ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 3, 1987 Механика

УДК 539.3:537.86

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

АКОПЯН П. З., БАГДАСАРЯН Г. Е.

В работе [1], исходя из основных положений работы [2], предложен асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин в стационарном магнитном поле.

Указанный метод в данной работе распространяется на случай конечно проводящего материала и на его основе решаются задачи магнитоупругих колебаний конечно проводящих прямоугольных пластин в стационарном продольном магнитном поле при различных граничных условиях. Получено асимптотическое уравнение для определения частот магнитоупругих колебаний. Проведен численный анализ зависимости комплексной частоты поперечных колебаний от величины напряженности внешнего магнитного поля и от физико-механических и геометрических параметров пластинки. Проведен сравнительный анализ точности асимптотического метода.

1. Пусть упругая изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ с конечной электропроводностью σ отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1x_2. Рассмотрим колебания пластинки в вакууме при наличии постоянного магнитного поля с заданным вектором напряженности $\vec{H}(H_1, 0, 0)$.

Задача решается при тех же предположениях, которые сделаны в работе [4]. В указанной работе получено следующее уравнение, описывающее магнитоупругие колебания пластинки:

$$\left[1+\frac{h}{k(1+kh)}\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right]\left(D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-\frac{2\sigma h H_1^2}{c^2k^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\partial t}=0 \qquad (1.1)$$

где $w(x_1, x_2, t)$—прогиб пластинки, $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$—цилиндрическая жесткость, E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона, ρ—плотность материала пластинки, Δ—двумерный оператор Лапласа, t—время, c—скорость света в вакууме, $k^2=\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2$, $\bar{k}_1=\mathrm{Re}\,k_1$, $\bar{k}_2=\mathrm{Re}\,k_2$, k_1 и k_2—неизвестные волновые числа.

В случае идеально проводящей пластинки ($\sigma\to\infty$) уравнение (1.1) принимает вид

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{(1+kh)H_1^2}{2\pi k}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \qquad (1.2)$$

где k_1 и k_2 вследствие отсутствия диссипации являются действительными.

2. В уравнения (1.1) и (1.2) входят неизвестные волновые числа k_1 и k_2. Найдем эти величины и частоту магнитоупругих колебаний пластинки путем применения асимптотического метода [1—5].

Рассмотрим магнитоупругие колебания прямоугольной в плане проводящей пластинки со сторонами a_1 и a_2. Условия на контуре пластинки будем пока считать произвольными. Подстановкой $w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2)\exp(i\omega t)$, где ω—частота магнитоупругих колебаний, (1.1) или (1.2) приводится к виду

$$\Delta^2 W-\gamma H_1^2\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}-\frac{2\rho h}{D}\omega^2 W=0 \tag{2.1}$$

Коэффициент γ в случае конечно проводящей пластинки определяется по формуле

$$\gamma=\frac{h}{2\pi D}\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\left(k^2+\frac{kh}{1+kh}\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right)^{-1} \tag{2.2}$$

а в случае идеально проводящей пластинки

$$\gamma=(1+kh)/2\pi Dk \tag{2.3}$$

Запишем «внутреннее» решение уравнения (2.1) в виде

$$W=A\sin k_1(x_1-\xi_1)\sin k_2(x_2-\xi_2) \tag{2.4}$$

где константы k_1, k_2, ξ_1 и ξ_2 определяются из граничных условий, а постоянная A—из начальных. Подставляя (2.4) в (2.1), получим следующее уравнение относительно неизвестных комплексных величин ω, k_1 и k_2:

$$\left[1+\frac{h}{k(1+kh)}\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right](Dk^4-2\rho h\omega^2)+\frac{2\sigma hk_1^2H_1^2 i\omega}{c^2k^2}=0 \tag{2.5}$$

для конечно проводящей пластинки и

$$\omega^2=\frac{D}{2\rho h}\left[k^4+\frac{H_1^2k_1^2}{2\pi D}\left(h+\frac{1}{k}\right)\right] \tag{2.6}$$

для идеально проводящей пластинки.

