

УДК 534.1.141

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ
 ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСТЯГИВАЮЩЕЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

АРУТЮНЯН Э. П., ГРИГОРЯН Н. Б.

Рассмотрим свободные поперечные колебания трехслойного стержня длиной L , который растягивается сосредоточенной следящей силой P , приложенной на одном конце стержня. Сила приложена так, что исходное напряженное состояние стержня безмоментное. Исследуем колебания двух типов стержней: консольного стержня и свободного стержня, совершающего полет с постоянным ускорением под действием следящей растягивающей силы.

Колебания однородных стержней при действии растягивающих следящих сил рассмотрены в [1—4].

Различные вопросы свободных колебаний трехслойных стержней обсуждены в [5—7] и в др.

В работах [8—10] исследована колебательная форма потери устойчивости трехслойных стержней, нагруженных следящими сжимающими силами.

1. Рассмотрим малые поперечные колебания трехслойного стержня, жестко заземленного на одном конце ($x=0$) и нагруженного на другом конце ($x=L$) растягивающей следящей силой P .

Уравнение малых поперечных колебаний такого трехслойного стержня можно вывести из уравнения (6) работы [8], если в нем x^2 заменить на $-x^2$, то есть если сжимающую следящую силу заменить на растягивающую силу. Тогда получим

$$X^{VI} - \left(\frac{x^2}{\theta} + \frac{1}{\theta k} \right) X^{IV} + \frac{x^2}{\theta k} X'' - \frac{\omega^2}{\theta} X'' + \frac{\omega^2}{\theta k} X = 0 \quad (1.1)$$

Здесь X —безразмерная функция перемещения, которая вводится согласно теории трехслойных стержней Григолюка-Чулкова [5], x^2 и ω_* —соответственно, безразмерная растягивающая сила и безразмерная частота поперечных колебаний, θ и k —безразмерные параметры, характеризующие изгибную жесткость несущих слоев и сдвиговую жесткость заполнителя трехслойного стержня.

Рассмотрим следующие два варианта условий на концах стержня.

I. Один конец стержня жестко заземлен, а на другом конце имеется бесконечно жесткая диафрагма, которая предотвращает поперечный сдвиг. Согласно [6] имеем:

$$\begin{aligned} X' = X''' = X - kX'' = 0 & \quad \text{при } x=0 \\ X'' = X^V = X'' - \theta k X^{IV} = 0 & \quad \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

II. Один конец стержня жестко зашпемлен, а другой конец свободен от поперечного сдвига

$$\begin{aligned} X' &= X''' = X - kX'' = 0 & \text{при } x=0 \\ X'' &= X^{IV} = X''' - \theta kX^V = 0 & \text{при } x=1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, задача сводится к краевой задаче на собственные значения (1.1) с граничными условиями (1.2) или (1.3).

Решение дифференциального уравнения (1.1) можно представить в виде

$$X = \exp(\sqrt{S}x) \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в уравнение (1.1), приходим к кубическому характеристическому уравнению

$$S^3 + \left(-\frac{x^2}{\theta} - \frac{1}{\theta k}\right)S^2 + \left(\frac{x^2}{\theta k} - \frac{\omega^2}{\theta}\right)S + \frac{\omega^2}{\theta k} = 0 \quad (1.5)$$

Это уравнение имеет один действительный отрицательный корень, так как свободный член этого уравнения—положительная величина. Пусть этот корень будет S_1 . Проведенный машинный анализ в широком диапазоне изменения параметров, входящих в уравнение (1.5), показал, что два остальных корня S_2 и S_3 —действительные положительные величины. Общее решение уравнения (1.1) можно записать в следующем виде:

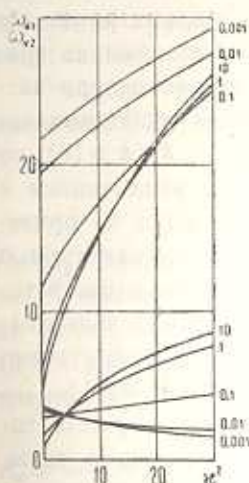
$$X = A_1 \sin \alpha_1 x + A_2 \cos \alpha_1 x + A_3 \operatorname{sh} \alpha_2 x + A_4 \operatorname{ch} \alpha_2 x + A_5 \operatorname{sh} \alpha_3 x + A_6 \operatorname{ch} \alpha_3 x \quad (1.6)$$

где $\alpha_i = |S_i|$; A_i ($i=1, 2, \dots, 6$)—произвольные постоянные. Подставляя выражение (1.6) в граничные условия (1.2) или (1.3), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A_i . Для нахождения нетривиального решения этой системы приравняем нулю ее определитель и получим частотное уравнение

