

УДК 532.516

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ
 НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ЦЕЛЬЮ УМЕНЬШЕНИЯ
 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ

БРУТЯН М. А., КРАПИВСКИЙ П. Л.

1. *Управление нормальной скоростью.* Пусть тело S обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U на бесконечности. Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти такое распределение скоростей отсоса (вдува) по поверхности тела, при котором скорость диссипации энергии D минимальна. Диссипация характеризует потери механической энергии, переходящие в конце концов в тепло. Поэтому D является естественной характеристикой эффективности устройства, управляющего отсосом (вдувом). Другой разумной характеристикой эффективности устройства является, казалось бы, сопротивление X , испытываемое телом S . Например, в задаче об оптимальном управлении формой тела заданного объема (в отсутствии отсоса) наличие связи D и X [1]

$$D = X \cdot U \quad (1.1)$$

показывает, что эти характеристики гидродинамического совершенства формы тела фактически эквивалентны. Однако, в рассматриваемой нами задаче изменение граничных условий приводит к тому, что формула (1.1) становится неприменимой. Как будет показано ниже, задача о минимуме сопротивления в этом случае имеет тривиальное решение с бесконечной тягой ($X \rightarrow -\infty$), так что естественной характеристикой эффективности устройства является именно D .

Уравнения движения жидкости, граничные условия и минимизируемый функционал имеют вид

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}|_S = W\mathbf{n}, \quad \mathbf{v}|_\infty = U \quad (1.3)$$

$$D(W) = \frac{\mu}{2} \int_0 \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 d^3x \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{v} —скорость жидкости, ρ —плотность, p —давление, μ —динамическая вязкость, W —скорость отсоса (вдува), G —внешность тела S , \mathbf{n} —единичный вектор внешней нормали.

Будем считать, что полный расход жидкости через поверхность тела задан и равен Q .

$$\int_S W dS = Q \quad (1.5)$$

2. *Условия оптимальности.* Для получения необходимого условия оптимальности сформулированной задачи (1.2)—(1.5) воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим расширенный функционал

$$J = D + \int_G \{ \mathbf{v}^* \cdot [\mu \Delta \mathbf{v} - \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \nabla p] + p^* \nabla \cdot \mathbf{v} \} d^3x + \lambda \left(\int_S W dS - Q \right) \quad (2.1)$$

Здесь $\lambda = \text{const}$ — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (1.5) изопериметрического типа; $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x})$, $p^* = p^*(\mathbf{x})$ — множители Лагранжа, являющиеся функциями в области G , которые соответствуют дифференциальным связям (1.2). Сходный подход к решению других задач математической физики изложен в монографиях [2–5], поэтому вывод необходимого условия оптимальности приведем в сжатой форме.

Первая вариация функционала J вычисляется согласно правилу варьирования контурных и объемных интегралов и после громоздких преобразований с использованием формулы Гаусса-Остроградского приводится к виду

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_S \left(\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda \right) \delta W dS + \int_G \delta p \nabla \cdot \mathbf{v}^* d^3x + \\ & + \int_G \{ \mu \Delta \mathbf{v}^* - \nabla p^* + \rho [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}^* - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}^*] - 2\mu \Delta \mathbf{v} \} \cdot \delta \mathbf{v} d^3x \end{aligned} \quad (2.2)$$

При выводе (2.2) необходимо учитывать граничные условия (1.3). Вообще говоря, при составлении расширенного функционала (2.1) можно было присоединить соответствующие (1.3) поверхностные интегралы. Однако, достаточно варьировать (2.1) и учитывать, что на поверхности тела вариации скорости течения $\delta \mathbf{v}$ и скорости отсоса (вдува) δW связаны соотношением

$$\delta \mathbf{v}|_S = n \delta W$$

Отметим также, что в (2.2) опущены поверхностные интегралы, учет которых при выводе условий оптимальности приводит к естественным однородным граничным условиям на «сопряженную скорость» \mathbf{v}^* .

Таким образом, в силу произвольности вариаций δW , $\delta \mathbf{v}$ и δp из (2.2) окончательно получаем необходимое условие оптимальности:

в области течения

$$\mu \Delta \mathbf{v}^* - \nabla p^* + \rho [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}^* - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}^*] - 2\mu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0, \quad \mathbf{v}^*|_S = \mathbf{v}^*|_s = 0 \quad (2.3)$$

на поверхности тела

$$\left(\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda \right) \Big|_S = 0 \quad (2.4)$$

Здесь ∇v — тензор с компонентами $(\nabla v)_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, так что $(\nabla v) \cdot v^*$ — вектор с компонентами $[(\nabla v) \cdot v^*]_i = \sum_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \cdot v_j^*$.

