

УДК 539.3.539.55

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
 КРУГОВОЙ ПАНЕЛИ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

АРТЕМЯН Э. Г.

В [1] на примере одномерной задачи было показано, что свободно опертая по краям цилиндрическая панель теряет устойчивость при внутреннем давлении, а не при внешнем, как наблюдалось в случае шарнирного закрепления. Работа [1] примечательна также тем, что в отличие от тех случаев, когда докритические перерезывающие усилия можно не учитывать, в этой работе показано, что эти усилия оказывают существенное влияние на значения критических параметров. Эти результаты позволили сделать вывод, что принятие начального докритического состояния безмоментным приводит не только к количественным, но и к качественным погрешностям.

В данной работе рассматривается задача устойчивости свободно опертой цилиндрической панели из наследственно-упругого материала, находящейся под воздействием внешнего равномерного давления в произвольном стационарном температурном поле. Предполагается, что панель имеет бесконечную протяженность вдоль образующей. Начальное докритическое состояние панели принимается моментным и характеризуется следующей системой:

$$\frac{dT^0}{ds} + \frac{N^0}{R} = 0; \quad \frac{dN^0}{ds} - \frac{T^0}{R} = -Z; \quad \frac{dM^0}{ds} = N^0 \quad (1)$$

Предполагается, что на панель действует нормальная равномерная нагрузка интенсивностью $q = Z(X)$.

Панель, как уже сказано, предполагается свободно опертой, то есть на краях заданы условия свободного опирания:

$$T^0 = M^0 = w^0 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \quad \text{и} \quad s = s_0 \quad (s_0 < \pi R) \quad (2)$$

Начальные усилия определяются непосредственно из (1) и при условиях (2) имеют следующий вид:

$$T^0 = Rq \left[1 - \frac{\cos(2s - s_0)/2R}{\cos s_0/2R} \right]; \quad N^0 = Rq \frac{\sin(2s - s_0)/2R}{\cos s_0/2R}$$

Предполагается, что свойства материала описываются соотношениями [3]

$$\sigma_{ij} = (1 - \Gamma^*) (\delta_{ij} \epsilon_{ij} + 2\nu e_{ij}) - (\beta + 2\nu) \int_0^T \alpha(T) dT \delta_{ij}$$

Здесь коэффициенты λ , μ и α так же, как и в [3], считаются произвольным образом зависящими от времени, но так, что коэффициент Пуассона $\nu = \lambda/2(\mu + \alpha)$ является постоянным [5], а оператор Γ^* определяется следующим образом:

$$\Gamma^* u(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) u(\tau) d\tau$$

Рассматриваются только лишь ядра экспоненциального типа—типичное тело:

$$\Gamma(t-\tau, T) = A(T) \exp\{-\alpha(T)(t-\tau)\}$$

Можно предположить, что общий вид коэффициентов вязкости определяется после применения температурно-временной аналогии [6,7].

Уравнение устойчивости запишется в виде

$$c^2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} d\tau \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \int_0^t \Gamma(t-\tau, T) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} d\tau \right) \right] \right\} - \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(T^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) - N^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right] = 0 \quad (3)$$

После некоторых преобразований (3) можно привести к виду

$$c^2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2 \partial t} + (A+\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2 \partial t} + (A+\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \right] \right\} - \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(T^0 \alpha(T) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + T^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2 \partial t} \right) - N^0 \left(\alpha(T) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2 \partial t} \right) \right] = 0$$

где

$$b = \frac{s}{R}; \quad c^2 = h^2/12R^2$$

Решение этого уравнения ищем в виде [9]

$$w = \bar{w} \exp\{kt\}$$

При предельных значениях k ($k=0$; $k \rightarrow \infty$) получаем следующую систему:

$$c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) \right] - \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(T^0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) - N^0 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) \right] = 0$$

$$c^2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (A+\alpha) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (A+\alpha) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) \right] - \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(T^0 \alpha(T) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) - N^0 \alpha(T) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right] = 0 \quad (4)$$

Интересующие нас значения мгновенного и длительного критических усилий получаются соответственно из первого и второго уравнений системы (4). Из системы видно, что первое уравнение является частным случаем второго ($\alpha(T) = 1$; $A(T) = 0$).