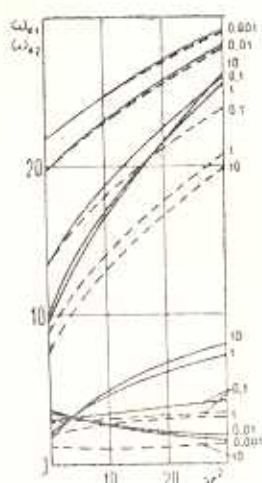
$$\Delta(x^2, \omega_k) = 0 \quad (1.7)$$

Это уравнение трансцендентное и очень громоздкое. Оно не подлежит аналитическому исследованию. На основе алгоритма и вычислительной программы, предложенной в [11], проведены расчеты и определены частоты первого и второго тонов колебаний при различных значениях растягивающей следящей силы и жесткостных параметров трехслойного стержня θ и k для обоих граничных условий. Некоторые результаты этих расчетов представлены на графиках (фиг. 1—3).

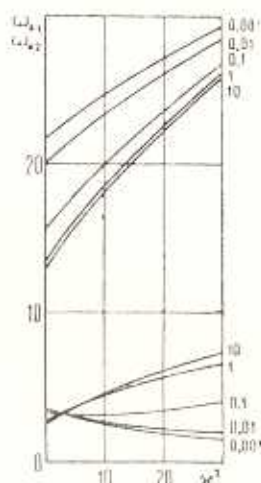
Известно, что когда однородный стержень находится под действием растягивающей следящей силы, то с увеличением растяжения частота первого тона колебаний уменьшается, а частота второго тона колебаний возрастает. Расчеты показывают, что у трехслойных стержней тоже с увеличением величины растягивающей силы частота второго тона колебаний монотонно возрастает при любых значениях параметров θ и k в обоих случаях граничных условий. А частоты первого тона колебаний с увеличением растяжения изменяются по-разному в зави-



Фиг. 1. $\theta=0,01$. Граничные условия I. Цифры у кривых—значения k



Фиг. 2. $\theta=0,1$ — Граничные условия I. — — Граничные условия II. Цифры у кривых—значения k



Фиг. 3. $\theta=0,25$. Граничные условия I. Цифры у кривых—значения k

симости от значений параметров θ и k и граничных условий. Если стержень обладает достаточно большой жесткостью, например, при $\theta=0,1$ и $k \leq 0,01$, то частоты первого тона колебаний с увеличением растяжения уменьшаются. Если же жесткость стержня мала, например, при $\theta=0,1$ и $k \geq 0,1$, с увеличением растяжения частоты первого тона колебаний увеличиваются. Причем при граничных условиях I, то есть при наличии бесконечно жесткой на сдвиг диафрагмы на конце стержня, возрастание частот колебаний происходит гораздо быстрее, чем при граничных условиях II. При граничных условиях II и некоторых комбинациях значений параметров θ и k в достаточно широком диапазоне увеличения растягивающей силы изменение частот первого тона колебаний незначительно. Как видно из приведенных графиков, бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма на конце стержня значительно влияет на величину частот колебаний лишь при малых значениях сдвиговой жесткости заполнителя— $k \geq 0,1$. Бесконечно жесткая диафрагма при любых значениях θ и k повышает частоту обоих тонов колебаний.

2. Если в уравнение (1.1) подставить $x^2=0$, то получим уравнение свободных малых поперечных колебаний ненагруженного трехслойного консольного стержня

$$X^{VI} - \frac{1}{\theta k} X^{IV} - \frac{\omega^2}{\theta} X'' + \frac{\omega^2}{\theta k} X = 0 \quad (2.1)$$

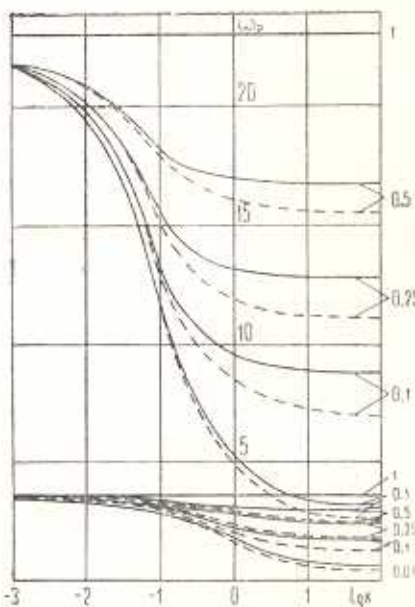
Уравнение (1.7) получит вид

$$\Delta(\omega_*) = 0 \quad (2.2)$$

С помощью этого уравнения можно определить частоты свободных колебаний консольного трехслойного стержня. Исследовано из-

менение первого и второго тонов колебаний в зависимости от сдвиговой жесткости заполнителя k при различных значениях параметра θ для граничных условий I и II. Результаты расчетов представлены на графиках (фиг. 4). С увеличением сдвиговой жесткости заполнителя частоты колебаний увеличиваются и стремятся к частотам свободных колебаний однородного стержня. При достаточно больших k ($k > 10$), то есть при малых сдвиговых жесткостях заполнителя, с увеличением k частоты колебаний практически не изменяются. Как видно из приведенных графиков, при изменении величин жесткостных параметров θ и k более сильное изменение претерпевает величина частот второго тона колебаний. Отметим также, что бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма на незакрепленном конце трехслойного стержня существенно повышает величину частот колебаний лишь при больших k ($k > 1$).