Необходимое условие оптимальности (2.3), (2.4) в случае нулевого расхода $Q=0$ ранее было получено несколько иным методом в работе [6]. Отметим также, что «сопряженная» краевая задача (2.3) для множителей Лагранжа v^* , p^* возникает и при решении других вариационных задач в вязкой несжимаемой жидкости [7, 8], а собственно условие оптимальности — условие типа (2.4) — отражает специфику каждой конкретной задачи.

Полученное выражение для первой вариации (2.2) можно использовать для построения эффективного численного алгоритма решения рассматриваемой вариационной задачи. Алгоритм предлагаемого итерационного метода состоит из следующих операций:

- 1) выбирается начальное приближение для распределения скорости отсоса (вдува);
- 2) решается «прямая» краевая задача (1.2), (1.3). Запоминаются значения скоростей v и W ;
- 3) решается «сопряженная» краевая задача (2.3). Запоминаются значения множителей Лагранжа v^* и p^* . При этом выражение (2.2) для первой вариации принимает вид

$$\delta J = \int_S \left(\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda \right) \delta W dS \quad (2.5)$$

- 4) задается некоторое значение постоянной λ , соответствующее заданию ограничения на Q и пп. 2, 3 повторяются для нового распределения скорости отсоса (вдува), которое определяется по формуле

$$W_{\text{нов}} = W_{\text{стар}} + \delta W, \quad \delta W = -\gamma(S) \left(\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda \right) \quad (2.6)$$

где $\gamma(S)$ — произвольная неотрицательная функция, определенная на поверхности тела. Выбор улучшающей вариации в виде (2.6) на каждом шаге приводит к уменьшению функционала J , поскольку формула для первой вариации (2.5) после подстановки выражения для δW принимает вид

$$\delta J = - \int_S \gamma(S) \left[\mu \frac{\partial v_n^*}{\partial n} - p^* - 4\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} + \lambda \right]^2 dS \leq 0$$

При этом на каждой итерации вычисляется значение функционала диссипации (1.4). Последовательность операций пп. 2, 3 вы-

полняется до тех пор, пока величина невязки $D(W_{i-1}) - D(W_i)$ не станет меньше некоторого наперед заданного положительного числа ε .

Использование указанной градиентной процедуры предполагает наличие быстрых методов решения прямой и сопряженной краевых задач. Для течения идеальной жидкости или газа наличие таких методов позволило решить ряд задач с использованием указанного алгоритма, например, задачу максимизации критического числа Маха при обтекании симметричного профиля крыла [9]. В рассматриваемом случае течения вязкой жидкости существующие пока методы численного решения уравнений Навье-Стокса (1.2) являются весьма медленными и, к тому же, они работают в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса ($Re < 10^3$) [10]. Опыт проведения подобных расчетов в идеальном газе [9] показал, что необходимое число итераций при $\varepsilon = 10^{-4}$ составляет обычно несколько десятков, поэтому даже при $Re < 10^3$ время численного решения оптимальных задач в вязкой жидкости на сегодняшний день недопустимо велико.

3. *Приближение Стокса.* Сделанный выше вывод о сложности численного решения относится к решению оптимальных задач в рамках полных уравнений Навье-Стокса. Если упростить исходные уравнения движения жидкости, то решение может существенно упроститься. Наиболее важным с практической точки зрения является приближение больших чисел Re (приближение Прандтля). В этом приближении предполагается, что поперечная скорость в пограничном слое мала по сравнению с продольной. Интуитивно ясно, что при решении оптимальной задачи в рамках уравнений Навье-Стокса поперечная и продольная скорости будут иметь одинаковый порядок (во всяком случае для плохообтекаемых тел). Поэтому сформулированная вариационная задача при $Re \rightarrow \infty$ должна рассматриваться в рамках полных уравнений Навье-Стокса, если не введены дополнительные ограничения на максимальную скорость отсоса (вдува).