Решим каждое из уравнений в отдельности. Решая первое уравнение, представим в виде рядов функции T^0 и N^0

$$T^0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \lambda_m \theta; \quad N^0 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \lambda_m \theta \quad (5)$$

где $b_m = \frac{1}{\theta_0} \lambda_m a_m$; $\lambda_m = \pi m$

модуль Юнга

$$E = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos \lambda_m \theta \quad (6)$$

а также прогиб

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_k \theta \quad (7)$$

при этом \bar{w} удовлетворяет условиям (2) для возмущенного состояния.

Подставляя (5), (6) и (7) в первое уравнение (4) и производя некоторые преобразования относительно неизвестных функций f_k получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \left[(2c_0 - c_{2k}) c^2 \lambda_k (\lambda_k^2 - 1) - \frac{1}{h} ((2a_0 - a_{2k}) \lambda_k - b_{2k}) \right] \lambda_k^2 f_k + \\ & + \sum_{p=1}^{k-1} \left[(c_{k-p} - c_{k+p}) c^2 \lambda_k (\lambda_k^2 - 1) - \frac{1}{h} ((a_{k-p} - a_{k+p}) \lambda_k - (b_{k-p} - b_{k+p})) \right] \lambda_p^2 f_p + \\ & + \sum_{p=k+1}^{\infty} \left[(c_{p-k} - c_{p+k}) c^2 \lambda_k (\lambda_k^2 - 1) - \frac{1}{h} ((a_{p-k} - a_{p+k}) \lambda_k - (b_{p-k} - b_{p+k})) \right] \lambda_p^2 f_p = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Определим коэффициенты вышеприведенных разложений, учитывая, что модуль Юнга зависит от температуры. Предполагаем, что эта зависимость носит линейный характер

$$E = E_0 (1 - \mu \alpha_0 T)$$

где μ — некоторый безразмерный коэффициент, α_0 — коэффициент линейного теплового расширения материала панели. Для простоты предположим также, что температура изменяется по следующему закону:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\theta}{\theta_0}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$\theta = 0 \text{ при } T = T_1; \quad \theta = \theta_0 \text{ при } T = T_2$$

Тогда коэффициенты разложений примут следующий вид:

$$a_0 = Rq \left[1 - \frac{2}{\theta_0} \frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right]; \quad c_0 = E_0 [2 - \mu \alpha_0 (T_1 + T_2)]$$

$$a_k = Rq \left[\frac{2\theta_0}{(\pi k)^2 + \theta_0^2} \frac{|1 + (-1)^k| (1 - \cos \theta_0)}{\sin \theta_0} \right]$$

$$c_k = \frac{E_0}{\theta_0} \left[\frac{(1 - \mu \alpha_0 T_1)}{\pi k} \sin(\pi k \theta_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu \alpha_0 (T_2 - T_1)}{\theta_0} \left(\frac{1}{(\pi k)^2} (\cos(\pi k \theta_0) - 1) + \frac{\theta_0}{\pi k} \sin(\pi k \theta_0) \right) \right]$$

Условием нетривиального решения системы (8) является равенство нулю ее детерминанта.

Если обозначить $\varphi_k = \lambda_k^2 f_k$ и сделать некоторые несложные преобразования, то нетрудно убедиться в том, что система (8) является нормальной, следовательно, корни можно определить методом последовательных приближений и этот процесс сходится [8].

Рассмотрим решение второго уравнения системы (4).