3. Рассмотрим колебания трехслойного свободного стержня, совершающего полет под действием растягивающей следящей силы. Уравнение малых поперечных колебаний такого стержня получим, если в уравнение (1.11) статьи [10] вместо x^2 подставим $-x^2$, то есть сжимающую следящую силу заменим на растягивающую силу. Тогда будем иметь



Фиг. 4. — Граничные условия I
 - - - Граничные условия II.
 Цифры у кривых — значение θ

$$X^{VI} - \left[\frac{x^2(1-x)}{\theta} + \frac{1}{\theta k} \right] X^{IV} + \frac{x^2}{\theta} X''' + \\ + \left[\frac{x^2(1-x)}{\theta k} - \frac{\omega^2}{\theta} \right] X'' - \frac{x^2}{\theta k} X' + \frac{\omega^2}{\theta k} X = 0 \quad (3.1)$$

Рассмотрим следующие три варианта граничных условий.

I. Оба конца трехслойного стержня свободны.

$$X'' = X^{IV} = X''' - \theta k X^V = 0 \quad \text{при} \\ x=0 \quad \text{и} \quad x=1 \quad (3.2)$$

II. Один конец трехслойного стержня свободен, а на другом конце есть бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма

$$X'' = X^{IV} = X''' - \theta k X^V = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \\ X''' = X^V = X'' - \theta k X^{IV} = 0 \quad \text{при} \quad x=1 \quad (3.3)$$

III. На обоих концах трехслойного стержня имеются бесконечно жесткие на сдвиг диафрагмы

$$X''' = X^V = X'' - \theta k X^{IV} = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=1 \quad (3.4)$$

Для определения зависимости частот колебаний трехслойного стержня пришли к краевой задаче на собственные значения (3.1) с граничными условиями (3.2—3.4).

Решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (3.1) представим в виде степенного ряда

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-x)^n \quad (3.5)$$

где A_n — неизвестные постоянные. На основе (3.1) и выражения X (3.5) число неизвестных постоянных, входящих в (3.5), можно сократить до шести. Подставляя выражения X и его производных в уравнение (3.1), получим рекуррентное соотношение для определения коэффициентов A_n .

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)9k} [(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)A_{n-2} + (n-3)(n-4)(n-5)^2 k x^2 A_{n-3} + (n-4)(n-5) \omega^2 k A_{n-4} - (n-5)^2 x^2 A_{n-5} - \omega^2 A_{n-6}] \quad (3.6)$$

С помощью этой формулы все неизвестные постоянные A_n , начиная с A_6 , можно выразить через предыдущие. Тогда в ряде (3.5) останутся только шесть коэффициентов $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$.

Если подставить выражение X (3.5) в граничные условия (3.2—3.4), использовать формулу (3.6), то получим три системы из шести линейных алгебраических однородных уравнений относительно $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. Нетривиальное решение этих систем существует, если их определители равны нулю. Отсюда получим частотное уравнение в виде

$$\Delta(x^2, \omega_s) = 0 \quad (3.7)$$

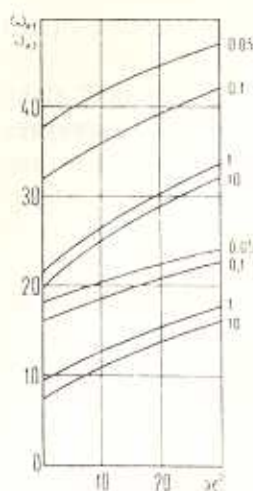
Исходя из уравнения (3.7), с помощью ЭВМ проведены расчеты и построены кривые зависимости частот колебаний трехслойного стержня от величины растягивающей силы. Некоторые результаты этих расчетов представлены на графиках (фиг. 5, 6). С увеличением растяжения частоты обоих тонов колебаний увеличиваются. Бесконечно жесткая на сдвиг диафрагма заметно влияет на частоты колебаний лишь при больших k ($k \gg 1$).

