

УДК 539.3:534.1

СООТНОШЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ И МЕТОДЫ  
 ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ПОВЕРХНОСТНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ  
 В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ И ПЛАСТИНАХ

КУДРЯВЦЕВ Б. А., ПАРТОН В. З., СЕНИК Н. А.

Предлагается вариант теории тонких оболочек из пьезоэлектрических материалов, имеющих плоскость симметрии упругих свойств, параллельную срединной поверхности. В отличие от работы [1] задача приведения трехмерных уравнений электроупругости к двумерным уравнениям теории оболочек решается с привлечением гипотез классической теории оболочек [2] и использованием метода символического интегрирования А. И. Лурье, что является обобщением результатов работы [3].

1. Рассмотрим пьезокристаллическую оболочку толщины  $h$  и свяжем триортогональную систему координат  $(\alpha_1, \alpha_2, z)$  с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки и нормалью к ней. Предполагается, что ось  $z$  ортогональна плоскости симметрии упругих свойств, а поверхности  $z = \pm h/2$  могут быть как электродированными, так и безэлектродными, причем жесткость электродов пренебрежимо мала и не учитывается. Уравнения состояния в выбранной системе координат запишем в виде

$$\vec{\sigma} = \vec{C}\vec{\varepsilon} - e\vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon^S\vec{E} + e^T\vec{\varepsilon} \quad (1.1)$$

где  $\vec{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{21}, \sigma_{12}, \sigma_{13}\}^T$ ,  $\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}\}^T$ ,  $\vec{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$ ,  $\vec{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ , причем  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций,  $D_i$ ,  $E_i$  — компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля, а индекс „т“ сверху обозначает транспонированную величину. Симметричная матрица жесткостей  $\vec{C}$  имеет компоненты  $c_{ij}^E$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ), матрица пьезокоэффициентов  $\vec{e}$  размерности  $(6 \times 3)$  имеет компоненты  $e_{mn}$  ( $m = 1, \dots, 6$ ;  $n = 1, 2, 3$ ), матрица диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^S$  размерности  $(3 \times 3)$  имеет компоненты  $\varepsilon_{pp}^S = \varepsilon_{pp}^S$  ( $p = 1, 2, 3$ ), причем указанные выше матрицы имеют нулевые компоненты  $c_{14}^E, c_{15}^E, c_{16}^E$  ( $j = 1, 2, 3$ ;  $k = 4, 5$ ),  $e_{13}, e_{21}, e_{31}, e_{32}, \varepsilon_{13}^S, \varepsilon_{23}^S$ .

При построении основных соотношений теории пьезокристаллических оболочек используются следующие гипотезы:

$$\sigma_{j3} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1.2)$$

$$U_3^{(j)}(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad (1.4)$$

где  $\bar{U}^{(j)} = \{U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, U_3^{(j)}\}$  — компоненты вектора смещений,  $w = w(x_1, x_2)$  — прогиб.

Использование предположений (1.2) совместно с первой группой уравнений (1.1) позволяет определить деформации сдвига  $\varepsilon_{j3}$  в виде

$$\varepsilon_{j3} = d_{j4}E_1 + d_{j5}E_2 \quad (j = 1, 2) \quad (1.5)$$

где

$$d_{14} = (e_{14}c_{45}^E - e_{15}c_{44}^E)/\Delta, \quad d_{15} = (e_{24}c_{45}^E - e_{25}c_{44}^E)/\Delta, \quad d_{24} = -(e_{14}c_{53}^E - e_{15}c_{45}^E)/\Delta$$

$$d_{25} = -(e_{24}c_{55}^E - e_{25}c_{45}^E)/\Delta, \quad \Delta = (c_{45}^E)^2 - c_{55}^E c_{44}^E$$

Дальнейшее использование соотношений (1.5) совместно с выражениями Коши и предположением (1.3) позволяет установить закон распределения смещений  $U_j^{(j)}(x_1, x_2, z)$  ( $j = 1, 2$ ) по толщине оболочки

$$U_j^{(j)} = u_j + z v_j + \int_0^z (d_{j4}E_1 + d_{j5}E_2) d\xi \quad (1.6)$$

Здесь  $u_j = u_j(x_1, x_2)$ ,  $v_j = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} + k_j w$ , причем  $u_j$  — тангенциальные смещения точек срединной поверхности оболочки,  $A_j$  — коэффициенты ее первой квадратичной формы,  $k_j$  — главные кривизны.