Решение (2.4), вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям и поэтому должно быть скорректировано решениями типа динамического краевого эффекта [2]. Приближенное решение задачи будет найдено, если окажется возможным построение четырех решений уравнения (2.1), каждое из которых будет удовлетворять двум граничным условиям на одном из краев пластинки и будет приближаться к «внутреннему» решению (2.4) по мере удаления от границы. В случае конечно проводящей пластинки, как видно из (2.2), γ является комплексной величиной и вследствие этого построение таких решений в рассматриваемом случае весьма затруднительно. Поэтому принимается, что при определении ω из уравнения (2.5) в нем в качестве волновых чисел k_1 и k_2 можно использовать их значения, найденные из соответствующей задачи для идеально проводящей пластинки (γ определяется по формуле (2.3)). Как показывают численные расчеты, приведенные в конце работы, погрешность, обусловленная этим допущением, не превышает трех процентов по сравнению с точным решением. Таким образом, применяя асимптотический метод относительно уравнения (2.1), предполагаем, что γ определяется по формуле (2.3).

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничным условиям на краю $x_1=0$, ищется в виде

$$W_{11}=X_{11}(x_1)\sin k_2(x_2-\xi_{21}) \tag{2.7}$$

Подстановка (2.7) в (2.1) с учетом (2.5) приводит к уравнению

$$\frac{d^4X_{11}}{dx_1^4}-(2k_2^2+\gamma H_1^2)\frac{d^2X_{11}}{dx_1^2}-k_1^2(k_1^2+2k_2^2+\gamma H_1^2)X_{11}=0$$

общее решение которого имеет вид

$$X_{11}=c_{11}\exp[-x_1(k_1^2+2k_2^2+\gamma H_1^2)^{1/2}]+c_{21}\sin k_1(x_1-\xi_{11})+$$
$$+c_{31}\exp[x_1(k_1^2+2k_2^2+\gamma H_1^2)^{1/2}] \tag{2.8}$$

Потребуем, чтобы решение (2.8) при $x_1\to\infty$ стремилось к «внутреннему» решению (2.4). Это требование удовлетворяется, если в (2.8) положить $c_{21}=A$ и $c_{31}=0$. Тогда решение (2.7) примет вид

$$W_{11}=\{c_{11}\exp[-x_1(k_1^2+2k_2^2+\gamma H_1^2)^{1/2}]+A\sin k_1(x_1-\xi_{11})\}\sin k_2(x_2-\xi_{21}) \tag{2.9}$$

С возрастанием x_1 решение (2.9) приближается к «внутреннему» решению (2.4), а входящие в него две константы c_{11} и ξ_{11} позволяют удовлетворить двум условиям на краю $x_1=0$. Аналогично можно получить следующее решение:

$$W_{12}=\{c_{12}\exp[-(a-x_1)(k_1^2+2k_2^2+\gamma H_1^2)^{1/2}]+A\sin k_1(a-x_1-\xi_{12})\}\sin k_2(x_2-\xi_{21}) \tag{2.10}$$

удовлетворяющее граничным условиям при $x_1=a$ и стремящееся к «внутреннему» решению (2.4) по мере удаления от этой границы.

Аналогично записываются решения W_{21} и W_{22}, удовлетворяющие граничным условиям на остальных сторонах контура и приближающиеся к решению (2.4) во внутренней области пластинки.