Другим важным упрощением исходных уравнений является приближение малых чисел Re (приближение Стокса). В этом случае сформулированная вариационная задача при $Re \rightarrow 0$ может рассматриваться в рамках уравнений Стокса, так как никакие предположения, необходимые для вывода уравнений Стокса, при этом не нарушаются.

В приближении Стокса сопряженная краевая задача (2.3) принимает вид

$$\mu \Delta \mathbf{v}^* = \nabla(p^* + 2p), \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0, \quad \mathbf{v}^*|_S = \mathbf{v}^0|_S = 0 \quad (3.1)$$

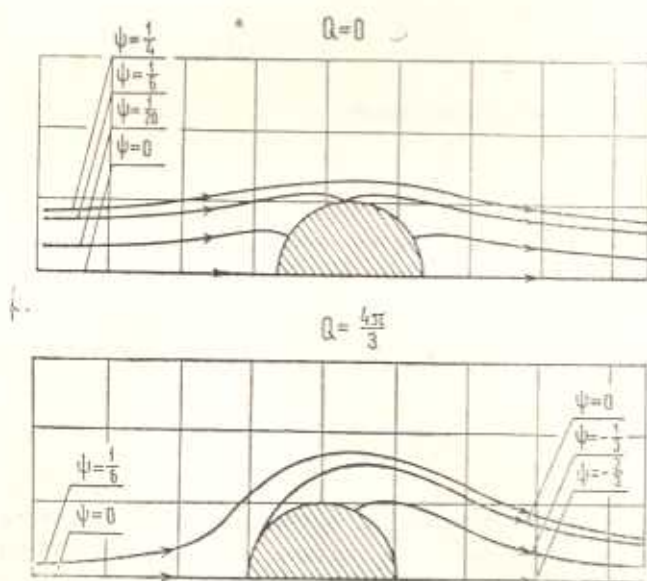
Задача (3.1) имеет только тривиальное решение $\mathbf{v}^* = 0, p^* = -2p + \text{const}$, впервые найденное в работе [11]. В результате необходимое условие оптимальности (2.4) приобретает исключительно простой вид

$$\left(p - 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) \Big|_S = \text{const} \quad (3.2)$$

Для примера найдем оптимальное распределение скорости отсоса (вдува) по поверхности сферы единичного радиуса, центр которой находится в начале сферической системы координат (r, θ, φ) . Ввиду линейности уравнений Стокса искомое решение можно представить в виде суммы решения, полученного в [6] при $Q=0$ и решения типа источника интенсивности Q , расположенного в центре сферы. Действительно, для решения [6] выполняются условия оптимальности (3.2), а для источника из соображений симметрии p и $\partial V_n/\partial n$ постоянны на поверхности сферы, так что условие (3.2) также выполняется. Тогда искомое решение приобретает вид

$$W = \frac{V}{3} \cos\theta + \frac{Q}{4\pi}, \quad D = \nu \left(\frac{Q^2}{\pi} + \frac{16\pi V^2}{3} \right) \quad (3.3)$$

Картина линий тока около сферы при оптимальном законе отсоса (вдува) показана на фиг. 1 при $Q=0$ и $Q = \frac{4\pi}{3} V$. Из (3.3) видно, что абсолютный минимум D достигается при $Q=0$ и равен $D = \frac{16\pi}{3} \nu U^2$. Другое точное решение оптимальной задачи в про-



Фиг. 1

тивоположном предельном случае $Re \rightarrow \infty$ недавно получено в работе [12]. Отметим, что подобного рода точные решения будут весьма полезны и при численном решении оптимальных задач в рамках уравнений Навье-Стокса, так как они могут служить начальным приближением для искомого решения, а также использоваться для оценки точности численных схем.

4. *Минимизация сопротивления.* Задача уменьшения сопротивления является одной из важнейших задач аэродинамики, причем управление отсосом (вдувом) представляется одним из наиболее перспективных направлений решения этой проблемы [13]. Однако, в рассматриваемой постановке задача о минимуме сопротивления имеет только тривиальное решение с бесконечной тягой. Покажем это на примере обтекания сферы стоксовой жидкостью. Известно однопараметрическое семейство решений этой задачи [14]

$$v = U - A \frac{U + n(U \cdot n)}{r} + (1-A) \frac{3n(U \cdot n) - U}{r^3} \quad (4.1)$$

$$p = p_\infty - 2A \frac{(U \cdot n)}{r^2}, \quad W = (3-4A)(U \cdot n)$$

Решение (4.1) удовлетворяет уравнениям Стокса, условиям на бесконечности и условию прилипания касательной скорости. Семейство (4.1) содержит, в частности, известное решение Стокса обтекания сферы с условиями прилипания на поверхности ($A=3/4$) и приведенное выше оптимальное решение (3.3) при $Q=0$ ($A=2/3$). Сопротивление X , равное

$$X = \int_S \sum_j \sigma_{ij} dS_j, \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