Полагая, что  $k_j z \ll 1$  (здесь и далее  $j = 1, 2$ ), определим распределения деформаций  $\varepsilon_{jj}$ ,  $\varepsilon_{j2}$  по толщине оболочки

$$\varepsilon_{jj} = \varepsilon_j + z \alpha_j + \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^z (d_{j4}E_1 + d_{j5}E_2) d\xi -$$

$$- \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_j}{\partial x_{3-j}} \int_0^z (d_{3-j,4}E_1 + d_{3-j,5}E_2) d\xi \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{12} = \omega + z \tau + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1} \int_0^z (d_{14}E_1 + d_{15}E_2) d\xi +$$

$$+ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_2} \int_0^z (d_{24}E_1 + d_{25}E_2) d\xi$$

где  $\varepsilon_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  определяются известными соотношениями [2]. Использование предположения (1.4) позволяет исключить в дальнейшем поперечную деформацию  $\varepsilon_{33}$  и представить выражения для напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и компоненты вектора электрической индукции в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}^* \varepsilon_{11} + c_{12}^* \varepsilon_{22} + c_{10}^* \varepsilon_{12} - e_{11} E_1 - e_{21} E_2 - e_{31} E_3 \\ \sigma_{22} &= c_{21}^* \varepsilon_{11} + c_{22}^* \varepsilon_{22} + c_{20}^* \varepsilon_{12} - e_{12} E_1 - e_{22} E_2 - e_{32} E_3 \\ \sigma_{12} &= c_{61}^* \varepsilon_{11} + c_{62}^* \varepsilon_{22} + c_{60}^* \varepsilon_{12} - e_{16} E_1 - e_{26} E_2 - e_{36} E_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= e_{11} \varepsilon_{11} + e_{12} \varepsilon_{22} + e_{10} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{11}^* E_1 + \varepsilon_{12}^* E_2, \quad D_2 = e_{21} \varepsilon_{11} + e_{22} \varepsilon_{22} + e_{20} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}^* E_1 + \varepsilon_{22}^* E_2 \\ D_3 &= e_{31}^* \varepsilon_{11} + e_{32}^* \varepsilon_{22} + e_{30}^* \varepsilon_{12} + \varepsilon_{33}^* E_3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \text{где } c_{ij}^* &= c_{ij}^E \left( 1 - \frac{c_{j3}^E c_{13}^E}{c_{ij}^E c_{33}^E} \right), \quad c_{j0}^* = c_{j0}^E \left( 1 - \frac{c_{j3}^E c_{36}^E}{c_{j0}^E c_{33}^E} \right) \\ c_{kk}^* &= c_{kk}^E \left( 1 - \frac{c_{k3}^E c_{k3}^E}{c_{kk}^E c_{33}^E} \right), \quad e_{3j}^* = e_{3j} \left( 1 - \frac{c_{j3}^E e_{33}}{c_{33}^E e_{3j}} \right), \quad e_{36}^* = e_{36} \left( 1 - \frac{c_{63}^E e_{33}}{c_{33}^E e_{36}} \right) \\ \varepsilon_{jj}^* &= \varepsilon_{jj}^S [1 - (e_{j4}^2 c_{55}^E - 2e_{j1} e_{j5} c_{45}^E + e_{j5}^2 c_{44}^E) (\varepsilon_{jj}^S \Delta)] \\ \varepsilon_{12}^* &= \varepsilon_{21}^* = \varepsilon_{12}^S [1 - (e_{14} e_{24} c_{55}^E + e_{14} e_{24} c_{44}^E - e_{14} e_{25} c_{45}^E - e_{14} e_{24} c_{45}^E) / (\varepsilon_{12}^S \Delta)] \\ \varepsilon_{33}^* &= \varepsilon_{33}^S [1 + e_{33}^2 / (c_{33}^E \varepsilon_{33}^S)], \quad k = 2, 6; \quad c_{mn}^* = c_{nm}^* \end{aligned}$$

