ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 2, 1987 Механика

УДК 539.3.01

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЛОИСТЫХ БАЛОК

ХАЧАТРЯН А. М.

Напряженно-деформированное состояние слоистых тонких тел, как и в случае однородных, состоит из внутреннего и типа пограничного слоя состояний. Решение типа пограничного слоя экспоненциально затухает при удалении от края, а показатель экспоненты определяется из характеристического трансцендентного уравнения.

В работе [1] асимптотическим методом построено решение внутренней задачи слоистых балок. Там же приведен обзор работ по методам расчета многослойных конструкций.

В статье [2] асимптотическим методом построен пограничный слой вблизи свободного края слоистой пластинки, составленной из чередующихся несущих и слабых слоев. Выявлена зависимость скорости затухания напряженного состояния погранслоя от относительной жесткости слоев. В работе [3] исследовано поведение первых корней характеристических уравнений потенциального и вихревого решений задач изгиба и растяжения трехслойной плиты.

В настоящей работе строится решение типа пограничного слоя для слоистых анизотропных балок. Исследуется поведение первого корня характеристического уравнения в зависимости от геометрических и физических параметров. С этим корнем, в основном, связана скорость затухания погранслоя.

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния типа пограничного слоя в плоской задаче для анизотропной слоистой полосы—прямоугольника длиной a, общей толщиной $2h$ ($2h \ll a$). Слои имеют различные толщины h_k и коэффициенты упругости a_{ij}. Полоса состоит из $N+M$ слоев, N и M—число слоев, расположенных над координатной линией и под этой линией, соответственно. Предполагается, что на продольных сторонах балки отсутствуют напряжения, а на торцах могут быть заданы различные условия.

Для построения погранслоя вблизи торца $x=0$ в уравнениях теории упругости сделаем замену переменных

$$t=x/h, \quad \zeta=y/h \tag{1.1}$$

Решение вновь полученных уравнений ищется в виде функций типа пограничного слоя [4]

$$R_p^{(k)}=\sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{\chi_p^{(k)}+s} R_p^{(ks)}(\zeta)\exp(-\lambda t) \tag{1.2}$$

где $R_p^{(k)}$—любое из напряжений и перемещений, $\varepsilon = h/a$—малый параметр, $\varkappa_p^{(s)}$—показатель интенсивности, $\lambda = \mathrm{const}$—характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния, k—номер слоя. Непротиворечивые значения $\varkappa_p^{(k)}$ задаются следующим образом [4]:

$$\varkappa_{\sigma_i}^{(k)} = \varkappa, \quad \varkappa_{u_i}^{(k)} = \varkappa + 1 \tag{1.3}$$

здесь σ_i—любое из напряжений, u_i—любое из безразмерных перемещений. Подставив (1.2) в уравнения теории упругости, с учетом (1.3) получим систему, интегрируя которую по ζ будем иметь

$$\sigma_{xp}^{(ks)} = \lambda_n^{-2} F''_{kn} A_n^{(ks)}, \quad \sigma_{xyp}^{(ks)} = \lambda_n^{-1} F'_{kn} A_n^{(ks)}, \quad \sigma_{yp}^{(ks)} = F_{kn} A_n^{(ks)}$$

$$u_p^{(ks)} = -\left(a_{11}^{(k)} \lambda_n^{-3} F''_{kn} + a_{16}^{(k)} \lambda_n^{-2} F'_{kn} + a_{12}^{(k)} \lambda_n^{-1} F_{kn}\right) A_n^{(ks)} \tag{1.4}$$

$$v_p^{(ks)} = -\left[a_{11}^{(k)} \lambda_n^{-4} F'''_{kn} + 2a_{16}^{(k)} \lambda_n^{-3} F''_{kn} + \left(a_{12}^{(k)} + a_{66}^{(k)}\right) \lambda_n^{-2} F'_{kn} + a_{26}^{(k)} \lambda_n^{-1} F_{kn}\right] A_n^{(ks)}$$

Функции $F_{kn}(\zeta)$ удовлетворяют уравнению

$$a_{11}^{(k)} F_{kn}^{\mathrm{IV}} + 2\lambda_n a_{16}^{(k)} F'''_{kn} + \lambda_n^2 \left(a_{66}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)}\right) F''_{kn} + 2\lambda_n^3 a_{26}^{(k)} F'_{kn} + \lambda_n^4 a_{22}^{(k)} F_{kn} = 0 \tag{1.5}$$