4. Из уравнения (3.1), подставив в него $x^2=0$, придем к уравнению свободных колебаний свободного ненагруженного трехслойного стержня

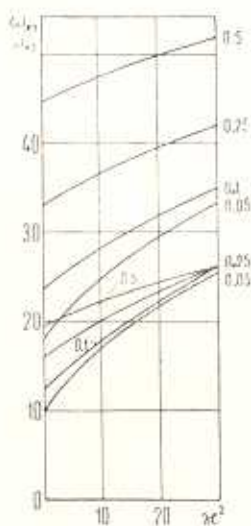
$$X^{VI} - \frac{1}{9k} X^{IV} - \frac{\omega^2}{9} X'' + \frac{\omega^2}{9k} X = 0 \quad (4.1)$$

Для ненагруженного трехслойного стержня рассматриваются те же три граничные условия (3.2—3.4). Решение уравнения (4.1) можно представить в виде (1.6) и далее можно определить частоты свобод-

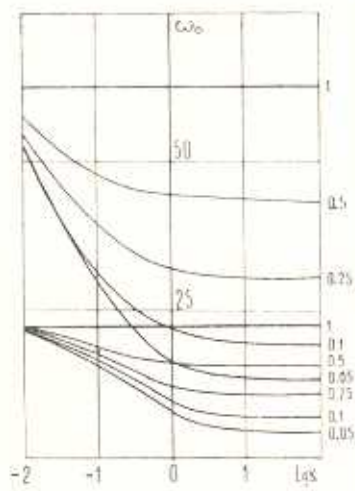
ных колебаний, исходя из этого точного решения. Но более удобным будет, если воспользоваться решением (3.5—3.7), подставив в него $\chi^2 = 0$. Результаты расчетов для граничных условий I представлены на графиках (фиг. 7).



Фиг. 5. $\theta = 0,1$. Граничные условия I. Цифры у кривых — значение k



Фиг. 6. $k = 1$ — Граничные условия II. Цифры у кривых — значение θ



Фиг. 7. Граничные условия II. Цифры у кривых — значение θ

FREE VIBRATIONS OF SANDWICH RODS UNDER THE ACTION OF FOLLOWER STRETCHING FORCE

E. P. ARUTUNIAN, N. B. GRIGORIAN

ԵՌԱՇԵՐՏ ՉՈՂԵՐԻ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՉԳՈՂ ՀԵՏԵՎՈՂ ՈՒԺԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Է. Պ. ԱՐԱՒՈՒՅՈՒՆՅԱՆ, Ն. Բ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված են երկու տիպի եռաշերտ ձողերի տատանումները.

1. Մի ծայրով կոշտ ամրակցված ձողի, որը մյուս ծայրում բևեռավորված է ձգող հետևող ուժով:

2. Ազատ ձողի, որը թաշում է հաստատուն արագացումով ձգող հետևող ուժի ազդեցության տակ:

Երկու ձողերի համար էլ որոշված են առաջին և երկրորդ տոնի տատանումների հաճախականությունները: Քննարկված են կրող շերտերի՝ ըստ ծրաման ունեցած կոշտության, և լցոնի՝ ըստ սահրի ունեցած կոշտության ազդեցությունները տատանումների հաճախականության մեծության վրա:

Դիտարկված են նաև շրեռնավորված եռաշերտ ձողերի տատանումները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Феодосьев В. Н.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1973, 400 с.
2. *Северов С. П.* Об устойчивости стержня, растянутого следящей силой. — Изв. вузов. Машиностроение, 1978, № 8, с. 14—17.
3. *Anderson J. M., King W. W.* Vibration of a cantilever subjected to a tensile follower force. — AIAA Journal, 1969, v. 7, № 4, p. 741—742.
4. *Mladenov K. A.* On the vibration of a cantilevered column subjected to a stretching follower force. — J. Sound and Vibration, 1978, v. 61, № 4, p. 597—601.
5. *Григоряк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973, 170 с.
6. *Смирнов А. И.* Колебания трехслойных балок. — Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3, с. 561—564.
7. *Григоряк Э. И., Лапиница Е. А.* Колебания трехслойных стержней. — Механика композитн. материалов, 1979, № 5, с. 840—850.
8. *Григорян Н. Б.* Устойчивость трехслойного консольного стержня, нагруженного следящей силой. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1980, № 4, с. 70—72.
9. *Григорян Н. Б.* Устойчивость трехслойного стержня при следящей равномерно распределенной нагрузке. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 6, с. 55—61.
10. *Григорян Н. Б.* Устойчивость трехслойной гавели бесконечного размаха, совершающей полет под действием следящей силы. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 6, с. 65—73.
11. *Григорян Н. Б.* Методические рекомендации. Расчеты и испытание на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости трехслойных стержней, нагруженных следящими силами. М.: ВНИИМаш, 1982, 52 с.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
8.IV.1985