2. С помощью формул (1.7), (1.9) уравнение электростатики  $\text{div } \vec{D} = 0$  относительно потенциала электрического поля  $\varphi$  может быть представлено в виде

$$L_{\varphi}^2 \varphi + \varepsilon_{33}^* \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = f_1 + z f_2 \quad (2.1)$$

Здесь  $2k = k_1 + k_2$  — средняя кривизна

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (e_{11} \varepsilon_1 + e_{12} \varepsilon_2 + e_{10} \varepsilon)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (e_{21} \varepsilon_1 + e_{22} \varepsilon_2 + e_{20} \varepsilon)] \right\} + \\ &\quad + (e_{31}^* x_1 + e_{32}^* x_2 + e_{30}^* z) + 2k (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{30}^* \varepsilon) \\ f_2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (e_{11} x_1 + e_{12} x_2 + e_{10} z)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (e_{21} x_1 + e_{22} x_2 + e_{20} z)] \right\} \\ L_{\varphi}^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \varepsilon_{11}^* \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\varepsilon_{12}^* \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + \varepsilon_{22}^* \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right] + \\ &\quad + e_{31}^* \left[ \frac{d_{14}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d_{15}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{d_{24}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_{25}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right] + e_{32}^* \left[ \frac{d_{24}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d_{25}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_{14}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d_{15}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right] + e_{36}^* \left[ d_{14} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \\ &\quad \left. + d_{25} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + d_{15} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + d_{24} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \end{aligned}$$

При выводе (2.1) предполагалось, что  $\partial A_j / \partial x_i \sim A_j$ ,  $\partial \varphi / \partial x_i \sim l^{-1} \varphi$ , где  $l \gg h$  ( $l$  — характерный масштаб изменения  $\varphi$ ) и величины порядка  $k_j z$

считались малыми по сравнению с единицей. Для интегрирования уравнения (2.1) применим метод А. И. Лурье аналогично тому, как это сделано в [3]. Тогда для оболочек, поверхности  $z = \pm h/2$  которых электродированы и на них задано значение потенциала электрического поля, равное  $\pm V_0$ , получаем следующие приближенные уравнения для величин  $\Phi_1, \Phi_2$ , введенных в [3]:

$$\left(1 - \frac{p^2 h^2}{12}\right) \Phi_1 = -\frac{h^3 f_1}{12 \epsilon_{33}^*}, \quad \left(1 - \frac{p^2 h^2}{60}\right) \Phi_2 = \frac{V_0 h^2}{6} - \frac{h^5 f_2}{720 \epsilon_{33}^*}, \quad p^2 = \frac{L_z^2}{\epsilon_{33}^*} - k^2 \quad (2.2)$$

При этом распределение потенциала электрического поля по толщине оболочки будет

$$\varphi = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} \left( \Phi_1 + \frac{20z}{h^2} \Phi_2 \right) + \frac{z(20z^2 - 3h^2)}{h^3} V_0 \quad (2.3)$$

Наличие малого параметра  $h^2$  при старших производных в (2.2) позволяет определить приближенные решения этих уравнений

$$\Phi_1 = -h^3 f_1 / (12 \epsilon_{33}^*), \quad \Phi_2 = V_0 h^2 / 6 - h^5 f_2 / (720 \epsilon_{33}^*)$$

и получить для потенциала электрического поля выражение

$$\varphi = \frac{2V_0 z}{h} + \frac{4z^3 - h^2}{8 \epsilon_{33}^*} (f_1 + z f_2 / 3) \quad (2.4)$$

которое точно удовлетворяет условиям при  $z = \pm h/2$ . Краевые условия для  $\varphi$  на боковой поверхности оболочки при таком подходе остались не выполненными, однако их влияние сказывается на расстояниях порядка толщины  $h$ . Вдали от краев потенциал поля достаточно точно определяется формулой (2.4).

