

УДК 539.3

О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ УПРУГИХ РЕБЕР К КОНЕЧНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А., ХИЖНЯК Л. А.

Взаимодействие изотропной и анизотропной оболочек с упругими ребрами рассматривалось в работах [1, 2]. Ниже на основе фундаментального решения, построенного в [3], решается задача включения для пьезокерамической оболочки конечной длины.

1. Рассмотрим отнесенную к координатной системе x, β, γ замкнутую по β цилиндрическую пьезокерамическую оболочку длины l_0 , поляризованную вдоль оси x . На торце $x=0$ оболочка жестко закреплена, торец $x=l_0$ свободен от сил. Пусть в точках α_0, β_0+mT ($m=1, 2, \dots, \infty-1$) к оболочке приложена система сосредоточенных сил с компонентами $P_x=P_1, P_y=P_2, P_z=P_3$.

Будем исходить из полученного ранее [3] фундаментального решения уравнений теории пологих пьезокерамических оболочек. Компоненты матрицы Грина представим в виде

$$u_{ij}(x, \beta, \alpha_0, \beta_0) = u_{ij}^0(x, \alpha_0) + A_{ji} \Psi_j \quad (1.1)$$

$$\Psi_j = -\frac{P_j}{F_1 R_2^2 a_0} G(x, \beta, \alpha_0, \beta_0); \quad G(x, \beta, \alpha_0, \beta_0) = E(x - \alpha_0, \beta - \beta_0) + \\ + \frac{2}{T} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{10} B_n^{(k)} \exp[ik\omega_n^{(k)}]$$

где u_{ij}^0 — общее решение системы уравнений пологой оболочки [3] при $P_j=0$ ($j=1, 2, 3, 4$); $B_n^{(k)}$ — постоянные, определяемые из граничных условий; $E(x - \alpha_0, \beta - \beta_0)$ — фундаментальное решение; u_{ij} — перемещения ($i=1, 2, 3$) и потенциал электрического поля ($i=4$) в точке (x, β) от действия сосредоточенной силы P_j ($j=1, 2, 3$) или заряда P_4 в точке (α_0, β_0+mT) . Остальные величины, входящие в (1.1), определены в [3].

Условия на торцах оболочки имеют вид

$$u=v=w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{при } x=0 \quad (1.2)$$

$$T_1=M_1=S=N_1^*=N_1+\frac{1}{R_2} \frac{\partial H}{\partial \beta}=0 \quad \text{при } x=l_0$$

Рассмотрим два случая электрических граничных условий: 1—

торцы оболочки электродированы и заземлены ($\varphi=0$); 2—заземленный торец электродирован и заземлен ($\varphi=0$), свободный торец электрически зажат ($D_z=0$).

В рассматриваемой задаче нас будут интересовать перемещения от сосредоточенной силы P_1 . В силу (1.1) имеем

$$u_{11}=u(x, \beta)=u^0+A_{11}W_1, \quad u_{21}=v(x, \beta)=v^0+A_{12}W_1 \quad (1.3)$$

$$u_{31}=w(x, \beta)=w^0+A_{13}W_1, \quad u_{41}=\varphi(x, \beta)=\varphi^0+A_{14}W_1$$

$$u^0 = \frac{x}{\mu} \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z_j^0 x) / z_j^0 + (12a_3 a_4 / \mu^2 a_3' c_{33} + \varepsilon_{33} / \mu) B_3^{(0)} x +$$

$$+ (e_{33} / \mu - 12a_3 x \rho / \mu^2 a_3' c_{33}) B_5^{(0)} x + B_6^{(0)}; \quad v^0 = B_7^{(0)} x + B_{10}^{(0)}; \quad w^0 = \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z_j^0 x) +$$

$$+ 12a_3 (x B_3^{(0)} - \rho B_5^{(0)}) / \mu a_3' c_{33}$$

$$\varphi^0 = -\rho \sum_{j=1}^4 B_j^{(0)} \exp(z_j^0 x) / z_j^0 \mu + (e_{33} / \mu - 12a_3 x \rho / \mu^2 a_3' c_{33}) B_7^{(0)} x +$$

$$+ (12a_3 \rho^2 / \mu^2 a_3' c_{33} + c_{33} / \mu) B_5^{(0)} x + B_6^{(0)}$$

$$A_{11} = \frac{h^2}{R_2^6} \sum_{j=0}^2 b_{4j}^{11} \frac{\partial^4}{\partial x^{4-2j} \partial \beta^{2j}} + \frac{h^2}{12R_2^6} \sum_{j=0}^4 b_j^{11} \frac{\partial^6}{\partial x^{8-2j} \partial \beta^{2j}}$$