и условиям

$$F_{Nn}(\zeta_N) = F'_{Nn}(\zeta_N) = 0; \quad F_{-Mn}(\zeta_{-M}) = F'_{-Mn}(\zeta_{-M}) = 0 \tag{1.6}$$

являющимся следствием условий $\sigma_{xyp} = \sigma_{yp} = 0$ при $\zeta = \zeta_N, \zeta_{-M}$. При этом удовлетворяются условия упругого контакта при $\zeta = \zeta_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, N-1, -1, -2, \ldots, -M+1)$. Здесь принято

$$\zeta_{\pm k} = \pm \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{k} h_{\pm i}$$

В зависимости от вида корней соответствующего (1.5) характеристического уравнения [5]

$$\text{а)}\ \alpha_k + i\beta_k, \quad \alpha_k - i\beta_k, \quad \text{б)}\ \alpha_{1k} + i\beta_{1k}, \quad \alpha_{2k} + i\beta_{2k} \tag{1.7}$$

возможны различные решения задачи (1.5)—(1.6).

Исследование напряженно-деформированного состояния типа пограничного слоя слоистых балок и его затухания в общем случае сложно и связано с большими трудоемкими выкладками. Здесь мы ограничимся рассмотрением двухслойной балки из изотропных слоев, что даст качественную картину исследуемой проблемы. Аналогичное исследование можно провести и для других случаев.

2. Пусть имеем двухслойную балку из изотропных слоев, верхний слой которой характеризуется упругими коэффициентами E_1, ν_1, а нижний слой—коэффициентами E_2, ν_2 и соответственно, имеют толщины, равные h_1 и h_2. Ось Ox направим по линии раздела этих слоев. Характеристическое уравнение (1.5) имеет двухкратные мнимые корни [5]. Удовлетворив граничным условиям (1.6), а также условиям контакта, получим

$$F_{1n} = \frac{1}{D_{11}} \left(D_{11} \cos\lambda_n\zeta + D_{12}\zeta \cos\lambda_n\zeta + D_{13} \sin\lambda_n\zeta + D_{14}\zeta \sin\lambda_n\zeta\right)$$

$$F_{2n}=\frac{1}{D_{11}}\sum_{i=1}^{4}(D_{1i}\Delta_{i1}\cos\lambda_n\zeta+D_{1i}\Delta_{i2}\zeta\cos\lambda_n\zeta+D_{1i}\Delta_{i3}\sin\lambda_n\zeta+D_{1i}\Delta_{i4}\zeta\sin\lambda_n\zeta) \quad (2.1)$$

где D_{1i}—алгебраические дополнения первой строки матрицы $D=\|d_{ij}\|$ четвертого порядка с элементами

$$d_{11}=\cos\lambda_n\zeta_1,\quad d_{12}=\zeta_1\cos\lambda_n\zeta_1,\quad d_{13}=\sin\lambda_n\zeta_1,\quad d_{14}=-\zeta_1\sin\lambda_n\zeta_1$$

$$d_{21}=-\lambda_n\sin\lambda_n\zeta_1,\quad d_{22}=\cos\lambda_n\zeta_1-\lambda_n\zeta_1\sin\lambda_n\zeta_1$$

$$d_{23}=\lambda_n\cos\lambda_n\zeta_1,\quad d_{24}=\sin\lambda_n\zeta_1+\lambda_n\zeta_1\cos\lambda_n\zeta_1$$

$$(2.2)$$

$$d_{3i}=\Delta_{i1}\cos\lambda_n\zeta_2+\Delta_{i2}\zeta_2\cos\lambda_n\zeta_2+\Delta_{i3}\sin\lambda_n\zeta_2+\Delta_{i4}\zeta_2\sin\lambda_n\zeta_2$$

$$d_{4i}=-\Delta_{i1}\lambda_n\sin\lambda_n\zeta_2+\Delta_{i2}(\cos\lambda_n\zeta_2-\lambda_n\zeta_2\sin\lambda_n\zeta_2)+\Delta_{i3}\lambda_n\cos\lambda_n\zeta_2+$$

$$+\Delta_{i4}(\sin\lambda_n\zeta_2+\lambda_n\zeta_2\cos\lambda_n\zeta_2),\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\Delta_{11}=1,\quad \Delta_{22}=0{,}5\alpha_1,\quad \Delta_{23}=\Delta_{41}=0{,}5\lambda_n\alpha_2$$