Используя формулы (1.6), (1.7), (2.4) и отбрасывая малые величины, окончательно находим

$$U_j^{(z)} = u_j + z v_j, \quad \epsilon_{jj} = \epsilon_j + z x_j, \quad \epsilon_{12} = \omega + z \tau \quad (2.5)$$

Для электродированных оболочек усилия и моменты определяются соотношениями

$$\begin{aligned} T_j &= C_{j1} \epsilon_1 + C_{j2} \epsilon_2 + C_{j0} \omega + 2e_{3j}^* V_0, & M_j &= D_{j1} x_1 + D_{j2} x_2 + D_{j0} \tau \\ S &= S_{12} = S_{21} = C_{61} \epsilon_1 + C_{62} \epsilon_2 + C_{60} \omega + 2e_{36}^* V_0 \\ H &= M_{12} = M_{21} = D_{61} x_1 + D_{62} x_2 + D_{60} \tau \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $C_{mn} = h c_{mn}^*$ ,  $D_{mn} = h^3 a_{mn} / 12$

$$a_{1j} = c_{1j}^* \left( 1 + \frac{e_{3j}^* e_{3j}^*}{c_{1j}^* \epsilon_{33}^*} \right), \quad a_{j6} = c_{j6}^* \left( 1 + \frac{e_{3j}^* e_{36}^*}{c_{j6}^* \epsilon_{33}^*} \right), \quad a_{kk} = c_{kk}^* \left( 1 + \frac{e_{3k}^* e_{3k}^*}{c_{kk}^* \epsilon_{33}^*} \right), \quad (k=2;6)$$

Уравнения равновесия (или движения) могут быть получены путем интегрирования трехмерных уравнений равновесия (движения). Для электродированных оболочек эти уравнения будут иметь обычный вид.

3. Для оболочки, поверхности  $z = \pm h/2$  которой неэлектродируются и граничат с вакуумом, для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  получаем следующие уравнения:

$$L_0^2 \Phi_1 = \frac{h}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (e_{11} \varepsilon_1 + e_{12} \varepsilon_2 + e_{16} \omega)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (e_{21} \varepsilon_1 + e_{22} \varepsilon_2 + e_{26} \omega)] \right\} + 2kh(e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{36}^* \omega) \quad (3.1)$$

$$\left(1 - \frac{h^2 L^2}{10} - \frac{h^2 L_1^2}{8 \varepsilon_{33}^*}\right) \Phi_2 = h^2 (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{36}^* \omega) / (12 \varepsilon_{33}^*) - h^3 f_2 / (120 \varepsilon_{33}^*)$$

$$L_0^2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \varepsilon_{11}^* \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + 2 \varepsilon_{12}^* \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \varepsilon_{22}^* \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] - \varepsilon_{33}^* h^2$$

Приближенное решение второго из этих уравнений может быть определено в форме

$$\Phi_2 = h^2 (e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{36}^* \omega) / (12 \varepsilon_{33}^*) - h^3 f_2 / (120 \varepsilon_{33}^*) \quad (3.2)$$

Здесь  $L^2$ ,  $L_1^2$  — некоторые эллиптические операторы.

Распределение потенциала электрического поля по толщине оболочки дается формулой

$$\varphi = \Phi_1 / h + (12z^2 - h^2) (24h \varepsilon_{33}^*) [L_1^2 \Phi_1 + h(e_{31}^* x_1 + e_{32}^* x_2 + e_{36}^* \omega)] + z(4z^2 - 3h^2) f_2 / (24 \varepsilon_{33}^*) + z(e_{31}^* \varepsilon_1 + e_{32}^* \varepsilon_2 + e_{36}^* \omega) \quad (3.3)$$

где

$$L_1^2 = L_0^2 - L_{\frac{z}{h}}^2 + \varepsilon_{33}^* h^2$$

В соответствии с формулами (1.6), (3.3) определим распределение тангенциальных смещений по толщине оболочки

$$U_j^{(z)} = u_j + z v_j - \frac{z}{h} \left( \frac{d_{j3}}{A_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{d_{j5}}{A_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right), \quad (j=1, 2) \quad (3.4)$$

Распределение деформаций определяется с учетом (3.4).