Неизвестные волновые числа k_1 и k_2 можно найти, «склеивая» решения, удовлетворяющие граничным условиям на противоположных сторонах контура пластинки. С точностью до затухающего экспоненциального члена условия «склеивания» решений (2.9) и (2.10), а также W_{21} и W_{22} запишутся в виде

$$k_1a_1=k_1(\xi_{11}+\xi_{12})+m\pi, \quad k_2a_2=k_2(\xi_{21}+\xi_{22})+n\pi \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \tag{2.11}$$

Величины ξ_{ik}, входящие в уравнения (2.11), определяются из граничных условий на контуре пластинки. Имея эти величины, волновые числа k_1 и k_2 находим из решения системы уравнений (2.11). Подставляя полученные таким путем значения волновых чисел в уравнение (2.5) или (2.6), вычисляем соответствующие частоты магнитоупругих колебаний.

Рассмотрим различные варианты закрепления краев пластинки.

1) Пластинка жестко защемлена по контуру.

Формы магнитоупругих колебаний пластинки распадаются на четыре группы по типам симметрии. Удовлетворяя условиям жесткого защемления, определяем постоянные ξ_{ik}, а из (2.11) получаются следующие уравнения относительно k_1 и k_2:

$$\operatorname{ctg}\frac{a_1k_1}{2} = -(1+2\beta_1^2+\alpha)^{-1/2}, \quad \operatorname{ctg}\frac{a_2k_2}{2} = -(1+2\beta_2^2)^{-1/2} \tag{2.12}$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний, и

$$\operatorname{tg}\frac{a_1k_1}{2} = (1+2\beta_1^2+\alpha)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg}\frac{a_2k_2}{2} = (1+2\beta_2^2)^{-1/2} \tag{2.13}$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Здесь принято:

$$\alpha = \frac{H_1^2}{2\pi D}\,\frac{1+h\sqrt{k_1^2+k_2^2}}{k_1^2\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \quad \beta_1 = k_2k_1^{-1}, \quad \beta_2 = \beta_1^{-1} \tag{2.14}$$

Две остальные смешанные формы колебаний получаются, комбинируя соответствующим образом одно из уравнений (2.12) с другим из (2.13).

2) Пластинка шарнирно закреплена по контуру.

Аналогичным образом, удовлетворяя условиям шарнирного опирания, из (2.11) получим

$$k_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{a_2} \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.15}$$

3) Пластинка упруго защемлена по контуру.

В этом случае волновые числа k_1 и k_2 являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\frac{a_1k_1}{2} &= -\left[\sqrt{1+2\beta_1^2+\alpha} + \frac{2Dk_1}{\delta}\left(1+\beta_1^2+\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1} \\ \operatorname{ctg}\frac{a_2k_2}{2} &= -\left[\sqrt{1+2\beta_2^2} + \frac{2Dk_2}{\delta}(1+\beta_2^2)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{2.16}$$

для симметричных форм колебаний и

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a_1k_1}{2} &= \left[\sqrt{1+2\beta_1^2+\alpha} + \frac{2Dk_1}{\delta}\left(1+\beta_1^2+\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1} \\ \operatorname{tg}\frac{a_2k_2}{2} &= \left[\sqrt{1+2\beta_2^2} + \frac{2Dk_2}{\delta}(1+\beta_2^2)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{2.17}$$

для антисимметричных форм колебаний.

В уравнениях (2.16) и (2.17) δ—коэффициент жесткости упругого защемления. При $\delta\to\infty$ эти уравнения совпадают с уравнениями (2.12) и (2.13) для защемленной пластинки, а при $\delta\to 0$ из них получаются решения (2.15) для шарнирно опертой пластинки.

Соответствующим образом комбинируя приведенные уравнения, можно получить соответствующие уравнения для других видов опорного закрепления. Например, если стороны $x_1=0$ и $x_1=a$ жестко защемлены, а стороны $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний из (2.12) и (2.15) имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{a_1k_1}{2}=-(1+2\beta_1^2+\sigma)^{-1/2},\quad k_2=\frac{(2n-1)\pi}{2}\quad(n=1,2,\ldots)\qquad(2.18)$$

Из (2.12)—(2.18) видно, что величины волновых чисел k_1 и k_2 зависят от напряженности внешнего магнитного поля. Как показано в работе [1], указанная зависимость является существенной в случае тонких пластинок и имеет более ощутимое влияние на частоты низших форм колебаний.

