ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա | XL, № 1, 1987 | Механика

УДК 539.3:517.946

НЕУБЫВАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПАРАБОЛЕ

СЛУЦКИЙ А. С.

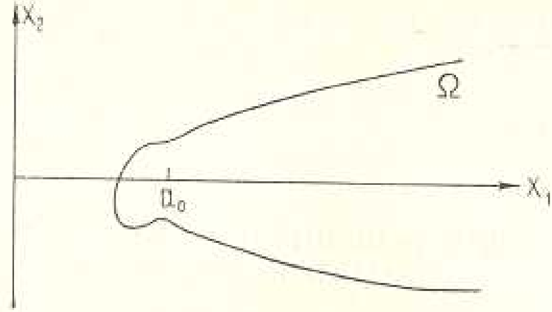
Полные асимптотические разложения решений задач теории тонких пластин построены в статьях [1—3]. В малой окрестности края пластинки возникает явление пограничного слоя. Определение погранслойных членов разложения сводится к решению краевых задах в бесконечных полуполосах [2—4]. При нахождении асимптотического разложения решения задачи об изгибе пластины с острым краем [5], [6] построение погранслоя сводится к нахождению решений первой краевой задачи плоской теории упругости и к задаче об антиплоском сдвиге той же области.

Задача Дирихле для общих эллиптических уравнений в областях типа параболоида и «воронки» изучалась в работе [7]. Для исследования асимптотики в окрестности особой точки границы в [7] производилась замена переменных, переводящая область в полуцилиндр. Коэффициенты операторов после такой замены в окрестности особой точки границы обладают свойством «стабилизации»—стремления к некоторым предельным значениям. Таким образом, задача сводится к изучению сильных (степенных) возмущений оператора с постоянными коэффициентами в цилиндре. Дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами изучались в статьях [8], [9]. Отметим, что результаты работ [8], [9] не применимы к исследованию асимптотики решения задачи Неймана и первой краевой задачи плоской теории упругости, поскольку у возмущенного оператора изменяется кратность собственного числа $\lambda=0$.

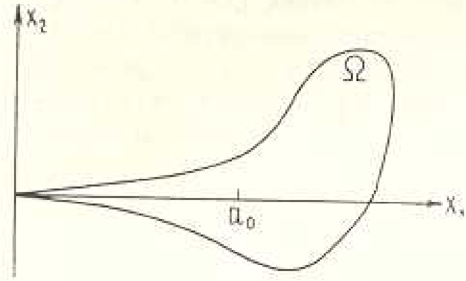
В настоящей работе строится асимптотика решения плоской задачи теории упругости в окрестности изолированной особенности границы типа параболы и заострения (фиг. 1 и 2).

Отметим, что определение неубывающих на бесконечности слагаемых в асимптотическом разложении решений уравнений двумерной теории упругости в параболе позволяет построить функции типа пограничного слоя в асимптотике решения задачи об изгибе тонкой пластины с острым краем.

1. Постановка задачи. Некоторые обозначения. Пусть Ω подобласть на плоскости (x_1, x_2), расположенная в полуплоскости $x_1>0$, множество $\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ x_1\leqslant a\}$ компактно при любом $a>0$, при $a>a_0$ $\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ x_1>a_0\}=\{|x_2|\leqslant 1/2\, x_1^{\alpha},\ x_1>a_0\}$, где $0<\alpha<1$. $\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ x_1<a_0\}=\Lambda$ (фиг. 1). При $x_1>a_0$ единичный вектор внешней нормали



Фиг. 1



Фиг. 2

n имеет вид $n=(1+\alpha^2 x_1^{2\alpha-2}/4)^{-1/2}$ $(\alpha x_1^{\alpha-1}/2, -\operatorname{sign} x_2)$. В области Ω рассмотрим плоскую задачу теории упругости

$$M(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)u(x_1, x_2)=\Phi(x_1, x_2) \quad \text{при} \quad (x_1, x_2)\in\Omega \tag{1.1}$$

$$1/2\, E/(1+\nu)\,(1+\alpha^2 x_1^{2\alpha-2}/4)^{-1/2} B^{\pm}(x_1, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)u(x_1, x_2)$$
$$\text{при} \quad (x_1, x_2)\in\partial\Omega, \quad x_1>a_0 \tag{1.2}$$

$$u(x_1, x_2)=0 \quad \text{при} \quad (x_1, x_2)\in\partial\Omega, \quad x_1\leqslant a_0 \tag{1.3}$$

