ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 3, 1987 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНАХ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Динамические задачи о трещинах для антиплоской и плоской задач теории упругости в различных постановках рассматривались многими авторами [1—8 и др.]. Сравнительно мало исследований о трещинах в вязкоупругой среде. В работах [9—11] исследуется распространение трещин в антиплоской задаче в стационарной постановке.

Следует отметить, что задача [1] по математической формулировке совпадает с задачей дифракции плоской волны на трещине [4, 7].

В настоящей статье изучаются, в основном, коэффициенты интенсивности напряжений в антиплоской и плоской задачах для вязкоупругих нестареющих сред. Для первой задачи предполагается, что на кромках трещины заданы касательные напряжения постоянной интенсивности, а для второй—помимо условия симметрии, постоянные нормальные напряжения.

Для трещины, движущейся с постоянной скоростью, в явном виде решения записываются для среды Максвелла, а для неподвижной—в общем виде.

1. Уравнение движения антиплоского движения запишется в виде

$$G(1-K^*)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где оператор

$$K^*(u)=\int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1.2}$$

В частности, будем иметь дело с ядрами со слабой сингулярностью

$$K(t)=A\exp(-\gamma t)t^{\alpha-1} \qquad (0<\alpha\leqslant 1) \tag{1.3}$$

Граничные условия имеют вид

$$\tau_{yz}=G(1-K^*)\frac{\partial w}{\partial y}=TH(Ct-x)H(t) \quad \text{при} \quad x\leqslant Ct$$
$$w=0 \quad \text{при} \quad x>Ct \tag{1.4}$$

Введем новую переменную $\xi=x-Ct$ и преобразуем (1.1), подвергая преобразованиям по Лапласу и Фурье

$$W(\lambda, y, s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w \exp(-(\lambda\xi + \beta y + t)s) d\xi dt \tag{1.5}$$

При этом надо учесть, что поскольку K^* есть псевдодифференциальный оператор и $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - C\frac{\partial}{\partial \xi}$, K^* дает производную дробного порядка и $K^* \div \overline{K}(s - \lambda Cs)$, где

$$\overline{K}(s) = A\frac{\Gamma(\delta)}{[\gamma + s(1-\lambda C)]^\delta} \tag{1.6}$$

Тогда для неизвестного β получим

$$\beta^2 = \frac{1}{b^2}\frac{(1-\lambda C)^2}{1-\overline{K}} - \lambda^2, \quad b^2 = \frac{G}{\rho} \tag{1.7}$$

Удовлетворяя преобразованным условиям (1.4), получим следующее уравнение Винера-Хопфа:

$$Gs\beta(1-\overline{K})W_-(\lambda, s) = \frac{T}{s^2\lambda} - T_+(\lambda, s) \tag{1.8}$$

где W_- и T_+—аналитические в левой и правой полуплоскостях λ преобразованные по t и ξ значения w и τ_{yz}. При этом в (1.5) интегрирование по ξ ведется в пределах $-\infty < \xi \leq 0$ и $0 \leq \xi < \infty$.

В общем виде факторизацию (1.8) можно провести известным образом [12]

$$\beta(1-\overline{K}) = \overline{\beta}_+ \cdot \overline{\beta}_-, \quad \overline{\beta}_\pm = \exp\left\{\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln[\beta(1-\overline{K})]d\lambda'}{\lambda'-\lambda}\right\} \tag{1.9}$$

Однако, полученные уравнения не только необозримые, но и не поддаются обратному обращению из-за сложной формы вхождения λ в $\overline{K}(s)$. Формулы эти проще получаются для среды типа Максвелла, то есть если в (1.3) предположить $\delta=1$ и $A=\gamma$. Поэтому для движущейся трещины концентрацию напряжения будем изучать для среды Максвелла, а для неподвижной ($C=0$)—в общем виде (1.3).