$$A_{12} = \frac{h^2}{R_2^6} \sum_{j=1}^3 b_{4j}^{12} \frac{\partial^4}{\partial x^{4-j} \partial \beta^j} + \frac{h^2}{12R_2^6} \sum_{j=1}^4 b_j^{12} \frac{\partial^6}{\partial x^{8-2j} \partial \beta^{2j-1}}$$

$$A_{13} = \frac{h^2}{R_2^6} \sum_{j=0}^2 b_j^{13} \frac{\partial^6}{\partial x^{8-2j} \partial \beta^{2j}}$$

$$A_{14} = \frac{h^2 b_{40}^{14}}{R_2^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{h^2}{12R_2^6} \sum_{j=0}^4 b_j^{14} \frac{\partial^6}{\partial x^{8-2j} \partial \beta^{2j}}$$

$$b_{40}^{11} = -c_{44}(e_{13}^2 + \varepsilon_{33} c_{11}); \quad b_{41}^{11} = -c_{11}(e_{15}^2 + \varepsilon_{11} c_{44}); \quad b_{42}^{11} = 0; \quad b_0^{11} = -c_{44} c_{33} \varepsilon_{33}$$

$$b_1^{11} = -c_{33}(r^2 + c_{44} \varepsilon_{11}) - \varepsilon_{33} t; \quad b_2^{11} = -2fr^2 - \varepsilon_{33} c_{11} i - \varepsilon_{11} t; \quad b_{41}^{12} = -e_{15} \eta + c_{44}(e_{13}^2 + \varepsilon_{33} c_{11})$$

$$b_{42}^{12} = 0; \quad b_{43}^{12} = c_{11} g; \quad b_1^{12} = c_{33}(\varepsilon_{23} s + e_{33} r); \quad b_2^{12} = s\xi + r(2e_{33} f + c_{33} e_{15})$$

$$b_3^{12} = s\theta + r(2fe_{13} + c_{11} e_{33}); \quad b_4^{12} = c_{11}(\varepsilon_{11} s + e_{13} r); \quad b_0^{13} = c_{44}(e_{13} e_{33} + \varepsilon_{33} c_{11})$$

$$b_1^{13} = c_{13} g + e_{15} \eta - c_{44}(e_{13}^2 + c_{11} \varepsilon_{33}); \quad b_2^{13} = -c_{11} g; \quad b_{40}^{14} = c_{44} \eta; \quad b_0^{14} = -c_{33} c_{44} e_{33}$$

$$b_1^{14} = c_{13} c_{33} r - 2e_{33} c_{44} s + c_{33}(c_{44} e_{13} - c_{11} e_{33}); \quad b_2^{14} = 2f r s - c_{11} e_{33} i - e_{15} t$$

$$b_3^{14} = c_{11}(r s - c_{11} e_{33} - e_{15} i)$$

Входящие сюда упругие и пьезоэлектрические постоянные и их комбинации определены в [3].

Используя выражения для усилий и моментов [4] и уравнения состояния пьезокерамической среды [5], имеем

$$T_1 = \frac{h}{R_2} \left[c_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + w \right) + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \quad (1.4)$$

$$S = \frac{h}{R_2} \left[c_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right], \quad M_1 = - \frac{h^3}{12R_2^3} \left(c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)$$

$$N_1^* = - \frac{h^3}{12R_2^3} \left[c_{33} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + (c_{13} + c_{41}) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \beta^2} \right]$$

$$D_1 = \frac{1}{R_2} \left[e_{33} \frac{\partial u}{\partial z} + e_{13} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]$$

Подставляя (1.3) в граничные условия (1.2), получим системы линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных $B_i^{(k)}$, ($k=0, 1, \dots$), ($v=1, 2, \dots, 10$). В силу громоздкости их не выписываем. Этим заканчивается построение матрицы Грина для конечной оболочки.

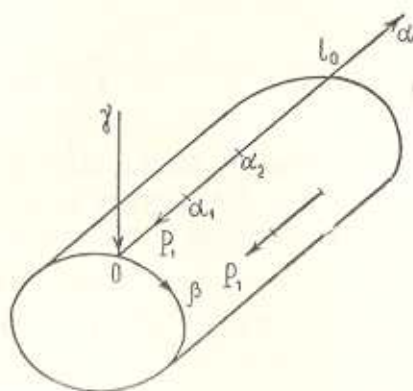
2. Пусть конечная пьезокерамическая оболочка усилена вдоль отрезков $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\beta_m = 2\pi m/\omega$ ($m=0, 1, \dots, \omega-1$) тонкими упругими ребрами жесткости, нагруженными на концах α_1 одинаковыми продольными силами P_1 вдоль отрицательной оси α (фиг. 1).