Здесь $u=(u_1, u_2)$—вектор упругих смещений; M—матричный дифференциальный оператор, соответствующий двумерным уравнениям теории упругости:

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)=\begin{pmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

где ν—коэффициент Пуассона; $\Phi=(\Phi_1, \Phi_2)$—вектор массовых сил;

$$B^{\pm}\left(x_1, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\alpha(1-\nu)}{1-2\nu}x_1^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\mp\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\alpha\nu}{1-2\nu}x_1^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\pm\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\alpha}{2}x_1^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\mp\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\alpha}{2}x_1^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Равенства (1.2) соответствуют граничным условиям в напряжениях: $\cos(\widehat{nx_1})\sigma_{11}+\cos(\widehat{nx_2})\sigma_{12}=\Psi^{\pm}_1$; $\cos(\widehat{nx_1})\sigma_{21}+\cos(\widehat{nx_2})\sigma_{22}=\Psi^{\pm}_2$ $\Psi^{\pm}=(\Psi^{\pm}_1,\Psi^{\pm}_2)$—вектор поверхностной нагрузки, знак „+“ относится к полуплоскости $x_2>0$, „—“ —к полуплоскости $x_2<0$.

Функционал энергии $Э(u)$, соответствующий задаче (1.1)—(1.3), имеет вид

$$Э(u)=\frac{E}{2(1+\nu)}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right)dx_1dx_2$$

Теорема 1. *Пусть* $\Phi_j\in L_2(\Omega)$, $\Psi^{\pm}_j\in L_2(\partial\Omega)$, $j=1,2$. *Тогда существует единственное обобщенное решение* $u=(u_1,u_2)\in W^1_2(\Omega)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.3), *и для него справедлива оценка*

$$Э(u)\leqslant c(\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}+\|\Psi^{\pm}\|_{L_2(\partial\Omega)}) \tag{1.4}$$

При $x_1\to\infty$ *решение „u“ с конечной энергией допускает асимптотическое представление*

$$\left.\begin{aligned}u_1&=c_1-c_3x_2+o(x_1^{-\delta})\\ u_2&=c_2+c_3x_1+o(x_1^{-\delta})\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad \alpha<1/3 \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned}u_1&=c_1-(2-3\alpha)c_3x_2x_1^{1-3\alpha}+o(x_1^{-\delta})\\ u_2&=c_2+c_3x_1^{2-3\alpha}+o(x_1^{-\delta})\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad \alpha>1/3 \tag{1.6}$$

где δ*—положительное число.*

Доказательство существования решения с конечной энергией и формулы (1.4) проводится по стандартной схеме [10]. В пространстве $W^1_2(\Omega)$ вводится новое скалярное произведение, причем соответствующая ему норма есть $Э(u)^{1/2}$. Доказательство оценки (1.4) и соотношения

$$Э(u)\geqslant c\|u;\ W^1_2(\Omega)\|^2$$

вытекает из второго неравенства Корна. Асимптотические формулы (1.5), (1.6) будут введены в п. 2 и п. 3.

2. *Формальная асимптотика собственных векторов задачи в параболе.* Предположим, что функции Φ_j, $\Psi^{\pm}_j$, $j=1,2$ в правых частях равенств (1.1) и (1.2) равны нулю при $x_1>a_1$.

Для нахождения асимптотики собственных векторов задачи (1.1)—(1.3) введем новые переменные $y_1=x_1^{1-\alpha}$; $y_2=(1-\alpha)x_2x_1^{-\alpha}$. В плоскости (y_1,y_2) область $\{(x_1,x_2)\in\Omega;\ x_1>x_0\}$ имеет вид полуполосы $\Pi=\{y_1>a_0^{1-\alpha};\ y_2\in[-(1-\alpha)/2,\ (1-\alpha)/2]\}$. Запишем матричные операторы M и $B^{\pm}$ в координатах (y_1,y_2); их элементы имеют вид:

$$M_{11}=\rho^2\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}\right)+\right.\right.$$

$$+y_1^{-2}y_2\left(\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 y_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\alpha^2+\alpha}{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\Bigg)\Bigg);\quad M_{12}=M_{21}=\rho^2\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right);\quad M_{22}=\rho^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y_2^2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}y_1^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}\right)+y_1^{-2}y_2\left(\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}y_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right)$$

$$B_{11}^{\pm}=\rho\,\mathrm{sign}\,y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\mp\frac{(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha y_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mp\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right)$$

$$B_{12}^{\pm}=B_{21}^{\pm}=\rho\,\mathrm{sign}\,y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mp\frac{1}{1-2\nu}\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)$$

$$B_{22}^{\pm}=\rho\,\mathrm{sign}\,y_2\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y_2}\mp\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\mp\frac{\alpha}{2}y_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\right)$$