Итак, для среды Максвелла $\overline{K} = \frac{A}{A + s(1-\lambda C)}$

$$\beta^2 = \frac{1}{b^2}(1-\lambda C)^2 + \frac{A}{b^2 s}(1-\lambda C) - \lambda^2 \tag{1.10}$$

и $\beta = \beta_+ \cdot \beta_-$ будет иметь вид

$$\beta_+ \cdot \beta_- = \sqrt{\sqrt{1-\frac{C^2}{b^2}}(\lambda - \lambda_2)}\sqrt{\sqrt{1-\frac{C^2}{b^2}}(\lambda - \lambda_1)} \tag{1.11}$$

где

$$\lambda_{1,2}=\frac{-C\left(1+\frac{A}{2s}\right)\pm b\sqrt{1+\frac{A}{s}+\frac{C^2A^2}{4b^2s^2}}}{b^2-C^2} \tag{1.12}$$

причем $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ при $s>0$.

Тогда решение уравнения (1.8) дает

$$T_+=\frac{T}{s^2\lambda}\left[1-\frac{\beta_+(\lambda)}{\beta_+(0)}\right],\quad T_{yz}=-\frac{T}{\lambda s^2}\,\frac{\beta_+(\lambda)}{\beta_+(0)} \tag{1.13}$$

Для получения коэффициента интенсивности напряжения следует получать $\lambda\to\infty$ $(\xi\to 0)$ и при обращении преобразования Фурье учесть, что [13]

$$\frac{1}{\sqrt{s\lambda}}<\div\begin{cases}\dfrac{1}{\xi^{1/2}\Gamma(1/2)}, & \xi>0\\ 0\quad, & \xi<0\end{cases} \tag{1.14}$$

Преобразование по Лапласу от τ_{yz}

$$\tau_{yz}=-\frac{T}{s^{3/2}}\,\frac{1}{\xi^{1/2}\Gamma(1/2)}\,\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}} \tag{1.15}$$

Для упрощения отдельно рассмотрим случаи малых и больших времен. В первом случае $(s\to\infty)$

$$\bar{\tau}_{yz}=-\frac{2T\sqrt{b-C}}{\pi\xi^{1/2}}\,t^{1/2}\left(1-\frac{A}{6}\,t\right) \tag{1.16}$$

а для больших t $(s-0)$

$$\tau_{yz}=-\frac{TH(t)}{\xi^{1/2}}\sqrt{\frac{b^2-C^2}{\pi AC}} \tag{1.17}$$

Для стоящей трещины при (1.3) выражение T_{yz} можно найти на всей оси x и, в частности, при $x\to 0$

$$\bar{\tau}_{yz}=-\frac{T\sqrt{b}}{s^{3/2}}\sqrt[4]{1-\bar{K}(s)}\,\frac{1}{x^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{1.18}$$

Для $t\to 0$ и $t\to\infty$ соответственно получим

$$\tau_{yz}=-\frac{2T\sqrt{b}t^{1/2}}{\pi x^{1/2}}\left[1-\frac{A}{8}\,t^{\delta}\,\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta)}{\Gamma\left(\delta+\frac{3}{2}\right)}\right] \tag{1.19}$$

$$\tau_{yz}=-\frac{2T\sqrt{b}t^{1/2}}{\pi x^{1/2}}\left[1-\frac{A\Gamma(\delta)}{\gamma^{\delta}}\right]^{1/4} \tag{1.20}$$

Помимо полученных формул (1.19) и (1.20) из (1.8) можно таким же образом определить w при $x<0$. Тогда, используя принцип Гриффитса-Ирвина, можно записать условие распространения трещины. Для малых времен оно имеет вид

$$\sigma = \frac{T^2 bl}{2G\pi}\left[1 + At^{\delta}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma\left(\delta+\frac{3}{2}\right)}\right]$$

где σ—поверхностная энергия разрушения.

Как видно из последней формулы, вязкоупругость уменьшает время возникновения трещины.

Аналогичный результат о возможности распространения движущейся трещины можно получить, используя принцип Г. Баренблатта [3].