Будем предполагать, что ребро непрерывно скреплено с оболочкой и работает только на растяжение-сжатие, материал ребра диэлектрик. Условие совместности деформации ребра и оболочки имеет вид

$$P(\alpha)/EF = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varepsilon(\alpha, \alpha_0) q(\alpha_0) d\alpha_0. \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(\alpha, \alpha_0) = \varepsilon_1 = \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha}; \quad u = - \frac{u_{11}}{P_1}$$

Здесь $\varepsilon(\alpha, \alpha_0)$ — продольная деформация; u_{11} — перемещение в точке $(\alpha, 0)$ от действия сосредоточенной силы P_1 , приложенной в точке α_0 , β_m ; $q(\alpha_0)$ — интенсивность контактных усилий, действующих на оболочку; E и F — модуль упругости и площадь поперечного сечения ребра.



Фиг. 1

Вычисляя ядро $\varepsilon(\alpha, \alpha_0)$ с учетом (1.1), (1.3) и подставляя его в (2.1), получаем сингулярное интегральное уравнение относительно интенсивности контактных усилий.

$$\int_{-1}^1 \frac{q(t) dt}{(t-x)} + A \int_{-1}^1 q(t) F(x, t) dt + B \int_x^1 q(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

$$\alpha = (Lx + \alpha_1 + \alpha_2)/2; \quad \alpha_0 = (Lt + \alpha_1 + \alpha_2)/2, \quad L = \alpha_2 - \alpha_1; \quad A = -3L\omega / \sum_{j=1}^5 \operatorname{Re}[id(z_j)/z_j]$$

$$B = -TR_2 h A a_0 / EF b_{40}^{11}, \quad F(x, t) = \sum_{i=1}^4 \Phi_i(x, t) - \frac{Th a_0}{b_{40}^{11}} \frac{\partial u^0}{\partial z}$$

$$\Phi_1(x, t) = \frac{\text{sign}(x-t) a_0}{2a_3'} \left(1 - \frac{b_{11}^{11} a_3'}{12 b_{40}^{11} a_3'} \right) [1 - \text{Im } i \exp(iz_0 L |x-t|/2)]$$

$$\Phi_2(x, t) = \frac{1}{12} \text{Re} \sum_{v=1}^5 id(z_v) \left[\text{ctg} \frac{\omega z_v L (x-t)}{4} - \frac{4}{L \omega z_v (x-t)} \right]$$

$$\Phi_3 = 2 \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^5 \left\{ \left[\left(\frac{R_2}{h} \right)^2 \rho(z_v^k) (k\omega)^{-1} + \frac{1}{12} d(z_v^k) \right] \exp(ik\omega L z_v^k |x-t|/2) - \frac{d(z_v)}{12} \exp(ik\omega L z_v |x-t|/2) \right\} \text{sign}(x-t)$$

$$\Phi_4(x, t) = 2 \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{10} B^{(k)} \left[\left(\frac{R_2}{h} \right)^2 (ik\omega)^5 b_1(z_v^k) + \frac{(ik\omega)^9}{12} b_2(z_v^k) \right] \exp[ik\omega z_v^k (Lx + a_2 + a_3)/2]; \quad b_1(z) = \sum_{i=0}^2 \frac{b_{4i}^{11}}{b_{40}^{11}} z^{5-2i}$$

$$b_2(z) = \sum_{j=0}^4 \frac{b_j^{11}}{b_{40}^{11}} z^{9-2j}; \quad P(z) = b_1(z)/\Delta'(z); \quad d(z) = b_2(z)/\Delta'(z)$$

Условие равновесия ребра даст

$$\int_{-1}^1 q(t) dt = -2P_1/R_2 l \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2), (2.3) решались численно методом Мультипли [6]. После определения контактных усилий механические и электрические величины вычисляются по формулам

$$u_k(x, \beta) = R_2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{j=1}^3 q_j(\alpha_0, \beta) u_{kj}(\alpha, \alpha_0, \beta, \beta_0) d\alpha_0 \quad (2.4)$$

$u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $u_4 = \varphi$, $q_j(\alpha_0, \beta)$ — контактное усилие в точке (α_0, β) от действия нагрузки P_j .

В частности, потенциал электрического поля в оболочке имеет вид

$$\langle \varphi \rangle = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q_1(\alpha_0, \beta) \left[-\frac{Th a_3'}{b_{40}^{11}} \varphi^0 + A_{13} \Psi_1 \right] d\alpha_0 \quad (2.5)$$

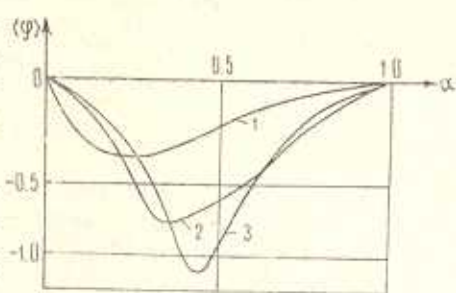
$$\langle \varphi \rangle = \varphi(x, \beta) / V_0; \quad V_0 = b_{40}^{11} P_1 / Th R_2 a_3'$$

На фиг. 2 представлены графики распределения потенциалов электрического поля вдоль оси x для случая заземленных торцов оболочки из пьезокерамики $PZT-5$ [5] при $\beta=0$, $\omega=6$, $R_2/h=50$.

