ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 2, 1987 Механика

УДК 532.591

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА-КОРТЕВЕГА-де ВРИЗА

ОГАНЯН Г. Г.

Уравнение Бюргерса-Кортевега-де Вриза описывает распространение волн малой, но конечной амплитуды в диспергирующих средах, в которых учтено влияние диссипации. Оно, например, моделирует волновые процессы в химически активных газожидкостных смесях [1—3], звуковые колебания электронной плазмы, магнитогидродинамические ударные волны. Известно, что уравнение Бюргерса описывает структуру слабой ударной волны, а уравнение Кортевега-де Вриза—распространение кноидальных волн и солитонов. Одновременный учет эффектов дисперсии и диссипации рассматривался с точки зрения влияния дисперсии на структуру ударной волны [4], для чего использовалась механическая аналогия с «потенциальной ямой».

В настоящей работе получено точное частное решение, записываемое через эллиптические функции Якоби. Это решение посредством разложения в ряд по малому параметру Якоби удается упростить и привести к тригонометрической форме.

§ 1. Приведение к интегрируемой форме. В системе координат, движущейся с невозмущенной скоростью звука c_0, уравнение Бюргерса-Кортевега-де Вриза имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}-\delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1.1}$$

где u—скорость частиц среды, t—время, x—координата, α, δ, γ—соответственно коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии. Интересуясь стационарными решениями уравнения (1.1), положим $u(x, t)=u(\xi)$, $\xi=x-Vt$, где V—скорость движения фронта ударной волны малой, но конечной амплитуды. Тогда уравнение сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое после интегрирования запишется в виде

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}-\frac{\delta}{\gamma}\frac{du}{d\xi}+\frac{\alpha}{2\gamma}u^2-\frac{V}{\gamma}u+C=0 \tag{1.2}$$

где C—постоянная интегрирования.

Вводя новые переменную s и функцию v

$$s=\left(\frac{\alpha}{12\gamma}\right)^{1/2}\xi,\quad u=\frac{V}{\alpha}+\frac{6}{25}\frac{\delta^2}{\alpha\gamma}-v \tag{1.3}$$

перепишем уравнение (1.2) в виде

$$\frac{d^2v}{ds^2}-5\left(\frac{12\delta^2}{25\alpha\gamma}\right)^{1/2}\frac{dv}{ds}-6v^2+\frac{72\delta^2}{25\alpha\gamma}v+\frac{6V}{\alpha}\left(\frac{V}{\alpha}-\frac{36}{625}\frac{\delta^4}{\alpha\gamma^3}\right)-\frac{12\gamma}{\alpha}C=0$$

Обозначая $12\delta^2(25\alpha\gamma)^{-1}=a^2$ и выбирая постоянную интегрирования

$$C=\frac{V^2}{2\alpha\gamma}-\frac{\alpha}{8\gamma}a^4 \tag{1.4}$$

приведем искомое уравнение к форме уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2v}{ds^2}-5a\frac{dv}{ds}-6v^2+6a^2v=0 \tag{1.5}$$

Отметим, что уравнение (1.5), выведенное из (1.1), совершенно другим методом получено в [5].

§ 2. *Недиссипативный случай* ($\delta=0$). Уравнение (1.5) упростится

$$\frac{d^2v}{ds^2}=6v^2 \tag{2.1}$$

Умножая уравнение (2.1) на dv/ds и интегрируя один раз, получим

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=4v^3-c_1=4(v-b_1)(v-b_2)(v-b_3) \tag{2.2}$$

Здесь c_1—постоянная интегрирования, определяемая из задач с граничными или начальными условиями, b_1, b_2, b_3—корни уравнения $4v^3-c_1=0$, связанные между собой соотношениями

$$b_1+b_2+b_3=0,\quad b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3=0,\quad b_1b_2b_3=-\frac{c_1}{4}$$

Обозначим через b_2 вещественный корень, а b_1, b_3—комплексно-сопряженные корни

$$b_2=\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}},\quad b_1=\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}\,\frac{i\sqrt{3}-1}{2},\quad b_3=\bar{b}_1$$

Интегрируя уравнение (2.2) и далее заменяя переменную интегрирования v на φ

$$v=\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}+\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} \tag{2.3}$$

приведем его к нормальной тригонометрической форме эллиптического интеграла первого рода