Из (1.19) для среды Максвелла при $C=0$ получится (1.16), а (1.20) вырождается и вместо (1.20) надо пользоваться формулой

$$\tau_{yz} = -\frac{Tt^{1/4}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{1/4}}\sqrt[4]{\frac{b^2}{A}} \tag{1.21}$$

Кстати, для $C=0$ для всех времен из (1.18) (или (1.15)) получится

$$\tau_{yz} = -\frac{4T\sqrt{b}}{x^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}\int_0^t (t-\tau)^{1/4}\frac{\exp(-A\tau)}{\tau^{3/4}}\,d\tau \tag{1.22}$$

2. В случае плоской задачи уравнения движения имеют вид

$$a^2(1-K^*)\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad b^2(1-K^*)\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

где a и b—скорости продольных и поперечных волн, φ и ψ—потенциалы.

Граничные условия на $y=0$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\quad -\infty < x < \infty$$

$$\sigma_{yy} = (1-K^*)\left|(a^2-2b^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2b^2\frac{\partial v}{\partial y}\right| =$$

$$= PH(t)H(Ct-x),\quad -\infty < x \leq Ct,\qquad v=0,\quad x > Ct \tag{2.2}$$

Вводя переменное ξ, для преобразованных по (1.5) величин из (2.2) можно получить

$$T_{yx}(\lambda, 0, s) = 0,\quad V(\lambda, 0, s) = \frac{1}{s^3}J_-(\lambda)$$

$$\Sigma_{yy}(\lambda, 0, s) = -\frac{P}{s^2\lambda} + \frac{1}{s^2}\Sigma_+(\lambda) \tag{2.3}$$

Подставляя сюда Φ и Ψ, можно получить уравнение Винера-Хопфа

$$\frac{b^4 J_-}{\alpha(1-\lambda C)^2}[1-\bar{K}]^2 R(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \Sigma_+ \tag{2.4}$$

где функция R определяется, как

$$R(\lambda)=(\beta^2-\lambda^2)^2+4\lambda^2\alpha\beta$$

$$\alpha^2=\frac{1}{a^2}\frac{(1-\lambda C)^2}{1-K}-\lambda^2,\quad \beta^2=\frac{1}{b^2}\frac{(1-\lambda C)^2}{1-K}-\lambda^2 \tag{2.5}$$

Для упрощения факторизации, как и в п. 1, будем изучать среду Максвелла. Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{b^4 J_-}{\alpha}\frac{s^2R(\lambda)}{[A+s(1-\lambda C)]^2}=\frac{1}{\lambda}-\Sigma_+ \tag{2.6}$$

Факторизация $R(\lambda)$ проводится, как и в [4]

$$R(\lambda)=-S(\lambda)k(\lambda-c_1)(\lambda+c_2)\left(\lambda-\frac{1}{C}\right)^2,\quad S(\infty)=1 \tag{2.7}$$

$$k=4\sqrt{\left(1-\frac{C^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{C^2}{b^2}\right)}-\left(\frac{C^2}{b^2}-2\right)^2 \tag{2.8}$$

$\pm c_{1,2}$—корни уравнения Релея

$$S_\pm=\exp\left\{\frac{i}{\pi}\int\limits_{\lambda_{2,1}^{(a)}}^{\lambda_{2,1}^{(b)}}\operatorname{arctg}\frac{4(\lambda')^2\alpha\beta\,d\lambda'}{[\beta^2-(\lambda')^2]^2(\lambda'-\lambda)}\right\}$$

где λ_i даются по (1.12).

Решение уравнения Винера-Хопфа имеет вид [1, 4]

$$\Sigma_{yy}(\lambda,0,s)=-\frac{P}{\lambda s^2}\frac{\alpha_+(0)}{\alpha_+(\lambda)}\frac{\lambda+c_2}{c_2}\frac{S_+(\lambda)}{S_+(0)} \tag{2.9}$$

Для получения коэффициента интенсивности напряжения положим $\lambda\to\infty$. Тогда

$$\Sigma_{yy}=-\frac{P}{c_2S_+(0)}\frac{\alpha_+(0)}{s^2\sqrt{\lambda}\sqrt[4]{1-\frac{C^2}{a^2}}} \tag{2.10}$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$\bar{\sigma}_y=-\frac{P}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\xi^{1/2}}\frac{\sqrt{-\lambda_2(a)}}{c_2}\frac{1}{s^{3/2}S_+(0)} \tag{2.11}$$

Для получения обратного преобразования по t, как и раньше, рассмотрим асимптотические случаи.