3. На основе уравнений (2.5), (2.6), (2.12)—(2.18) проведен численный анализ. В расчетах принято: $a_1=10$ см, $a_2=20$ см, $E=10^{12}$дин/см^2, $\nu=0{,}36$, $\rho=8{,}93$ г/см^3, $\sigma=5{,}3\cdot10^{17}$ сек$^{-1}$, $c=3\cdot10^{10}$см/сек. В табл. 1—3, где m и n характеризуют формы колебаний, $\alpha=0{,}025\cdot H_1/\pi$ а/м, $\beta=\omega_{mn}/\omega_{mn}^0$, ω_{mn}—частота магнитоупругих колебаний, ω_{mn}^0—частота собственных колебаний при отсутствии магнитного поля, приведены значения относительной частоты $\mathrm{Im}\beta$ и относительного затухания $\mathrm{Re}\beta$ для первых четырех форм колебаний упруго-защемленной по всему контуру прямоугольной пластинки соответственно при $\delta\to 0$ (шарнирное опирание контура), $\delta=2D$ и $\delta\to\infty$ (жесткое опирание контура).

Таблица 1

	Reβ						Imβ					
	h=0,01 см			h=0,04 см			h=0,01 см			h=0,04 см		
m,n \ α	0,3	0,5	1	0,5	1	3	0,3	0,5	1	0,5	1	3
1,1	0,51	0	7,90	1,09	1,48	3,65	0,45	3,23	4,82	0,11	0,26	0,31
1,2	0,80	0,57	4,14	1,05	1,24	2,62	0,21	0,62	4,79	0,05	0,16	0,29
2,1	0,83	0,54	4,23	1,04	1,17	2,23	0,21	0,66	3,25	0,03	0,08	0,19
2,2	0,88	0,75	3,27	1,03	1,13	1,99	0,16	0,47	3,17	0,02	0,06	0,18

Численный анализ показывает, что зависимость частоты магнитоупругих колебаний конечно проводящей прямоугольной пластинки от напряженности магнитного поля качественно имеет аналогичный

Таблица 2

m, n \ α	Re β, h = 0,01 см			Re β, h = 0,04 см			Im β, h = 0,01 см			Im β, h = 0,04 см		
	0,5	1	2	0,5	1	3	0,5	1	2	0,5	1	3
1,1	2,70	16,5	36,4	1,41	2,48	7,10	8,78	8,86	8,88	0,29	0,47	0,55
1,2	0	7,67	19,6	1,13	1,56	4,02	1,46	6,97	7,02	0,10	0,27	0,42
2,1	0,36	6,54	15,5	1,10	1,39	3,21	1,08	4,76	4,82	0,05	0,15	0,28
2,2	0,82	4,91	12,5	1,07	1,27	2,68	0,72	4,36	4,43	0,03	0,11	0,24

Таблица 3

m, n \ α	Re β, h = 0,01 см			Re β, h = 0,04 см			Im β, h = 0,01 см			Im β, h = 0,04 см		
	0,3	0,5	1	0,5	1	3	0,3	0,5	1	0,5	1	3
1,1	0,48	0	9,20	1,72	1,00	4,13	0,53	4,12	5,42	0,14	0,29	0,34
1,2	0,82	0,53	4,77	1,06	1,26	2,86	0,24	0,70	5,21	0,06	0,18	0,31
2,1	0,84	0,45	4,86	1,05	1,21	2,47	0,24	0,78	3,62	0,03	0,10	0,21
2,2	0,89	0,74	3,75	1,04	1,16	2,17	0,18	0,54	3,49	0,02	0,08	0,20