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\pm 2\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}(s+c_2),\quad k^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Здесь c_2—постоянная интегрирования, k—модуль интеграла, $0<k<1$. Согласно определению эллиптического косинуса [6, 8], (2.3) можно выразить через эллиптические функции Якоби

$$v=\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}\left[1+\sqrt{3}\,\frac{1+\mathrm{cn}(2z,k)}{1-\mathrm{cn}(2z,k)}\right],\quad z=\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}(s+c_2) \tag{2.4}$$

Отметим, что решение уравнения (2.1) можно записать также через функцию Вейерштрасса [7]: $v=\mathscr{P}(s+c_2, 0, c_1)$, с инвариантами $g_2=0$, $g_3=c_1$. Выражая $\mathscr{P}$ через эллиптические функции Якоби [8], снова придем к решению (2.4). Используя формулу для удвоенных аргументов эллиптического косинуса [6, 8], решение (2.4) можно записать в виде

$$v=\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}\left[1+\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{cn}^2(z,k)}{\mathrm{sn}^2(z,k)\,\mathrm{dn}^2(z,k)}\right],\quad \mathrm{dn}^2 z=1-k^2\mathrm{sn}^2 z$$

где $\mathrm{sn}(z,k)$—эллиптический синус. Согласно известным разложениям в ряд по параметру Якоби q [6], имеем

$$\frac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{sn}(z,k)\,\mathrm{dn}(z,k)}=\frac{\pi}{2K}\left[\mathrm{ctg}\,\frac{\pi z}{2K}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{1+(-1)^n q^n}\sin\frac{n\pi z}{K}\right]$$

$$q=\exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right),\quad K'(k)=K(k'),\quad k'=\sqrt{1-k^2} \tag{2.5}$$

где $K(k)$—полный эллиптический интеграл первого рода, k'—дополнительный модуль интеграла. В рассматриваемой задаче $q\approx 0{,}02$, поэтому проводя соответствующие выкладки, для функции v можно получить выражение

$$v=\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}+\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}\,0{,}966\,\mathrm{ctg}^2(0{,}983\,z)+0(q)$$

Если ввести обозначения $A_1^2=0{,}983\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}$, $B_1=\sqrt{A_1}\,c_2$, выражение для истинной скорости u примет вид

$$u=\frac{V}{\alpha}-\frac{A_1}{0{,}966\sqrt{3}}-A_1\mathrm{ctg}^2\left[\sqrt{\frac{A_1\alpha}{12\gamma}}(x-Vt)+B_1\right] \tag{2.6}$$

Ниже, в п. 3, будет показано, что требование перехода диссипативного решения в решение (2.6) приводит к условию $B_1=\pi n$, так что окончательно получим

$$u=\frac{V}{\alpha}-\frac{A_1}{0{,}966\sqrt{3}}-A_1\mathrm{ctg}^2\left[\sqrt{\frac{A_1\alpha}{12\gamma}}(x-Vt)\right] \tag{2.7}$$

Итак, решение (2.7) представляет собой волну, распространение которой описывается уравнением (2.1). Нетрудно показать, что период такой волны равен

$$T\approx\pi\sqrt{\frac{12\gamma}{A_1\alpha}}$$

§ 3. *Учет диссипации*. Переходя в уравнении (1.5) от s к новой независимой переменной $z=\exp(\alpha s)$, приведем (1.5) к виду

$$a^2z^2\frac{d^2v}{dz^2}-4a^2z\frac{dv}{dz}-6v^2+6a^2v=0 \qquad (3.1)$$

Полагая $v=a^2z^2f(z)$, получим относительно функции $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2f}{dz^2}=6f^2$$

совпадающее по виду с уравнением (2.1). Поэтому точное решение уравнения (3.1) можно записать в виде

$$v=\sqrt[3]{\frac{c_3}{4}}\,a^2e^{2as}\left[1+\sqrt{3}\left(\frac{1+\mathrm{cn}(2\zeta,\,k)}{1-\mathrm{cn}(2\zeta,\,k)}\right)^{1/2}\right],\quad \zeta=\sqrt[4]{3}\,\sqrt[6]{\frac{c_3}{4}}\,(e^{as}+c_4) \qquad (3.2)$$