При $s\to\infty$

$$c_2=-\lambda_0+\Lambda\frac{A}{s(1-\lambda_0C)},\quad \lambda_0=\frac{1}{C-c}$$

где c—скорость упругой волны Релея и постоянная $\Lambda=\Lambda_1/\Lambda_2$.

$$\Lambda_1=\left|(\beta_0^2-\lambda_0^2)\,\frac{1}{b^2}-\lambda_0^2\alpha_0\beta_0\left(\frac{1}{a^2\alpha_0^2}+\frac{1}{b^2\beta_0^2}\right)\right|(1-\lambda_0C)^2>0$$

$$\Lambda_2=(\beta_0^2-\lambda_0^2)\left[\frac{C}{b^2}+\lambda_0\left(2-\frac{C^2}{b^2}\right)\right]+\lambda_0^2\alpha_0\beta_0\left\{\frac{1}{\alpha_0^2}\left[\frac{C}{a^2}+\lambda_0\left(1-\frac{C^2}{a^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_0^2}\left[\frac{C}{b^2}+\lambda_0\left(1-\frac{C^2}{b^2}\right)\right]\right\}-2\alpha_0\beta_0\lambda_0>0$$

Разлагая по $1/s$ $S_+(0)=S_+^0(0)\left[1+S_+^1(0)\dfrac{A}{S}\right]$, найдем

$$\sigma_y=-\frac{2P}{\pi}\sqrt{\frac{t}{\xi}}\,\frac{c-C}{\sqrt{a-C}}\,\frac{1}{S_+^0(0)}\left\{1+A\left[\frac{1}{4}-\frac{\Lambda(c-C)}{1-\lambda_0C}-S_+^1(0)\right]\frac{2t}{3}\right\}\quad(2.12)$$

где

$$S_+^0(0)=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1/a}^{1/b}\operatorname{arc\,tg}\varkappa\,\frac{d\zeta}{(1-C\zeta)\zeta}\right\}$$

$$\varkappa=\frac{4\zeta^2\sqrt{\left(\zeta^2-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2}-\zeta^2\right)}}{\left(2\zeta^2-\dfrac{1}{b^2}\right)^2}$$

Для оценки влияния вязкости полагаем $C\approx0$ и берем типичные отношения b/a, c/b. Тогда значение скобки при A приблизительно равно $-0{,}22$, то есть концентрация уменьшается.

Для $s\to0$

$$\lambda_2(a)=-\frac{C}{a^2-C^2}\,\frac{A}{s},\qquad c_2=\frac{1}{s}\,z(\bar\beta)$$

где z—корень уравнения

$$(-2z+\bar\beta C)^2-4z(z-\bar\beta C)^{1/2}\left(z-\bar\beta\,\frac{b^2}{a^2}\,C\right)^{1/2}=0,\quad \bar\beta=\frac{A}{b^2},\quad S_+(\alpha)=1$$

Тогда получится

$$\sigma_y=-\frac{P}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\xi^{1/2}}\sqrt{\frac{C}{a^2-C^2}}\,\sqrt{A}\,\frac{H(t)}{z(\bar\beta)}\quad(2.13)$$

Для неподвижной трещины при (1.3) функцию Релея можно записать как

$$R(\lambda)=2S(\lambda)(\lambda^2-c^2)\left(\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{b_0^2}\right)$$

$$(2.14)$$

$$S=S_+\cdot S_-,\quad S_\pm=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1/a}^{1/b}\operatorname{arctg}\frac{4\zeta^2\sqrt{\left(\zeta^2-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2}-\zeta^2\right)}}{\left(\dfrac{1}{b^2}-2\zeta^2\right)^2[\zeta\pm\lambda\sqrt{1-K}]}\,d\zeta\right\}$$

где

$$a_0=a\sqrt{1-\bar K},\quad b_0=b\sqrt{1-\bar K},\quad \bar K=A\Gamma(\delta)(s+\gamma)^{\delta}$$