Для усилий и моментов, определяемых обычным образом через напряжения [2], после отбрасывания малых величин имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_j &= C_{j1}^* \varepsilon_1 + C_{j2}^* \varepsilon_2 + C_{j6}^* \omega + \frac{e_{1j}}{A_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{e_{2j}}{A_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ S &= C_{61}^* \varepsilon_1 + C_{62}^* \varepsilon_2 + C_{66}^* \omega + \frac{e_{16}}{A_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{e_{26}}{A_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$M_j = D_{j1} x_1 + D_{j2} x_2 + D_{j6} \omega + M_j^y, \quad (j=1, 2)$$

$$H = D_{61} x_1 + D_{62} x_2 + D_{66} \omega + H^y$$

Здесь

$$M_1^y = -\frac{h^2}{12} \left\{ \varepsilon_{11}^* \left[ \frac{d_{13}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{d_{15}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \left( \frac{d_{23}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d_{25}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \Big] + c_{12}^* \left[ \frac{d_{24}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{d_{25}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \left( \frac{d_{11}}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{d_{15}}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] + c_{16}^* \frac{A_1}{A_2} \left[ d_{11} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + d_{15} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] + \\
& + c_{16}^* \frac{A_2}{A_1} \left[ d_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + d_{25} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \Big] \Phi_1 \quad (3.6) \\
& C_{ij}^* = a_{ij} h
\end{aligned}$$

Для  $M_2^2$  и  $H^3$  имеем формулы, которые следуют из (3.6), если постоянные  $c_{11}^*$ ,  $c_{12}^*$ ,  $c_{16}^*$  заменить на  $c_{21}^*$ ,  $c_{22}^*$ ,  $c_{26}^*$  и  $c_{01}^*$ ,  $c_{02}^*$ ,  $c_{06}^*$  соответственно.

Уравнения движения для оболочки с неэлектропроводными поверхностями  $z = h/2$  выводятся обычным образом из уравнений движения сплошной среды. Поскольку распределение смещений  $U_j^{(z)}$  для неэлектропроводной оболочки отличается дополнительными слагаемыми от распределения  $U_j^{(r)}$  для обычных оболочек, то это различие сохранится и в уравнениях движения.

4. В качестве примера использования полученных выше формул рассмотрена задача возбуждения поперечных колебаний круглого диска радиуса  $R$  с неэлектропроводными торцевыми поверхностями и системой  $2m$  электродов на цилиндрической поверхности. Предполагалось, что по контуру диск жестко заделан. Схема подключения электродов приведена на фиг. 1. Поставленная задача сводится к решению уравнений

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \Phi_1 = 0, \quad (\nabla^2 \nabla^2 - \lambda^4) w = 0 \quad (4.1) \\
& \lambda^4 = \frac{12 \rho \Omega^2}{c_{11}^* (1 + k_{31}^2) h^2}, \quad k_{31}^2 = \frac{(e_{31}^*)^2}{c_{11}^* \varepsilon_{33}^*}
\end{aligned}$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\Omega$  — частота,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа в полярных координатах. Решение уравнений (4.1) должно удовлетворять условиям при  $r = R$

$$\Phi_1 = V_1 h, \quad 0 \leq \theta < \theta', \quad \partial \Phi_1 / \partial r = 0$$