где $\rho(x_1)=(1-\alpha)x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Отметим, что операторы M и $B^{\pm}$ в координатах (y_1, y_2) следует интерпретировать как сильно возмущенные операторы первой краевой задачи плоской теории упругости в полуполосе П. Общие краевые задачи для операторов с постоянными коэффициентами в цилиндрических областях исследовались в работе [11]. В п. 2 § 6 книги [12] изучались собственные векторы двумерной задачи теории упругости в полуполосе. Построим асимптотику собственных векторов возмущенной задачи.

Однородные уравнения (2.5), (2.6) в полуполосе П имеют вид

$$M\left(y_1^{-1}, y_2, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)u(y_1, y_2)=0;\quad B^{\pm}\left(y_1^{-1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)u\left(y_1, \pm\frac{1-\alpha}{2}\right)=0 \tag{2.1}$$

Найдем асимптотику при $y_1\to\infty$ решений системы (2.1), растущих на бесконечности не быстрее полинома. Формальное асимптотическое разложение ищем в виде рядов

$$u^{(1)}(y_1, y_2)=y_1^{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}P_{2k}(y_2y_1^{-1})+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}P_{2k+1}(y_2y_1^{-1})\right) \tag{2.2}$$

$$u^{(2)}(y_1, y_2)=y_1^{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}P_{2k}(y_2y_1^{-1})+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}P_{2k+1}(y_2y_1^{-1})\right) \tag{2.3}$$

где P_j — полиномы степени j; γ — некоторые постоянные. Определим числа γ и коэффициенты полиномов у первых членов рядов (2.2), (2.3), полагая P_0 равным 1.

Подставим ряд (2.3) в уравнения (2.1). Приравнивая члены при одинаковых показателях степени переменной y_1, получим уравнения для нахождения функций P_j (коэффициенты полинома P_k вычисляются из условия равенства нулю членов порядка $y_1^{\gamma-k}$). Итак, P_1 определяется из задачи

$$M\left(0,\,0,\,\frac{\partial}{\partial y_1},\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_1(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$B^{\pm}\left(0,\,\frac{\partial}{\partial y_1},\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_1(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{2\nu}{1-2\nu}\end{pmatrix}$$

Решением (2.4) является функция $P_1=-\nu/(1-\nu)\gamma y_2y_1^{-1}$. Приравнивая члены при $y_1^{\gamma-2}$, получим систему уравнений для нахождения P_2:

$$M\left(0,\,0,\,\frac{\partial}{\partial y_1},\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_2(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}\dfrac{2\nu^2-5\nu+2}{(1-\nu)(1-2\nu)}\gamma\left(\gamma-\dfrac{1}{1-\alpha}\right)y_2\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$B^{\pm}\left(0,\,\frac{\partial}{\partial y_1},\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right)P_2(y_2y_1^{-1})=\begin{pmatrix}\pm\gamma\left(\dfrac{(2\nu^2-5\nu+2)}{(1-\nu)(1-2\nu)}\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\nu}{1-\nu}(\gamma-1)\dfrac{1-\alpha}{2}\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

Задача (2.5) разрешима при $\gamma=0$ и $\gamma=1$. Значению $\gamma=0$ соответствует функция $P_2(y_2y_1^{-1})=0$, а значению $\gamma=1$ —функция

$$P_2(y_2y_1^{-1})=\alpha/(1-\alpha)(2(1-\nu)-\nu/(1-\nu))/(1-2\nu)(y_2y_1^{-1})^2+p_2$$

где p_2—постоянная, определяемая из условия разрешимости задачи для определения функции $P_4(y_2y_1^{-1})$.