где c_3, c_4—безразмерные постоянные интегрирования, значения модуля k приведено в п. 2. Отметим, что решение уравнения (1.5) можно также записать через функцию Вейерштрасса [7] с инвариантами $g_2=0$, $g_3=-1$:

$$v=a^2c_5^2e^{-2as}\mathcal{P}(c_5e^{-as}+c_6,\ 0,\ -1)$$

Постоянные интегрирования c_5 и c_6 связаны с c_3 и c_4 несложными соотношениями, которые здесь не приводим. Используя известные формулы перехода от $\mathcal{P}$ к эллиптическим функциям Якоби [8], снова придем к решению (3.2). Согласно формуле для удвоенного аргумента эллиптических функций [6, 8], полученное решение можно выразить через истинную скорость u по формуле (1.3)

$$u(\xi)=\frac{V}{\alpha}+\frac{6\delta^2}{25\alpha\gamma}-\sqrt[3]{\frac{c_3}{4}}\,\frac{12\delta^2}{25\alpha\gamma}\,e^{2as}\left[1+\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{cn}^2(\zeta,\,k)}{\mathrm{sn}^2(\zeta,\,k)\,\mathrm{dn}^2(\zeta,\,k)}\right] \qquad (3.3)$$

Для дальнейшего сравнения решений (3.3) и (2.6) выберем постоянные c_3 и c_4 следующим образом:

$$c_3=\left(\frac{25\alpha\gamma}{12\delta^2}\right)^3c_1,\quad c_4=-1$$

Тогда, используя формулы (2.5), решение (3.3) можно упростить до вида

$$u(\xi)=\frac{V}{\alpha}+\frac{6\delta^2}{25\alpha\gamma}-\frac{A_1}{0{,}966\sqrt{3}}\exp\left(\frac{2}{5}\frac{\delta}{\gamma}\xi\right)-A_1\mathrm{ctg}^2\left[\sqrt{\frac{25\alpha\gamma}{12\delta^2}A_1}\left(\exp\left(\frac{\delta}{5\gamma}\xi\right)-1\right)\right] \qquad (3.4)$$

Как видно из решения (3.4), учет диссипации приводит к тому, что волновой процесс, описываемый уравнением (1.5), является апериодическим. В предельном случае отсутствия диссипации разложим экспоненту в ряд по степеням δ/γ и далее устремим δ к нулю. Тогда (3.4) перейдет в решение (2.6), в котором необходимо положить $B_1=\pi n$, то есть в решение (2.7). Таким образом, требование перехода диссипативного решения в недиссипативное ($\delta\to 0$) приводит к необходимости определения лишь одной постоянной интегрирования.

ԲՅՈՒՐԳԵՐՍ-ԿՈՐՏԵՎԵԳ-ԴԵ ՎՐԻԶԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԵԿ ՄԱՍՆԱՎՈՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Տարբեր միջավայրերում ալիքների տարածումը դիսիպացիայի էֆեկտների առկայությամբ նկարագրվում է Բյուրգերս-Կորտևեգ-դե Վրիզի հավասարումով։ Յակոբիի էլիպտական ֆունկցիաների միջոցով գտնված է այդ հավասարման ճշգրիտ մասնակի լուծումը, որը վերլուծելով շարքի ըստ ճակոբիի փոքր պարամետրի, բերվում է համեմատաչափական տեսքի։ Ցույց է տրված, որ դիսիպացիայի էֆեկտի հաշվառումը բերում է ալիքային պրոցեսի ոչ պարբերական զանձալման։

ON PARTIAL SOLUTION OF THE BURGER-KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

G. G. OHANIAN

Summary

The Burger-Korteweg-de Vries equation describes the propagation of waves of small amplitude in the media with dissipation and disperse effects. The exact partial solution is obtained which is defined by means of Jacobi elliptic functions. It has been shown that dissipation effect brings about aperiodic wave process.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.* Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, №5, с. 71—76.
2. *Оганян Г. Г.* О распространении возмущений в химически активной жидкости, содержащей пузырьки газа.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, 31, №3, с. 49—62.
3. *Губайдулин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.* Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, №2, с. 78—86.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
5. *Kalinowski M. N., Grundland M.* An exact solution of the Korteweg-de Vries equation with dissipation.—Lett. in Math. Physics, 1981, v. 5, p. 61—65.
6. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
8. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
22.XI.1985