проводя некоторые выкладки, получим

$$w = \frac{\nu_1-\nu}{8}(a+bt)^{-1/b}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\int_0^t (a+bt)^{1/b-1}(F+\overline{F}+2a)dt + \frac{1+\nu}{8}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\times$$

$$\times(F - \varkappa\overline{F} + 2Q) + \frac{1+\nu}{E}(\varkappa\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\psi}) + \frac{1+\nu_1}{E}\int_0^t \frac{\varkappa_1\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\psi}}{a+bt}dt \tag{2.15}$$

В (2.15) учтено, что при $t=0$ $F=\overline{F}=Q=0$.

После разгрузки при $t=t_*$ будем иметь выражения для остаточных напряжений и перемещений, получающиеся из (2.10), (2.11), (2.15) путем вычитания членов, соответствующих значениям функций $\varphi_2 = \varphi_2(z,t)$ и $\psi_2 = \psi_2(z,t)$ в этот момент времени. Так для остаточных перемещений найдем

$$w_{\text{ост.}} = g_1(z, \overline{z}) + \frac{1+\nu_1}{E}\int_0^{t_*}\frac{\varkappa_1\varphi_2 - z\overline{\varphi}_2' - \overline{\psi}_2}{a+bt}dt \tag{2.16}$$

$$g_1(z, \overline{z}) = \frac{\nu_1-\nu}{8}(a+bt_*)^{-1/b}\int_0^{t_*}(a+bt)^{1/b-1}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(F+\overline{F}+2Q)dt + \frac{1+\nu}{8}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\times$$

$$\times(F - \varkappa\overline{F} + 2Q)|_{t=t_*} + \frac{1+\nu}{E}(\varkappa\varphi_1 - z\overline{\varphi}_1' - \overline{\psi}_1)|_{t=t_*} + \frac{1+\nu_1}{E}\int_0^{t_*}\frac{\varkappa_1\varphi_1 - z\overline{\varphi}_1' - \overline{\psi}_1}{a+bt}dt$$

Из общих соотношений (2.10), (2.14), (2.16) очевидна последовательность решения исходной релаксационной задачи для любого приближения. По известным значениям $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(z, \overline{z}, t)$, $\dot{\overline{\varepsilon}} = \dot{\overline{\varepsilon}}(z, \overline{z}, t)$, $\dot{l} = \dot{l}(z, \overline{z}, t)$ находятся $\dot{F}, \dot{\overline{F}}, \dot{Q}, F, \overline{F}, Q$, являющиеся функциями тех же переменных z, $\bar{z}$ и t, а следовательно, из (2.10) и $V_0=V_0(z, \bar{z}, t)$. Затем на L вычисляется значение $f=\frac{\partial V_0}{\partial x}+i\frac{\partial V_0}{\partial y}=2\frac{\partial V_0}{\partial \bar{z}}$, которое компенсируется выбором функций $\varphi_1=\varphi_1(z, t)$ и $\psi_1=\psi_1(z, t)$. Эта задача рассмотрена в [5]. После того, как найдены φ_1 и ψ_1, для функций

$$\varphi_3(z)=\int_0^{t_*}\frac{\varphi_2(z, t)}{a+bt}dt, \quad \psi_3(z)=\int_0^{t_*}\frac{\psi_2(z, t)}{a+bt}dt \tag{2.17}$$

из (2.16) получим на $L:\frac{1+\nu_1}{E}(\varkappa_1\varphi_3-z\overline{\varphi_3'}-\overline{\psi_3})=w_{\text{ост.}}-g_1$, где правая часть этого равенства известна. Подобная задача нахождения φ_3 и ψ_3 также рассмотрена в [5].