Таким образом, получены старшие члены и показатель γ в асимптотическом представлении (2.2). Аналогично, из задач типа (2.4) вычисляются следующие члены асимптотики. Итак, асимптотические разложения $u^{(1,1)}$, $u^{(1,2)}$ решений системы (2.1), найденные по формуле (2.2), имеют вид

$$u^{(1,1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad u^{(1,2)}=\begin{pmatrix}y_1\\ -\dfrac{\nu}{1-\nu}y_2\end{pmatrix}+o(y_1^{-1})\quad\text{при}\quad y_1\to\infty \tag{2.6}$$

Подставляя ряд (2.3) в уравнения системы (2.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях y_2, получим равенства для определения функций P_j в асимптотическом разложении (2.3). Правые части вида (2.4) для нахождения функций P_1, P_2, P_3 удовлетворяют условию разрешимости; задача для P_4 разрешима только при следующих значениях γ:

$$\gamma_0=0,\quad \gamma_1=1/(1-\alpha),\quad \gamma_2=3-1/(1-\alpha),\quad \gamma_3=3 \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.7) вытекает, что асимптотика собственных векторов $u^{(2,1)}$, $u^{(2,2)}$, $u^{(2,3)}$, $u^{(2,4)}$ системы (2.1), определяемая по формуле (2.3), имеет вид

$$u^{(2,1)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad u^{(2,2)}=\begin{pmatrix}-(1-\alpha)^{-1}\;y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,y_2\\ y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{pmatrix}$$

$$
u^{(2,2)}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2-3\alpha}{1-\alpha}\, y_2 y_1^{2-\frac{1}{1-\alpha}} + D_1^{(2)} y_2 y_1^{-\frac{1}{1-\alpha}} + D_2^{(2)} y_2^3 y_1^{-\frac{1}{1-\alpha}}/6 \\ y_1^{3-\frac{1}{1-\alpha}} + \dfrac{\nu}{1-\nu}\, \dfrac{(2-3\alpha)(1-3\alpha)}{2(1-\alpha)^2}\, y_2^2 y_1^{1-\frac{1}{1-\alpha}} \end{pmatrix} + o\left(y_1^{-1-\frac{1}{1-\alpha}}\right) \tag{2.8}
$$

$$
u^{(2,3)}=\begin{pmatrix} -3y_2 y_1^2 + D_1^{(3)} y_2 + D_2^{(3)} y_2^3/6 \\ y_1^3 + \dfrac{\nu}{1-\nu}\, \dfrac{3(2-3\alpha)}{2(1-\alpha)}\, y_2 y_1^2 \end{pmatrix} + o(y_1^{-1})
$$

где $D_1^{(k)}=-1/4(1-\alpha)^2\gamma_k(\gamma_k-1/(1-\alpha))(\gamma_k-2)/(1-\nu)$

$D_2^{(k)}=-\gamma_k(\gamma_k-1/(1-\alpha))(\gamma_k-2/(1-\alpha))\,(2-5\nu+2\nu^2)/((1-\nu)(1-2\nu))$

$k=2,\ 3.$

Итак, главные части формальных асимптотических разложений (2.2), (2.3) определяются из равенств (2.6), (2.8). В асимптотику решения задачи (1.1), (1.2), (1.3) входят решения u однородной системы (2.1), имеющие конечную энергию $Э(u)$. Запишем функционал $Э(u)$ в переменных $(y_1,\ y_2)$:

$$
\begin{aligned}
Э(u) = \int\limits_{\Omega} \Bigg(\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} y_1^{-1} y_2 \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} y_2 y_1^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) + \right. \\
\left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} y_1^{-1} y_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \times \right. \\
\left. \times y_1^{-1} y_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} y_2 y_1^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) \Bigg) dy_1 dy_2
\end{aligned}
$$

Вектора $u^{(1,1)}$ и $u^{(2,1)}$ обращают энергию в нуль, а $u^{(1,2)}$ и $u^{(2,3)}$ — в бесконечность. Интеграл $Э(u^{(2,2)})$ конечен при $\alpha<1/3$, а интеграл $Э(u^{(2,3)})$ — при $\alpha>1/3$. Итак, в случае $\alpha<1/3$ в асимптотику решения задачи (1.1), (1.2), (1.3) при $x_1\to\infty$ входят функции $u^{(1,1)}$, $u^{(2,1)}$, $u^{(2,2)}$, а в случае $\alpha>1/3$ — функции $u^{(1,1)}$, $u^{(2,1)}$, $u^{(2,3)}$.

Вид асимптотического разложения (1.5), (1.6) вытекает из формул (2.8) для векторов $u^{(2,2)}$, $u^{(2,3)}$, записанных в переменных $(x_1,\ x_2)$.