для решения (4.1) дается формулой

$$X = 8\pi\mu AU$$

так что при $A \rightarrow -\infty$ $X \rightarrow -\infty$. Из (4.1) видно, что скорость отсоса (вдува) W при этом оказывается неограниченной. Поэтому представляется правдоподобным, что наложение дополнительного ограничения на W приведет к тому, что задача о минимуме сопротивления станет нетривиальной. Разумным ограничением на W является величина интеграла

$$\int_S W^2 dS = N \quad (4.2)$$

которая характеризует мощность, затрачиваемую на отсос (вдув).

Законченные результаты в задаче уменьшения сопротивления удалось получить только для стоксовой жидкости. Разберем детальнее случай обтекания сферы. Как известно, одна и та же вариационная задача часто допускает различные способы решения. Приведенный ниже метод решения существенно отличается от использованного в предыдущих разделах. С идейной точки зрения этот метод близок к известному решению Гуренца [15] изопериметрической задачи о теле минимального периметра при заданной площади.

Оптимальное решение, которое предполагается осесимметричным, ищем в виде

$$\psi(r, \zeta) = r^2 J_2(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^{1-n} + D_n r^{3-n}) J_n(\zeta) \quad (4.3)$$

$$u(r, \zeta) = P_1(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^{1-n} + D_n r^{1-n}) P_{n-1}(\zeta) \quad (4.4)$$

$$v(r, \zeta) = -\frac{2J_2(\zeta)}{\sin\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)B_n r^{1-n} + (n-3)D_n r^{1-n}] \frac{J_n(\zeta)}{\sin\theta} \quad (4.5)$$

$$\frac{p(r, \zeta)}{\mu} = -\frac{2D_1}{r} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-3}{n} D_n r^{-n} P_{n-1}(\zeta) \quad (4.6)$$

Здесь $P_n(\zeta)$ — полиномы Лежандра; $J_n(\zeta) = \frac{P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)}{2n-1}$; $\zeta = \cos\theta$. Ре-

шение (4.3) — (4.6) является частным случаем общего осесимметричного решения [16] уравнений Стокса, в котором выполнено граничное условие на бесконечности и условие отсутствия особенностей в поле течения. Заметим, что единицы измерения выбраны таким образом, что скорость на бесконечности равна $(\cos\theta, -\sin\theta, 0)$, а радиус сферы равен единице.

На поверхности сферы должно выполняться условие $v|_{r=1} = 0$. Поэтому из (4.5) имеем

$$D_1 = 0, \quad B_2 - D_2 = 2, \quad B_n + \frac{n-3}{n-1} D_n = 0, \quad n \geq 3 \quad (4.7)$$

$$Q = 2\pi \int_{-1}^1 W d\zeta = 4\pi B_1$$

$$N = 2\pi \int_{-1}^1 W^2 d\zeta = 4\pi B_1^2 + \frac{4\pi}{3} (1 + B_2 + D_2)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4\pi}{2n-1} (B_n + D_n)^2$$

Используя (4.7), получаем окончательное выражение для мощности

$$N = \frac{Q^2}{4\pi} + \frac{4\pi}{3} (3 + 2D_2)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{16\pi}{(n-1)^2 (2n-1)} D_n^2 \quad (4.8)$$

Для решения (4.3) — (4.5) сопротивление дается формулой $X = 4\pi\mu D_2$ [16], поэтому из (4.8) немедленно следует, что минимум сопротивления при заданных Q и N реализуется на решении, в котором $D_n = 0$ при $n \geq 3$. Окончательно оптимальное решение принимает вид

$$\Psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{K-3}{2r} + \frac{1+K}{2r^2} \right) - \frac{Q}{4\pi} (1 + \cos\theta) \quad (4.9)$$

$$W = \frac{Q}{4\pi} + K \cos\theta \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) нетрудно получить выражения для X и D

$$X = 6\pi\mu \left(1 - \frac{K}{3} \right) \quad (4.11)$$

$$D = \frac{Q^2}{\pi} \mu + 6\pi\mu \left(K^2 - \frac{2}{3}K + 1 \right) \quad (4.12)$$