Кроме того, поскольку при $0\leqslant t<t_*$ $\dot{w}=0$ на L, из (2.14) найдем:

$$\varkappa\dot{\varphi}_2-z\overline{\dot{\varphi}_2'}-\overline{\dot{\psi}_2}+\frac{A}{a+bt}(\varkappa_1\varphi_2-z\overline{\varphi_2'}-\overline{\psi_2})=g_2(z, \bar{z}, t)|_L$$

$$g_2(z, \bar{z}, t)=\frac{2(\nu_1-\nu)}{1+\nu}(a+bt)^{-1}\frac{\partial V_0}{\partial \bar{z}}-\frac{E}{8}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\dot{F}-\varkappa\dot{\bar{F}}+2\dot{Q})-$$

$$-(\varkappa\dot{\varphi}_1-z\overline{\dot{\varphi}_1'}-\overline{\dot{\psi}_1})-\frac{A}{a+bt}(\varkappa_1\varphi_1-z\overline{\varphi_1'}-\overline{\psi_1}), \quad A=\frac{1+\nu_1}{1+\nu} \tag{2.18}$$

Граничное условие (2.18) с дополнительными соотношениями (2.17) служит для нахождения функций $\varphi_2=\varphi_2(z, t)$ и $\psi_2=\psi_2(z, t)$.

Не останавливаясь на простых, но громоздких выкладках, основанных на использовании полученных выше зависимостей и общих приемов [5], в качестве примера приведем решение задачи о круглой пластинке единичного радиуса, которая в момент $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок должна иметь остаточные радиальное и окружное перемещения на границе $L: u_r=c+\delta\alpha\cos 3\theta$, $u_\theta=\delta\beta\sin 3\theta$.

Решение для нулевого приближения дается формулами (2.3), (2.4), то есть при $0\leqslant t<t_*$ следует задать на L перемещения: $u_r=c_0$, $u_\theta=0$, при этом радиальное напряжение $\sigma_r=\sigma_0(t)$.

Для первого приближения будем иметь:

$$V_0=\varphi_1=\psi_1=0, \quad \varphi_2(z, t)=\frac{E}{1+\nu}\frac{D_1}{\varkappa}(a+bt)^{-\frac{A}{b}\frac{\varkappa_1}{\varkappa}}z^4, \quad \psi_2(z, t)=$$

$$=-\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{4D_1}{\varkappa}(a+bt)^{-\frac{A}{b}\frac{\varkappa_1}{\varkappa}}+D_2(a+bt)^{-\frac{A}{b}}\right]z^2$$

$$D_1=\frac{\alpha+\beta}{2}\left[a^{-\frac{A}{b}\frac{\varkappa_1}{\varkappa}}-(a+bt_*)^{-\frac{A}{b}\frac{\varkappa_1}{\varkappa}}\right]^{-1}, \quad D_2=\frac{\alpha-\beta}{2}\left[a^{-\frac{A}{b}}-(a+bt_*)^{-\frac{A}{b}}\right]^{-1}$$

Отсюда следует, что на границе до момента разгрузки при $t=t_*$ надо фиксировать перемещения $u_r+iu_\theta=a^{-\frac{A}{b}\frac{\varkappa_1}{\varkappa}}D_1\sigma^3+a^{-\frac{A}{b}}D_2\bar{\sigma}$, при этом внешние нагрузки на L при $0 \leqslant t < t_*$ определяются следующим образом: $\sigma_r - i\sigma_{r\theta} = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\dfrac{4D_1}{\varkappa}(a+bt)^{-\frac{A}{b}\frac{\varkappa_1}{\varkappa}}\sigma^{-3} + 2D_2(a+bt)^{-\frac{A}{b}}\sigma^{3}\right]$, $\sigma = e^{i\theta}$.

Получение второго и последующих приближений не вызывает никаких принципиальных затруднений, однако соответствующие выражения очень громоздки, поэтому здесь не приводятся.

ON AN INVERSE PROBLEM IN THE CREEP THEORY

I. Yu. TSVELODUB

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ի. ՅՈՒ. ՑՎԵԼՈԴՈՒԲ

Ամփոփում

Ապացուցված է սողքի տեսության հակադարձ ռելակսացիայի խնդրի լուծման միակության թեորեմը: Դրգռումների մեթոդով բարակ սալի համար ստացված է այդ խնդրի ընդհանուր լուծումը, երբ սալի վերջնական վիճակը քիչ է տարբերվում համասեռ դեֆորմացվածքից:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвелодуб И. Ю.* Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела. — Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984, вып. 66, с. 126—137.
2. *Цвелодуб И. Ю.* Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 5, с. 126—134.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.—Л.: ОГИЗ 1948. 296 с.

Институт гидродинамики
им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР

Поступила в редакцию
17.IX.1984