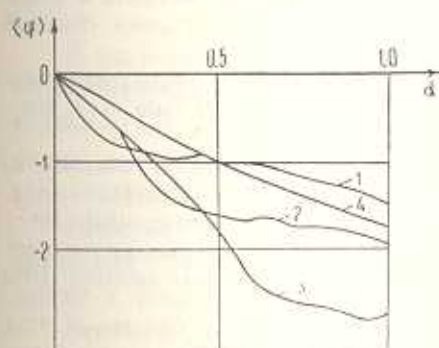
Кривая 1 соответствует $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,4$; кривая 2— $\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$; кривая 3— $\alpha_1=0,4$, $\alpha_2=0,5$ (α_1, α_2 —координаты начала и конца ребра соответственно).

На фиг. 3 представлены распределения потенциала электрического поля для случая 2 при тех же параметрах оболочки. Кривая 1 соответствует $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,4$; кривая 2— $\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$; кривая 3— $\alpha_1=0,6$, $\alpha_2=0,9$; кривая 4— $\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$ ($\beta=\pi/\omega$).

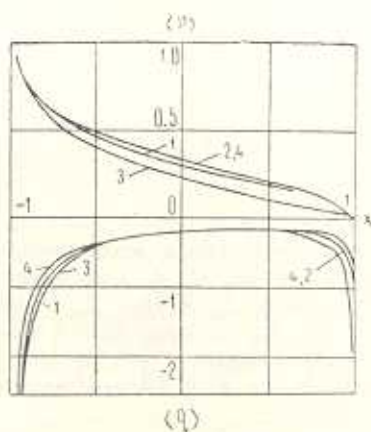
На фиг. 4 представлены кривые относительного усилия в ребре $P(x)/P_1=\langle P \rangle$ и контактного погонного усилия $\langle q \rangle q(x)R_2l_0/2P_1$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Анализ результатов расчета позволяет сделать вывод, что значение потенциала существенно зависит от места расположения ребра. При приближении ребра к свободному краю абсолютная величина потенциала увеличивается.

ԱՌԱՋԱԿԱՆ ԿՈՂՆԵՐԷ ՊՅՆՁՈՎԵՐԱՄԵՎԱԿԱՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹԱՂԱՆԹԻՆ ԲԵՌԻ ՓՈՆԱՆՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ն. Ա. ՆԵՇՏՆԵՍԿԻ, Լ. Ա. ԽԵՅՆԱԿ

Ա մ ֆ ո ֆ ու մ

Գիտարկված է ներդրակի խնդիրը առավելագույն կողից վերջավոր դիս-նալին պլեզոկերամիկական թաղանթին բերի փոխանցման դեպքում: Մի ծայրը ամրակցված, իսկ մյուսը ուժերից ազատ վերջավոր թաղանթի հա-մար կառուցված է Գրինի մատրիցը: Այնուհետև ներդրակի խնդիրը բեր-ված է ինտեգրալ հավասարման, որը լուծված է թվային եղանակով: Հաշվ-ված են էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը, ճիգերը կողում և կոնտակտային ճիգերը՝ ազատ ծայրում տարրեր էլեկտրական պայմանների դեպքում:

LOADING TRANSFER FROM ELASTIC RIBS TO THE FINITE PIEZOELECTRIC SHELL

L. A. PILSHTINSKI, L. A. KHIZNYAK

Summary

The problem concerning loading transfer from elastic ribs to the finite cylinder piezoelectric shell has been examined. Green's matrix has been built for the finite shell secured on one end and free of forces on the other. Then the problem of inclusion is reduced to an integral equation which is solved numerically. The potential field, the forces in the rib and the contact forces for various electrical conditions on the loose end have been defined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григоров Э. И., Толкачев В. М. О передаче усилий от ребер жесткости к цилиндрической оболочке.—В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969, с. 177—181.
2. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие анизотропных оболочек, укрепленных ребрами жесткости.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 5 с. 900—908.
3. Фильштинский Л. А., Хизняк Л. А. Реакция пьезокерамической оболочки на сосредоточенные воздействия.—ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 478—482.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
5. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.—В кн.: Физическая акустика. (Под ред. У. Мезона). Т. 1, ч. А. М.: Мир, 1966, с. 204—326.
6. Каламидия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.

Сумский филиал Харьковского
политехнического института им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
19.XI.1984