Решение уравнения Винера-Хопфа дается (2.9) ($c_2=1/c+\Lambda A/s$) и при $x\to 0$ получится:

при $t\to 0$

$$\sigma_y=-\frac{2P}{(ax)^{1/2}}\frac{c}{S_+(0)}\frac{t^{1/2}}{\pi}\left[1+\left(\frac{1}{4}-\Lambda' c\right)\frac{A\Gamma(\delta)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\delta+\frac{3}{2}\right)}t^{\delta}\right] \tag{2.15}$$

где $\quad \Lambda'=\Lambda(C=0)$

при $\quad t\to\infty$

$$\sigma_y=-\frac{2P}{(\bar a_0 x)^{1/2}}\frac{c(\bar a_0,\bar b_0)}{S_+(0)}\frac{t^{1/2}}{\pi} \tag{2.16}$$

где $\bar a_0,\ \bar b_0=a_0(s=0),\quad b_0(s=0)$.

В случае максвелловской среды для $t\to 0$ решение из (2.12) или (2.15) получится в одинаковом виде, а для получения решения при $t\to\infty$ надо учесть, что

$$a_0=a\sqrt{\frac{s}{A}},\quad c_2=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{A}{s}},\quad \sigma_y=-\frac{P}{\Gamma(1/2)(ax)^{1/2}}\frac{c}{\sqrt[4]{A}S_+(0)}\frac{t^{1/4}}{\Gamma(5/4)}$$

Таким образом, асимптотическое поведение решения в случае $C=0$ существенно отличается от общего, даваемого по (2.16) и от $C\neq 0$ (2.13).

Следует отметить, что переход к задачам статики ($a,\ b\to\infty$) согласно (1.17) и (2.13) дает конечные значения концентраций напряжений лишь в случаях движущихся трещин и среды Максвелла.

THE PROBLEMS ON CRACKS IN THE VISCOELASTIC MEDIA

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՃԱՔԻ ՄԱՍԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են առաձգամածուցիկ միջավայրում ճաքի վերաբերյալ հակահարթ և հարթ դինամիկական խնդիրներ: Հաստատուն արագությամբ շարժվող ճաքի համար լուծված են խառը եզրային խնդիրներ Մաքսվելի օրենքի դեպքում: Անշարժ ճաքի դեպքում լուծումները գտնված են թույլ սինգուլյարություն ունեցող կորիզի համար:

Լարումների ինտենսիվության գործակիցների համար դուրս են բերված ասիմպտոտական բանաձևեր: Ցույց են տրված ճաքի արագության և մածուցիկության ազդեցությունները ստացված արժեքների վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baker B. R.* Dynamic stresses created by a moving craeu.—Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech. 1962, v. 29, № 3, pp. 3—12.
2. *Freund L. B.* Crack propagation in elastic solids subjected to general loading. III stress wave loading.—J. Mech. and Phys. Solids, 1973, v. 21, № 2, p. 47—61.
3. *Костров Б. В.* Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1042—1050.
4. *Freund L. B.* Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. I. Constant rate of extension. J. Mech. and Phys. Solids. 1972, vol. 20, p. 129—141.
5. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 54—73.
6. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. М.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальные и касательные импульсы. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 100—111.
7. *Norris A. N.* and *Achenbach J. D.* Elastic wave diffraction by a semi-Infinite Crack in a Transversely Isotropic Material. The Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1984, v. 37, p. 565—581.
8. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.
9. *Walton J. R.* On the steady-state propagation of an antiplane shear crack in the infinite linear viscous elastic space.—Quart. Appl. Math., 1982, № 1, p. 37—52.
10. *Willis J. R.* Crack propagation in viscoelastic media.—J. Mech. Phys. Solids, 1967, v. 15, pp. 229—240.
11. *Walton J. R.* The Dynamic Steady-State propagation of on Antiplane Shear Crack in a General Linearly Viscoelastic Layer.—Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1985, v. 52, № 4, pp. 853—856.
12. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
13. *Бейтмен Г.* и *Эрдейи П.* Таблицы интегральных преобразований Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
4.VII.1986