3. *Обоснование асимптотического разложения.* Введем функцию $F(x_1,\ x_2)$, удовлетворяющую соотношениям:

$$
\sigma_{11}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2},\quad \sigma_{12}=\sigma_{21}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2},\quad \sigma_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \tag{3.1}
$$

Условие совместности деформации приводит к равенству

$$
\Delta^2 F=0 \tag{3.2}
$$

Однородные граничные условия для функции F имеют вид

$$
\partial^2 F/\partial s^2=0;\quad \partial^2 F/\partial s\partial n=0 \tag{3.3}
$$

где s — касательное, n — нормальное направление к $\partial\Omega$.

Произведя интегрирование по $\partial\Omega$, перепишем равенство (3.3) в области $x_1 > a$ при достаточно больших a:

$$
F=0;\ \partial F/\partial n=0 \quad \text{при } x_2<0, \quad (x_1, x_2)\in\partial\Omega
$$

$$
F=c_1 \int_a^{x_1} \sqrt{1+\alpha^2 t^{2\alpha-2}}\,dt, \quad \frac{\partial F}{\partial n}=c_2 \quad \text{при } x_2>0, \quad (x_1, x_2)\in\partial\Omega \tag{3.4}
$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, определяемые значениями функций F и $\partial F/\partial n$ при $x_1=a$.

Переходя к переменным (y_1, y_2), найдем асимптотическое разложение задачи (3.2), (3.4) при $y_1\to\infty$. Формальную асимптотику ищем в виде

$$
F(y_1, y_2)=\sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_1^{-\frac{k}{1-\alpha}-j} f^{(j,k)}(y_2) \tag{3.5}
$$

Запишем уравнения (3.2), (3.4) в переменных (y_1, y_2) и разложим функции из правых частей равенств (3.4) в ряд по степеням y_1. Операторы, стоящие в левых частях краевой задачи (3.2), (3.4) представим в виде суммы

$$
\Delta^2\left(y_1, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)\to\frac{\partial^4}{\partial y_2^4}+L_1\left(y_1, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right);\ \frac{\partial}{\partial n}\left(y_1, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)\to
$$

$$
\to\frac{\partial}{\partial y_2}+L_2\left(y_1, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)
$$

где $L_j(y_1, \partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2)$, $j=1, 2$ — дифференциальные операторы, удовлетворяющие при $f(y_2)\in C^3(R^1)$ соотношению

$$
L_j\left(y_1, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)f(y_2)y_1^j=o(y_1^{j-1})
$$

Таким образом, старшие члены f_0 асимптотического разложения (3.5) решения задачи (3.2), (3.4) удовлетворяют уравнениям:

$$
\partial^4 f_0/\partial y_2^4=0
$$

$$
f_0=0, \quad \partial f_0/\partial y_2=0, \quad \text{при } y_1>a, \quad y_2=-1/2(1-\alpha) \tag{3.6}
$$

$$
f_0=c_1 x^{\frac{1}{1-\alpha}}+c_3; \quad \partial f_0/\partial y_2=c_3 x_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{при } y_1>a, \ y_2=1/2(1-\alpha)
$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные, определяемые значением при $y_1=a$ функции F — решением задачи (3.2), (3.4). Итак, старшие члены f_0 асимптотического разложения (3.5), найденные из равенства (3.6), имеют вид

$$
f_0(y_1, y_2)=(c_2 y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-2(c_1 y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+c_3))y_2^3+1/2\, c_2 y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y_2^2+
$$

$$
+(3/2(c_1 y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+c_3)-1/4 c_2 y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})y_2+1/2 c_1 y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}-1/8\, c_2\, y_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}+1/2\, c_3
$$

Аналогично находятся остальные члены ряда (3.5). Запишем асимптотику решения задачи (3.2), (3.4) в переменных (x_1, x_2) и из соотношений (3.1) найдем напряжения σ_{11}, σ_{12}, σ_{22}. Определяя из закона Гука по известным напряжениям вектор смещения u, получим асимптотические разложения (1.5), (1.6). Отметим, что слагаемые, обращающие функционал энергии Э в бесконечность, в асимптотику не входят.

Введем пространства $L_{2,\beta}$ и $W^2_{2,\beta}$ функций f с конечной нормой $\|x_1^\beta f\|_{L_2}$, $\|x_1^\beta f\|_{W_2^2}+\|x_1^\beta f\|_{L_2}$. Обоснование асимптотического разложения (3.5) решения задачи (3.2), (3.4), а следовательно, и равенств (1.5), (1.6) вытекает из известного утверждения, по существу содержащегося в [12], [13].