$$\Delta_{33}=0{,}5\alpha_4,\quad \Delta_{32}=0{,}5\lambda_n^{-1}\alpha_3,\quad \Delta_{44}=E_0=E_2/E_1$$

$$\Delta_{12}=\Delta_{13}=\Delta_{14}=\Delta_{21}=\Delta_{24}=\Delta_{31}=\Delta_{34}=\Delta_{41}=\Delta_{42}=\Delta_{43}=0$$

$$\alpha_1=1+\nu_2+E_0(1-\nu_1),\quad \alpha_2=1+\nu_2-E_0(1+\nu_1)$$

$$\alpha_3=1-\nu_2-E_0(1-\nu_1),\quad \alpha_4=1-\nu_2+E_0(1+\nu_1)$$

Собственные числа λ_n определяются из трансцендентного уравнения $D(z)=\det\|d_{ij}\|=0$, которое имеет вид

$$D(z)=a_1\sin z\sin mz+a_2\cos z\cos mz+(a_3+a_4z^2)\cos z+$$

$$+(a_5+a_6z^2)\cos mz+a_7z^4+a_8z^2+a_9=0 \quad (2.3)$$

где

$$z=2\lambda_n\zeta_1,\quad m=-\zeta_2/\zeta_1=h_2/h_1,\quad \zeta_1=h_1/h,\quad \zeta_2=-h_2/h,\quad a_1=32E_0\zeta_1^4$$

$$a_2=-4\zeta_1^4(\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1+2E_0\alpha_4),\ a_3=-4\zeta_1^4(\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1-2E_0\alpha_4)+16E_0\alpha_3\zeta_1^4\zeta_2^2$$

$$a_4=-2\alpha_2(\alpha_4+2)\zeta_1^2,\ a_5=-4\zeta_1^4(\alpha_2\alpha_3-2\alpha_1+2E_0\alpha_4)-16\alpha_3\zeta_1^6,\ a_6=2\alpha_2(\alpha_1+2E_0)\zeta_1^2,$$

$$a_7=\alpha_2^2,\quad a_8=4\zeta_1^2(\alpha_2^2-2E_0\alpha_1\zeta_2^2-2\alpha_4\zeta_1^2+8E_0\zeta_1\zeta_2)$$

$$a_9=4\zeta_1^4(-\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1+2E_0\alpha_4)+16\alpha_3(E_0\zeta_2^2-\zeta_1^2)\zeta_1^4 \quad (2.4)$$

Если слои имеют одинаковые свойства, то есть $E_0=1$, $\zeta_1=-\zeta_2=1$, то $\alpha_1=\alpha_4=2$, $\alpha_2=\alpha_3=0$ и уравнение (2.3) превращается в известные уравнения

$$\sin 2\lambda+2\lambda=0 \quad (2.5)$$

$$\sin 2\lambda-2\lambda=0 \quad (2.6)$$

которые соответствуют симметричному и кососимметричному задачам однослойных изотропных полос и пластин [4].

К уравнениям (2.3), (2.5), (2.6) можно применять теорию определения асимптотических корней уравнений типа квазиполиномов [6]. Расположение этих корней практически определяется только несколькими членами характеристического уравнения. Асимптотические корни определяются по формуле [6]

$$2\lambda_n^{(j)}=0{,}5(1+m)\operatorname{ctg}\varphi_j\{[(2n-0{,}5)\pi+\arg Z_j]+i\ln|2\pi n Z_j^{-1}\operatorname{ctg}\varphi_j|\} \quad (j=1,2,3,4) \tag{2.7}$$

Формула (2.7) достаточно точно определяет значения комплексных корней для больших n, а для меньших n, то есть для первых корней, она дает приближенные значения, которые затем уточняются известными численными методами (например, методом Ньютона или методом наискорейшего спуска).

Уравнение (2.3) в первом квадранте имеет четыре ветви асимптотических корней, соответствующие четырем значениям Z_j и $\operatorname{ctg}\varphi_j$. При этом асимптотика зависит от m. Характер проникания решения типа пограничного слоя во внутрь области определяется, в основном, наименьшим по модулю корнем трансцендентного уравнения из условия $1+\exp(-\operatorname{Re}\lambda_1 l)\approx 1$, где l—ширина зоны затухания. При исследовании первого корня надо следить за первым корнем каждой ветви, поскольку при разных параметрах наименьший корень принадлежит различным ветвям. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательные значения Z_j и $\operatorname{ctg}\varphi_j$.