Предположим, что A и α линейным образом зависят от температуры [3]

$$A = \bar{A}(1 - bT); \quad \alpha = \bar{\alpha}(1 - bT)$$

где b — некоторый коэффициент. Согласно [6] имеем

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{\bar{A}}{\bar{\alpha}} = \text{const}$$

Второе уравнение системы (10) запишется в виде

$$c_k \frac{\bar{A} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{E}{1 - \nu^2} (1 - bT) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E}{1 - \nu^2} (1 - bT) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(T^0 (1 - bT) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - N^0 (1 - bT) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (9)$$

Представим в виде рядов следующие функции:

$$E(1 - bT) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos \lambda_k \theta \quad (10)$$

$$T^0(1 - bT) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k \theta \quad (11)$$

$$N^0(1 - bT) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \lambda_k \theta \quad (12)$$

В виде ряда ищем также прогиб

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_k \theta \quad (13)$$

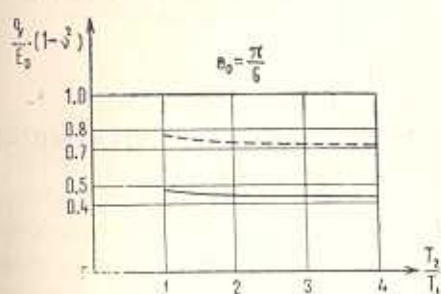
Подставив (10) — (13) в уравнение (9) и сделав некоторые преобразования относительно неизвестных функций f_k , получим следующую систему бесконечных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \left[(2c_0 - c_{2k})c_{2k}^2(\lambda_k^2 - 1) - \frac{\bar{x}}{A+x} \frac{1}{h} ((2a_0 - a_{2k})\lambda_k - b_{2k}) \right] \lambda_k^2 f_k + \\
& + \sum_{p=1}^{k-1} \left[(c_{k-p} - c_{k+p})c_{2p}^2(\lambda_k^2 - 1) - \frac{\bar{x}}{A+x} \frac{1}{h} ((a_{k-p} - a_{k+p})\lambda_k - \right. \\
& \left. - (b_{k-p} + b_{k+p})) \right] \lambda_p^2 f_p + \sum_{p=k+1}^{\infty} \left[(c_{p-k} - c_{p+k})c_{2k}^2(\lambda_k^2 - 1) - \right. \\
& \left. - \frac{\bar{x}}{A+x} \frac{1}{h} ((a_{p-k} - a_{p+k})\lambda_k - (b_{p-k} + b_{p+k})) \right] \lambda_p^2 f_p = 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