Лемма 1. *Предположим, что функции f, стоящие в правых частях уравнений* (3.2) и (3.4), *принадлежат пространству* $L_{2,\beta}(\Omega)$. *Тогда существует единственное обобщенное решение „u" задачи* (3.2), (3.4) *из пространства* $W^2_{2,\beta}(\Omega)$, *и для него справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^2_{2,\beta}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_{2,\beta}(\Omega)}$$

В п. 2, 3 предполагалось, что функции $\Phi_j(x_1, x_2)$, $\Psi_j^{\pm}(x_1, x_2)$ $j=1, 2$ из правых частей уравнений (1.1) и (1.2) имеют компактный носитель. Общий случай рассматривается аналогично. Если $\Phi_j=0$ при $x_1>a_0$, а $\Psi^{\pm}\neq 0$ при сколь угодно больших значениях x_1, то в асимптотическое разложение решения u задачи (1.1), (1.2), (1.3) при $x_1\to\infty$ войдут слагаемые, компенсирующие вектор $\Psi^{\pm}$. Поскольку функции $\Psi_j^{\pm}$ принадлежат $L_2(\partial\Omega)$, соответствующие слагаемые в асимптотике решения u убывают при $x_1\to\infty$ достаточно быстро, и, таким образом, вид старших членов асимптотического разложения (1.5), (1.6) не изменится. В случае, когда носитель Φ некомпактен, решение u задачи (1.1), (1.2), (1.3) представим в виде

$$u(x_1, x_2)=v(x_1, x_2)+w(x_1, x_2)$$

где w—решение задачи Дирихле для уравнения (1.1) с нулевыми граничными условиями. Отметим, что функция w принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$. При таком выборе величины w, функция v удовлетворяет однородным соотношениям (1.1), (1.3) и равенствам (1.2) с правыми частями $\Psi^{\pm}$ из $L_2(\partial\Omega)$; следовательно, для v справедливо разложение (5), (6). Итак, решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) допускает асимптотическое представление (1.5), (1.6) и в том случае, когда носитель функций Φ и $\Psi^{\pm}$ некомпактен.

4. *Определение коэффициентов в асимптотике решения.* Найдем явную зависимость коэффициентов c_1, c_2, c_3 в формулах (1.5), (1.6) от правых частей задачи (1.1), (1.2), (1.3). Для этого воспользуемся методом [15] В. Г. Мазья—Б. А. Пламеневского. Построим неэнергетические решения $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$, $w^{(4)}$ задачи (1.1), (1.2), (1.3), совпадающие при $x_1\to\infty$ с векторами $u^{(1,2)}$, $u^{(2,3)}$, $u^{(2,4)}$, $u^{(1,2)}$ соответственно. Пусть $z(x_1)$—срезка: $z=1$ при $x_1>a$, $z=0$ при $x_1<1/2\ a$ и

$z\in C^\infty(R^1)$, $\omega=zu$, где u—неэнергетический собственный вектор. Функции $M(\omega)$ и $B^\pm(\omega)$ имеют компактный носитель. Искомые неэнергетические решения представим в виде

$$w(x_1, x_2)=\omega(x_1, x_2)+v(x_1, x_2) \tag{4.1}$$

где v—решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) с правыми частями $M(\omega)$, $\Psi^\pm(\omega)$ (существование функции v вытекает из теоремы 1, при $x_1\to\infty$ для v выполняются равенства (5) и (6)).

В области $\Omega_\delta=\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ \delta^{-1}>x_1>a_0\}$ для решений u и v задачи (1.1), (1.2), (1.3) с различными правыми частями справедлива формула Бетти:

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\int\limits_{\Omega_\delta}(u_1M_1(v)+u_2M_2(v)-v_1M_1(u)-v_2M_2(u))dx_1dx_2=$$

$$=\sum_\pm\int\limits_{\Gamma_\delta^\pm}\Big(\big(u_1\sigma_{11}(v)+u_2\sigma_{12}(v)-v_1\sigma_{11}(u)-v_2\sigma_{12}(u)\big)\frac{\alpha}{2}x_1^{\alpha-1}\pm \tag{4.2}$$

$$\pm(u_1\sigma_{21}(v)+u_2\sigma_{22}(v)-v_1\sigma_{21}(u)-v_2\sigma_{22}(u))\Big)/\sqrt{1+\alpha^2x_1^{2\alpha-2}/4}\,ds+$$

$$+\int\limits_{-\frac{1}{2}\delta^{-\alpha}}^{1/2\delta^{-\alpha}}(u_1\sigma_{11}(v)+u_2\sigma_{12}(v)-v_1\sigma_{11}(u)-v_2\sigma_{12}(u))dx_2$$