а) $m<1$, $\operatorname{ctg}\varphi_{1,2}=2$, $Z_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{a_4}{2a_7}}$, $\operatorname{ctg}\varphi_{3,4}=\dfrac{2}{m}$, $Z_{3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{a_2-a_1}{2a_4}}$ (2.8)

Из (2.4) и (2.8) видно, что корни $Z_{1,2}$—вещественные, а $Z_{3,4}$—мнимые при $E_0>\dfrac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$ и $Z_{1,2}$—мнимые, а $Z_{3,4}$—вещественные при $E_0<\dfrac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$.

Тогда по формуле (2.7) находим:

$$\text{при}\quad E_0>\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\qquad \operatorname{Re}(2\lambda_1)=\operatorname{Re}(2\lambda_1^{(1)})=O(1{,}5\pi(1+m)) \tag{2.9}$$

а при $E_0<\dfrac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$

$$\operatorname{Re}(2\lambda_1)=\begin{cases}\operatorname{Re}(2\lambda_1^{(1)})=O(2\pi(1+m)) & \text{при}\quad 0<m<3/4\\ \operatorname{Re}(2\lambda_1^{(3)})=O(1{,}5\pi(1+1/m)) & \text{при}\quad 3/4<m<1\end{cases} \tag{2.10}$$

где через $\operatorname{Re}(2\lambda_1)$ обозначен $\min\operatorname{Re}(2\lambda_1^{(j)})$.

б) $m=1$, $\operatorname{ctg}\varphi_j=2$, Z_j определяются из алгебраического уравнения

$$2a_7Z^4-2(a_4+a_6)Z^2+a_2-a_1=0 \tag{2.11}$$

Независимо от значения E_0 уравнение (2.11) имеет два вещественных и два мнимых корня. Наименьший корень λ_1 соответствует положительному вещественному корню Z_1 уравнения (2.11), а его реальная часть, что следует из формулы (2.7), имеет порядок

$$\operatorname{Re}(2\lambda_1)=O(3\pi) \tag{2.12}$$

в) $m>1$, $\operatorname{ctg}\varphi_{1,2}=\dfrac{2}{m}$, $Z_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{a_6}{2a_7}}$

$$\operatorname{ctg}\varphi_{3,4}=m, \quad Z_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{a_2-a_1}{2a_6}} \tag{2.13}$$

При $E_0<(1+\nu_2)/(1+\nu_1)$ корни $Z_{1,2}$—вещественные, а $Z_{3,4}$—мнимые, а при $E_0>(1+\nu_2)/(1+\nu_1)$ $Z_{1,2}$—мнимые, $Z_{3,4}$—вещественные. По формуле (2.7) находим

$$\text{при } E_0<(1+\nu_2)/(1+\nu_1) \quad \operatorname{Re}(2\lambda_1)=\operatorname{Re}(2\lambda_1^{(1)})=O(1{,}5\pi(1+1/m)) \tag{2.14}$$

при $E_0>(1+\nu_2)(1+\nu_1)$

$$\operatorname{Re}(2\lambda_1)=\begin{cases}\operatorname{Re}(2\lambda_1^{(1)})=O\left(2\pi\left(1+\dfrac{1}{m}\right)\right) & \text{при } m>\dfrac{4}{3}\\ \operatorname{Re}(2\lambda_1^{(3)})=O(1{,}5\pi(1+m)) & \text{при } 1<m<\dfrac{4}{3}\end{cases} \tag{2.15}$$

Трансцендентные уравнения (2.5) и (2.6) хорошо исследованы [7, 8]. Они имеют счетное количество комплексных корней, расположенных симметрично в четырех квадрантах. В работе [8] приведены значения первых пятидесяти корней для уравнения (2.5). Немаловажно знать также их асимптотические представления. По формуле (2.7) находим асимптотические корни

$$2\lambda_n^{*}=(2n-0{,}5)\pi+i\ln(4\pi n), \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.16}$$

$$2\lambda_n^{**}=(2n+0{,}5)\pi+i\ln(4\pi n), \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.17}$$

У первого корня уравнения (2.5) $\operatorname{Re}(2\lambda_1^{*})=4{,}21239$, а у первого корня уравнения (2.6) $\operatorname{Re}(2\lambda_1^{**})=7{,}49768$.