Здесь $K = \left(\frac{3N}{4\pi} - \frac{3Q^2}{16\pi^2} \right)^{1/2}$. Тот факт, что подкоренное выражение всегда неотрицательно, легко следует из неравенства Коши-Шварца. Из (4.11) получаем, что при увеличении N сопротивление сферы монотонно уменьшается и при $N \rightarrow \infty$ $X \rightarrow -\infty$. В то же время диссипация (4.12) остается ограниченной снизу, $D \geq \left(\frac{Q^2}{\pi} + \frac{16\pi}{3} \right) \mu$ в полном соответствии с (3.3).

5. *Управление касательной скоростью.* Рассмотрим теперь задачу о минимуме скорости диссипации при управлении касательной скоростью на границе тела S . Вариационная задача формулируется в виде (1.2)–(1.4), где граничное условие (1.3) заменено на $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_S = 0$. Составим расширенный функционал

$$J = D + \int_{\Omega} \{ \mathbf{v}^* \cdot [\mu \Delta \mathbf{v} - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p] + \rho^* \nabla \cdot \mathbf{v} \} d^3x$$

Действуя аналогично случаю управления нормальной скоростью, получаем необходимое условие оптимальности: в области течения вновь получаем сопряженную краевую задачу (2.3), а на поверхности тела

$$(\tau_{ij}^* - 2\tau_{ij})|_S = 0, \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1), \quad j = 1, 2 \quad (5.1)$$

Здесь $\tau_{ij} = \mu(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ — тензор вязких напряжений.

Вновь рассмотрим приближение Стокса. В этом приближении (5.1) принимает вид

$$\tau_{3j}|_S = 0, \quad j = 1, 2 \quad (5.2)$$

так что касательные напряжения в оптимальном решении равны нулю.

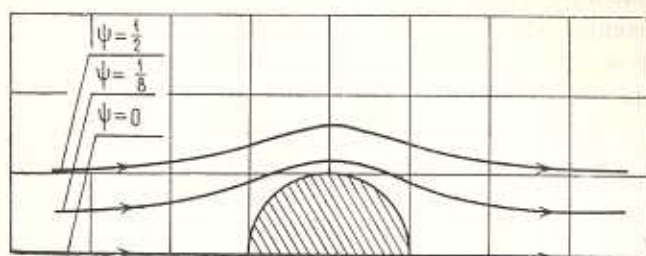
Точное решение оптимальной задачи об обтекании сферы при управлении касательной скоростью находится аналогично случаю управления нормальной скоростью и имеет вид

$$\mathbf{V} = U - \frac{U + \mathbf{n}(U \cdot \mathbf{n})}{2r}, \quad q = -\frac{1}{2}U \sin^2\theta, \quad D = 4\pi\mu U^2 \quad (5.3)$$

Сравним это решение с другими известными решениями задачи обтекания сферы: в задаче Стокса диссипация $D = 6\pi\mu U^2$ в 1,5 раза больше диссипации (5.3), а в задаче обтекания непроницаемой сферы идеальной несжимаемой жидкостью $D = 12\pi\mu U^2$, что в три раза больше, чем (5.3). Картина линий тока около сферы при оптимальном законе управления касательной скоростью изображена на фиг. 2.

Рассмотрим теперь задачу о минимуме сопротивления. Эта задача без дополнительных ограничений имеет, как и в случае отсоса (вдува), лишь тривиальное решение с бесконечной тягой. Поэтому введем ограничение

$$\int_S q^2 dS = M \quad (5.4)$$



Фиг. 2

Найдем точное решение оптимальной задачи для случая стока обтекания сферы тем же методом, что и в разделе 4. Оптимальное решение ищем в виде (4.3)–(4.6). Условие непротекания на поверхности сферы дает

$$B_2 + D_2 + 1 = 0, \quad B_1 + D_1 = 0 \\ B_n + D_n = 0, \quad n > 2$$

В результате касательная скорость q дается выражением

$$q = -(2D_2 + 3) \frac{J_2}{\sin \theta} - \sum_{n=3}^{\infty} 2D_n \frac{J_n}{\sin \theta} \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в (5.4) и используя условие ортогональности [16]

$$\int_{-1}^1 \frac{J_n J_m}{1-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2, & m = n \geq 2 \end{cases}$$