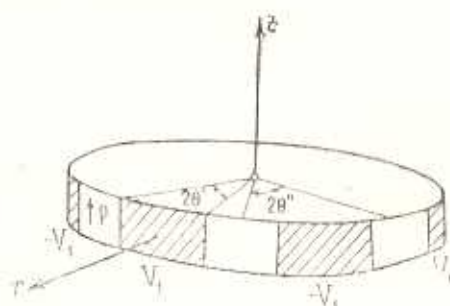
$$\theta' < \theta \leq \theta'', \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{d_{15}}{h} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta'', \quad d_{15} = e_{15} / c_{41}^* \quad (4.2)$$

Для  $w$  получено выражение

$$w_{\pm}(\bar{\rho}, \bar{\theta}, t) = \frac{m V_1 d_{15}}{\lambda_*} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n^* \omega_{2(2k+1)}^{(2n)} \right) \delta_k^{-1} \times \quad (4.3)$$

$$\times [I_{m(2k+1)}(\lambda_* \bar{\rho}) J_{m(2k+1)}(\lambda_* \bar{\rho}) - J_{m(2k+1)}(\lambda_* \bar{\rho}) I_{m(2k+1)}(\lambda_* \bar{\rho})] \exp[i[(k+1/2)\bar{\theta} \pm \Omega t]]$$

где коэффициенты  $a_n^*$  определялись из решения электростатической



Фиг. 1

задачи,  $\omega_{2(2k+1)}^{(2n)}$  — известные величины, зависящие от геометрии диска,  $\bar{b} = \pi b / b^*$ ,  $I_0(\dots)$ ,  $J_1(\dots)$  — функции Бесселя,  $\bar{r} = r/R$ ,  $\lambda_* = \lambda R$ . Резонансные частоты определяются корнями уравнения

$$\bar{\omega}_k = I_{m(2k+1)}(\lambda_*) J_{m(2k+1)-1}(\lambda_*) - J_{m(2k+1)}(\lambda_*) I_{m(2k+1)-1}(\lambda_*) = 0 \quad (4.4)$$

Таблица

$\lambda_*(n)$	1	2	3	4
$k$				
0	4,611	7,799	10,958	14,109
1	7,144	10,573	13,795	17,005

В таблице приведено значение первых четырех корней уравнения (4.4) при  $k=0; 1$  для диска с двумя электродами.

## CONSTITUTIVE RELATIONS OF ELECTROELASTICITY AND METHODS OF WAVE EXCITATION IN PIEZOELECTRIC SHELLS AND PLATES BY MEANS OF SURFACE ELECTRODES

B. A. KUDRAVITZEV, V. Z. PARTON, N. A. SENIK

ՊՐԵՉՈՐՅՈՒՐԵՐԳՎԱՅԻՆ ՍԱՇԵՐՈՒՄ ԵՎ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐՈՒՄ ՄԱԿԵՐԵՎԵՅՑՔԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՒՆԵՐՈՎ ԱԼԵԿՏՐԻ ԳՐԳՈՒՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ԵՎ ԷԼԵԿՏՐՈՒԱԲՉԳՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՐՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Բ. Ա. ԿՈՒՐԱՎԻՏԵՎ, Վ. Չ. ՊԱՐՏՈՆ, Ն. Ա. ՏՆԻԿ

### Ա մ փ ո փ ու ռ մ

Առաջարկված են բարակ պիեզոէլեկտրական թաղանթների մոդելներ: Թաղանթների արտաքին մակերևույթները կարող են ամբողջապես ծածկված լինել էլեկտրոդներով կամ էլեկտրոդավորված չլինել: Որպես օրինակ դիտարկված է զլանային մակերևույթի վրա զրգոզող էլեկտրոդների համակարգ ունեցող հաստույթված րեկոացված կլոր սկավառակի լայնական տատանումների զրգուման խնդիրը:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хома Н. Ю. Об уравнениях обобщенной теории пьезокерамических оболочек. — Прикл. механика, 1981, 17, 2, с. 115—118.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
3. Паргон В. З., Сенник Н. А. О применении метода символического интегрирования в теории пьезокерамических оболочек. — Прикл. матем. и механика, 1983, 47, 2, с. 257—262.

Московский институт  
химического машиностроения

Поступила в редакцию  
30.1.1985