Сравнения, определяемые по формулам (2.9), (2.10), (2.14)—(2.17)— реальные части корней трансцендентных уравнений, соответствующих двухслойной и однослойной балкам, заметим

$$\operatorname{Re}(2\lambda_1)>\operatorname{Re}(2\lambda_1^{*}); \qquad \operatorname{Re}(2\lambda_1)\geqslant\operatorname{Re}(2\lambda_1^{**}) \quad \text{при}$$

$$E_0>\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}, \quad \frac{2}{3}\leqslant m\leqslant 4, \quad \left(E_0<\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}, \quad \frac{1}{4}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}\right) \tag{2.18}$$

Уравнение (2.3), помимо комплексных корней, имеет также конечное число вещественных корней, так как при $z\to\infty$ $D(z)\to+\infty$. Эти корни могут быть определены численными методами. В табл. 1 приведены значения первого положительного вещественного корня, соответствующие различным значениям параметров.

В задаче однородной полосы-прямоугольника характеристическое уравнение имеет только комплексные корни и затухание решения типа пограничного слоя происходит гармонично. Здесь же, кроме комплексных корней, имеются также вещественные корни, вследствие чего затухание может происходить негармонично. При этом, в зависимости от физических и геометрических параметров, пограничный слой в слоистых полосах может затухать как медленнее, так и быстрее по сравнению с однородной полосой, что следует из оценки (2.18) и табл. 1.

Таблица 1

m \ E_0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
0,01	3,6855	3,7137	3,7991	3,9484	4,3141	9,9036
0,02	3,6851	3,7141	3,8018	3,9538	4,3185	9,9392
0,05	3,6792	3,7117	3,8083	3,9712	4,3421	10,0697
0,10	3,6446	3,6870	3,8085	4,0010	4,4047	10,3083
0,20	1,7969	1,8303	2,0159	4,0371	4,5725	9,3635
0,50	1,5007	1,5133	1,5577	1,6693	4,8621	9,1810
1,00	1,4221	1,4370	1,4927	1,6575	2,9971	8,5469
2,00	1,4184	1,4441	1,5639	2,0575	2,9129	0,6860
5,00	1,4704	1,5209	1,7902	2,2507	0,4716	0,9899
10,0	1,4940	1,5491	1,8112	2,2124	1,0981	1,0385
20,0	1,4983	1,5432	1,7832	2,1556	1,1654	1,0940
50,0	1,5190	1,5439	1,7556	2,1035	1,2042	1,1081
100	1,1836	1,1836	1,9726	2,0826	1,2174	1,1441

Найденное в работе решение типа пограничного слоя вместе с решением внутренней задачи [1], позволяют более точно удовлетворять условиям на торцах. Сопряжение этих двух типов решений можно осуществить одним из способов, изложенных в [9].

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում, ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով, շերտավոր հեծանի համար կառուցված է սահմանային շերտի տիպի լուծում, որը միաժամանակ առաձգականության տեսության հավասարումների ճշգրիտ լուծումն է։ Քննարկված է սահմանային շերտի տիպի լուծումների մարման բնույթը՝ կախված առաձգական գործակիցների և շերտերի հաստությունների հարաբերություններից։ Ցույց է տրված, որ բնութագրիչ հավասարումը ունի ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս արմատներ։ Կոմպլեքս արմատների որոշման համար գտնված է ասիմպտոտիկ բանաձև։

THE BOUNDARY LAYER OF A SANDWICH-TYPE BEAM

A. M. KHACHATRIAN

Summary

By means of the asymptotic method the boundary layer type solution for a sandwich-type beam is constructed which is also exactly the solution of elasticity theory. The analysis of boundary layer solution depending upon ratio of elastic coefficients and layer thickness is examined. It has been shown that the corresponding characteristic equation has both real and complex roots. The asymptotic formula for the calculation of complex roots is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаловян Л. А., Хачатрян А. М.* Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки.— Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1986, т. *39*, №2, с. 3—14.
2. *Гусейн-Заде М. И.* Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин.—М.: Наука, 1970, с. 638—643.
3. *Кадомцев И. Г.* Краевой эффект в трехслойной плите. Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. наук, 1973, №4, с. 35—37.
4. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1973, т. 26, №2, с. 27—43.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961. 248 с.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л.: Изд. АН СССР. 1963. 367 с.
8. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.—М.: Наука, 1966, с. 251—254.
9. *Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М.* О некоторых плоских задачах для ортотропной полосы.—Уч. записки ЕГУ, 1977, №2, с. 20—26.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
5.VIII. 1985