Таблица 4

	$4\pi \cdot 10^{-7} \cdot H_1$ (а/м)	h = 0,02 см, 1	h = 0,02 см, 2	h = 0,02 см, 3	h = 0,05 см, 1	h = 0,05 см, 2	h = 0,05 см, 3
$m = 1$	точное решение	3,98	8,09	16,23	1,42	2,27	4,26
	асимптотическое решение	3,87	7,95	16,03	1,39	2,24	4,23
	асимп. реш. (k_1 не зависит от H_1)	4,56	9,45	19,04	1,54	2,61	4,96
	расхождение, %	2,76	1,73	0,86	2,11	1,32	0,70
	расхождение, %	14,57	16,81	17,31	8,45	14,98	16,43
$m = 2$	точное решение	2,05	4,08	8,13	1,11	1,42	2,28
	асимптотическое решение	2,01	4,03	8,07	1,09	1,41	2,27
	асимп. реш. (k_1 не зависит от H_1)	2,16	4,44	8,90	1,14	1,50	2,48
	расхождение, %	1,95	1,22	0,74	1,80	0,70	0,44
	расхождение, %	5,37	8,82	9,47	2,70	5,63	8,06

характер, что и в работах [6, 7]: а) для сравнительно толстых пластин частота колебаний с увеличением величины напряженности магнитного поля увеличивается; б) для очень тонких пластин частота колебаний с увеличением H_1 уменьшается, достигая нулевого значения, которое сохраняется в определенном интервале изменения H_1. Дальнейшее увеличение H_1 приводит к резкому увеличению частоты колебаний пластинки; б) для пластинок «средней» толщины зависимость частоты колебаний от H_1 имеет экстремальный характер (существует точка минимума).

Для сравнения в табл. 4 приведены значения частот магнитоупругих колебаний жестко защемленной пластинки-полосы ($a_2 \to \infty$, $k_2=0$) при $m=1$ и $m=2$, найденные на основе точного решения [7], на основе вышеизложенного асимптотического решения и на основе уравнения (2.5) в случае, когда не учитывается зависимость k_1 от H_1 (для k_1 берутся его значения в случае диэлектрической пластинки [2]). В строках 6, 7, 11, 12 табл. 4 приведены расхождения в процентах этих приближенных решений от точного.

Табл. 4 свидетельствует, во-первых, о необходимости учета зависимости волнового числа от напряженности магнитного поля и, во-вторых, о достаточной точности асимптотического метода для расчета частот магнитоупругих колебаний.

VIBRATIONS OF A CONDUCTIVE RECTANGULAR PLATE IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

P. Z. HAKOPIAN, G. E. BAGDASARIAN

ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԸՆԴԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Պ. Զ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է վերջավոր հաղորդիչ ուղղանկյուն սալի տատանումների հաճախականությունների որոշման ասիմպտոտական մեթոդ, որը հանդիսանում է Վ. Վ. Բոլոտինի ասիմպտոտական մեթոդի ընդհանրացումը, և դրա հիման վրա, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում լուծվում են ստացիոնար ընդերկայնական մագնիսական դաշտում վերջավոր հաղորդիչ ուղղանկյուն սալերի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян Г. Е.* Применение асимптотического метода В. В. Болотина для исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин. — Проблемы машиностроения, 1986, вып. 25, с. 63—68.
2. *Болотин В. В.* Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинки. — Инженерный сборник, 1961, т. 31, с. 3—14.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.

4. *Багдасарян Г. Е.* Асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний прямоугольных пластин.—Математические и физико-механические поля, 1986, вып. 24, с. 57—63.
5. *Акопян П. З.* Исследование магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин асимптотическим методом. В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1986, с. 137—141.
6. *Амбарцумян С. А.* Некоторые особенности колебаний пластинок в магнитном поле.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, №4, с. 24—31.
7. *Акопян П. З., Багдасарян Г. Е.* Магнитоупругие колебания проводящей пластинки в постоянном магнитном поле. Проблемы динамики взаимодействия деф. сред, Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984, с. 17—22.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
18.VIII. 1986