где $M_1=M_{11}+M_{12}$, $M_2=M_{21}+M_{22}$—компоненты оператора M, $\Gamma_\delta^\pm=\{(x_1, x_2):\ x_2\in R^1,\ a_0<x_1<\delta^{-1}\}\cap\partial\Omega$. Подставим в равенство (4.2) вектор u—решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) с правыми частями Φ, $\Psi^\pm$ и w—неэнергетическое решение однородной задачи, построенное по формуле (4.1). Устремим δ к нулю, тогда тождество (4.2) примет вид

$$\int\limits_\Omega(w_1\Phi_1+w_2\Phi_2)dx_1\,dx_2=\sum_\pm\int\limits_{\Gamma_\delta^\pm}(\Psi_1^\pm w_1+\Psi_2^\pm w_2)ds+$$

$$+\lim_{\delta\to0}\int\limits_{-1/2^{-\alpha}}^{1/2\delta^{-\alpha}}(w_1\sigma_{11}(u)+w_2\sigma_{12}(u)-u_1\sigma_{11}(w)-u_2\sigma_{12}(w))dx_2 \tag{4.3}$$

Переходя к координатам (y_1, y_2), вычислим последний предел в правой части уравнения (4.3). При $w=w^{(3)}$

$$\lim_{\delta\to\infty}\int\limits_{-1/2^{\delta-\alpha}}^{1/2\delta^{-\alpha}}(w_1^{(3)}\sigma_{11}(u)+w_2^{(3)}\sigma_{12}(u)-u_1\sigma_{11}(w^{(3)})-u_2\sigma_{12}(w^{(3)}))dx_2=-\frac{(1-\alpha)(2-3\alpha)}{2(1-\nu)}c_2$$

Аналогичные соотношения получим и при других значениях w. Таким образом, доказано следующее утверждение:

Т е о р е м а 2. *Справедливы равенства*

$$c_1=(1-\nu)\frac{1}{2(1-\alpha)}L(\Phi,\Psi^{\pm},w^{(4)}),\quad c_2=(1-\nu)\frac{2}{(1-\alpha)(2-3\alpha)}L(\Phi,\Psi^{\pm},w^{(3)})$$

$$c_3=(1-\nu)\frac{6}{(2-3\alpha)(1-3\alpha)}L(\Phi,\Psi^{\pm},w) \tag{4.4}$$

где $w=w^{(2)}$ при $\alpha<1/3$, $w=w^{(3)}$ при $\alpha>1/3$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$, $w^{(4)}$—некоторые неэнергетические решения однородной задачи (1.1), (1.2), (1.3), определяемые формулой (4.1)

$$L(\Phi,\Psi^{\pm},w)=\int\limits_{\Omega}(w_1\Phi_1+w_2\Phi_2)dx_1dx_2-\sum_{\pm}\int\limits_{\Gamma^{\pm}}(\Psi_1^{\pm}w_1+\Psi_2^{\pm}w_2)ds$$

5. *Асимптотика в окрестности заострения.* Пусть Ω—область на плоскости (x_1, x_2) с компактным замыканием и гладкой (класса C^{∞}) границей вне малой окрестности нуля. Предположим, что в точке 0 граница области Ω имеет особенность типа заострения (фиг. 2), то есть $\{(x_1, x_2)\in\Omega;\ x_1<a_0\}=\{|x_2|\leqslant 1/2x_1^{\alpha},\ x_1<a_0\}$, где $\alpha>1$.