окончательно находим

$$M = 16\pi \left[\frac{(2D_2 + 3)^2}{24} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{D_n^2}{n(n-1)(2n-1)} \right] \quad (5.6)$$

Так как сопротивление дается формулой $X = -4\pi\mu D_2$, то из (5.6) следует, что минимум сопротивления при заданном M реализуется на решении, в котором $D_n = 0$ при $n > 3$. Окончательно оптимальное решение принимает вид

$$\psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{L-3}{2r} + \frac{1-L}{2r^3} \right) \quad (5.7)$$

$$q = -\frac{1}{2} L \sin \theta \quad (5.8)$$

Из (5.7), (5.8) нетрудно получить выражение для X

$$X = 6\pi\mu \left(1 - \frac{L}{3} \right), \quad L = (3M/2\pi)^{1/2}$$

В заключение заметим, что изложенный в разделах 4 и 5 подход к задаче минимизации сопротивления сферы может быть распространен на случай обтекания более сложных осесимметричных тел. Действительно, решение (4.3)—(4.6) является общим осесимметричным решением уравнений Стокса. С его помощью может быть найдено выражение для ограничений типа N или M в виде квадратичной формы от B_n и D_n . Используя граничное условие, эта квадратичная форма может быть редуцирована к формам типа (4.8), (5.6). Далее, как и рассмотренных выше примерах, надо минимизировать сопротивление $X = -4\pi r D_2$ при фиксированном значении полученной квадратичной формы.

ԷՆԵՐԳԵՏԻԿ ԾԱԼՈՒՆԵՐԻ ՓՈՔՐԱՅՄԱՆ ԵՊԱՏԱԿՈՎ ՄԱՍՈՒՅԻԿ
ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀՈՍՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄԸ

Մ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, Պ. Լ. ԿՐԱՊՈՎՍԿԻ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկված է մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի կամայական մարմնի շուրջը հոսքի համար էներգիայի ցրման մինիմում արագության վարիացիոն խնդիրը: Մարմնի մակերևույթից կատարվում է արված ծախսով հեղուկի բաշում (փշում):

Ստացված են օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները և առաջարկված է թվային լուծման ալգորիթմ: Ռեյնոլդսի փոքր թվերի մոտարկումով խնդիրը կեղծ շրջանում ղեկարում լուծված է ճշգրիտ: Շոշափող արագությանների օպտիմալ կառավարման ղեկարի համար լուծված են նաև անալոգ խնդիրներ:

OPTIMAL CONTROL OF VISCOUS FLOW TO DECREASE
ENERGY LOSS

M. A. BRUTIAN, P. L. KRAPIVSKII

S u m m a r y

The problem of the minimum energy dissipation of viscous fluid is considered. It is assumed that normal or tangential velocity is controlled on a surface of an arbitrary body. Necessary optimality conditions are derived. Using the Stokes approach of the optimum control problems, exact solutions are obtained with different isoperimetrical type constraints. According to this approach with an additional constraint on the control device power exact solutions are obtained for the variational problems of the minimum sphere drag.

ЛИТЕРАТУРА

1. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
4. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
5. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
6. Брутян М. А., Крапивский П. Л. Об оптимальном управлении потоком вязкой несжимаемой жидкости.—ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 929—934.
7. Мионов А. А. К задаче оптимизации формы тела в вязкой жидкости.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 103—108.
8. Pironneau O. On the optimum design in fluid mechanics. J. Fluid Mech., 1974, v. 64, part. 1, p. 97—110.
9. Брутян М. А., Ляпунов С. В. Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха. Учен. зап. ЦАГИ, 1981, т. 12, № 3, с. 10—22.
10. Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1980, v. 98, part. 4, p. 819—855.
11. Pironneau O. On optimum profiles in Stokes flow. J. Fluid Mech., 1973, v. 59, part. 1, pp. 117—123.
12. Брутян М. А., Крапивский П. Л. Оптимальное управление вязким потоком при больших числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, № 3, с. 174—181.
13. Чжен П. Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979. 552 с.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 788 с.
15. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. М.: Гостехиздат, 1957. 223 с.
16. Хэппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 63 с.

ЦАГИ

Поступила в редакцию
1.IV.1985