В области Ω рассмотрим задачу (1.1), (1.2), (1.3). Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Если $\Phi_j\in L_2(\Omega)$, $\Psi_j^{\pm}\in L_2(\partial\Omega)$; $j=1, 2$, то существует единственное решение „u" задачи (1.1), (1.2), (1.3) с конечной энергией $\mathcal{E}(u)$ и для него справедлива оценка (1.4). При $x_1\to 0$ решение „u" с конечной энергией допускает асимптотическое представление*

$$\begin{aligned} u_1&=c_1-(2-3\alpha)c_3x_2x_1^{3\alpha-1}+o(x_1^{\delta})\\ u_2&=c_2+c_3x_1^{3\alpha-2}+o(x_1^{\delta}),\quad \delta>0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, поскольку преобразование координат $(x_1, x_2)\to(y_1, y_2)$ переводит область $\{(x_1, x_2): x_1<a_0, |x_2|<1/2\,x_1^{\alpha}\}$ в полуполосу П. Коэффициенты c_1, c_2, c_3 из равенств (5.1) можно определить по формулам (4.4).

Автор выражает глубокую благодарность Мазья В. Г. и Назарову С. А. за помощь в работе.

ՊԱՐԱԲՈԼՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՁԱՃՈՂ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ս. Ս. ՊԼՈՒՅԿԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի առաջին եզրային խնդիրը $|x_2|\leqslant x_1^{\alpha}$, $0<\alpha<1$ պարաբոլի հետ համընկնող տիրույթներում, երբ x_1-ը բավականաչափ մեծ է։ Կառուցված է վերջավոր էներգիայով լուծման ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, երբ $x_1\to\infty$։ Գտնված է ասիմպտոտիկայի ավագ անդամների գործակիցները։

Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը այն տիրույթներում, երբ տիրույթի եզրը պարունակում է սրածայր մեկուսացված կետ: Ստացված է լուծման ասիմպտոտիկ վերլուծությունը եզրի եզակիության շրջակայքում:

INDESCENDING SOLUTIONS OF THE FLAT PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A PARABOLA

A. S. SLUTSKI

Summary

The first boundary value problem of the flat theory of elasticity in domains coincident with the $|x_2| \leqslant |x_1|$ $(0 < \alpha < 1)$ parabola for sufficiently large x_1 is studied in this paper. The asymptotic decomposition of solutions with a final energy for $x_1 \to \infty$ is constructed. The flat problem of the theory of elasticity in the domain containing an isolated singularity of the boundary as a peak is considered. The asimptotic decomposition is obtained for a solution near the boundary singularity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fridrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory elastic plates.—Comm. Pure and Appl. Math., 1961, v. 14, № 1.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. *24*, № 4, с. 668—686.
3. *Ворович И. И., Аксентян О. К.* Напряженное состояние плиты малой толщины.—ПММ, 1967, т. *28*, № 6, с. 1057—1074.
4. *Назаров С. А., Семенов Б. Н.* Об асимптотике решений задач изгиба тонких пластин с разрывными нагрузками.—В кн.: Колебания и устойчивость механических систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981, вып. 5, с. 135—145.
5. *Маховер Е. В.* Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем.—Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та, физ-матем. ф-та, 1957, 17, вып. 2, с. 28—39.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.—М.: Наука, 1970, 512 с.
7. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике решения задачи Дирихле вблизи изолированной особенности границы.—Вестник ЛГУ, сер. мат. мех., астр., 1977, № 13, вып. 3, с. 60—67.
8. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике поведения решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.—Изв. АН СССР, сер. мат., 1972, т. *36*, с. 980—1033. Письмо в редакцию (поправка).—Изв. АН СССР, сер. мат., 1973, т. 37, с. 700—701.
9. *Пламеневский Б. А.* О существовании и асимптотике решений дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами в банаховом пространстве.—Изв. АН СССР, сер. мат., 1972, т. 36, с. 1348—1401. Письмо в редакцию (поправка).—Изв. АН СССР, сер мат., 1973, т. 37, с. 959.
10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.

11. *Agmon S., Nirenberg L.* Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space.— Comm. Pure and Appl. Math., 1963, v. 16, pp. 121—239.

12. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости Л.: Изд-во ЛГУ, 1983, 117 с.

13. *Багиров Л. А., Фейгин В. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с неограниченной границей.—Докл. АН СССР, 1973, т. *211*, № 1, с. 23—26.

14. *Назаров С. А.* Асимптотика по малому параметру решения эллиптической по Аграновичу-Вишику краевой задачи в областях с конической точкой. В кн.: Проблемы математического анализа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1979, вып. 7, с. 146—167.

15. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах и асимптотике решений.— Докл. АН СССР, 1974, т. *219*, с. 286—291.

Ленинградский НИИ химического
машиностроения

Поступила в редакцию
5.III.1984