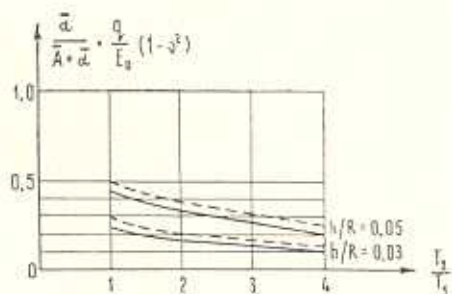
Коэффициенты разблений примут вид

$$\begin{aligned}
c_0 &= E_0 \left[2 - (\mu\alpha_0 + b)(T_1 + T_2) + \mu\alpha_0 b \frac{2}{3} (T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2) \right] \\
c_k &= \frac{E_0}{\theta_0} \left\{ \left[\frac{1}{\pi k} - \frac{(\mu\alpha_0 + b)}{\pi k} (T_2 - T_1) + \frac{\mu\alpha_0 b}{(\pi k)^2 \theta_0} (T_1(\pi k)^2 \theta_0^2 - 2(T_2 - T_1)^2) \right] \sin(\pi k \theta_0) + \right. \\
& + \left[-(\mu\alpha_0 + b) \left(\frac{T_1}{\pi k} + \frac{T_2 - T_1}{(\pi k)^2 + \theta_0} \right) + \frac{\mu\alpha_0 b}{(\pi k)^2 \theta_0} 2(T_2 - T_1)(T_1 + (T_2 + T_1)\pi k) \right] \times \\
& \times \cos(\pi k \theta_0) + \left[(\mu\alpha_0 + b) \left(\frac{T_1}{\pi k} + \frac{T_2 - T_1}{(\pi k)^2 \theta_0} \right) - \frac{\mu\alpha_0 b}{(\pi k)^2 \theta_0} 2T_1(T_2 - T_1) \right] \Big\} \\
a_0 &= \frac{2}{\theta_0} Rq \left\{ \left[\theta_0 - \frac{T_1 + T_2}{2} \theta_0 b - b \frac{T_2 - T_1}{\theta_0} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} - 1 \right) \right] + \right. \\
& + \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} (bT_2 - 1) + b \frac{T_2 - T_1}{\theta_0} \right] \sin \theta_0 + \left(b \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} - b(T_2 - T_1) - 1 \right) \cos \theta_0 \Big\} \\
a_k &= \frac{1}{\theta_0} Rq \left\{ \frac{\sin(\pi k \theta_0)}{\pi k} - b \left[\frac{\sin(\pi k \theta_0)}{\pi k} (T_1 + \theta_0) + \frac{1}{\pi k} (\cos(\pi k \theta_0) - 1) \right] - \right. \\
& - (1 - bT_1) \left[\frac{\sin \theta_0 \sin(\pi k \theta_0)}{\pi k + 1} + \frac{1}{(\pi k)^2 - 1} (\cos(\pi k \theta_0) - 1) \right] - \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} (1 - bT_1) \times \\
& \times \left[\frac{\cos \theta_0 \cos(\pi k \theta_0)}{\pi k} - \frac{1}{2\pi k} \left(\frac{\sin(\pi k - 1)\theta_0}{\pi k - 1} - \frac{\sin(\pi k + 1)\theta_0}{\pi k + 1} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \frac{b(T_2 - T_1)}{\theta_0} \left[\frac{\sin(\pi k + 1)\theta_0}{(\pi k + 1)^2} - \frac{\theta_0}{\pi k + 1} (\cos(\pi k + 1)\theta_0 - 1) + \right. \\
& + \frac{\sin(\pi k - 1)\theta_0}{(1 - \pi k)^2} - \frac{\theta_0}{1 - \pi k} (\cos(1 - \pi k)\theta_0 - 1) + \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \left(\frac{\cos(1 + \pi k)\theta_0 - 1}{(1 + \pi k)^2} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\theta_0}{1 + \pi k} \sin(1 + \pi k)\theta_0 + \frac{\cos(1 - \pi k)\theta_0 - 1}{(1 - \pi k)^2} + \frac{\theta_0}{1 - \pi k} \sin(1 - \pi k)\theta_0 \right) \right] \Big\}
\end{aligned}$$

Аналогично тому, как и в задаче упругости, нетрудно убедиться в том, что система (14) нормальна и, следовательно, корни можно определить методом последовательных сходящихся приближений [8]. Решая в отдельности задачи упругости и вязкости при одних и тех же параметрах, были получены критические силы. Сопоставление значений критических сил позволило сделать вывод, что коэффициентной зависимости между ними не существует.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приводится зависимость отношений критической силы к начальному модулю упругости ($q_{cr}/E_0(1-\nu^2)$) от отношения температур. При проведении вычислений температура бралась равной 200° . На фиг. 1 приведены 2 графика для отношения $h/R=1/20$ (пунктиром) и $h/R=1/30$ (сплошная). Коэффициент $\mu_{z_0}=1,3 \cdot 10^{-5}$ (коэффициент стали). Как и следовало ожидать, значение критической силы с возрастанием температуры уменьшалось и наибольшего значения достигало в случае $T_1=T_2$ и равнялось $0,720275$. С уменьшением θ_0 ($\theta_0=\pi/10$) критическая сила уменьшалась, но закономерность изменения критической силы в зависимости от температуры сохранилась. Для $\theta_0=\pi/10$ также были проведены вычисления, но результаты графически не показаны, поскольку отличались очень мало от указанного на фиг. 1 случая. На фиг. 2 представлены зависимости длительной критической силы от изменения температуры.

Варьировалось значение коэффициента b : $b=1,3 \cdot 10^{-5}$ (сплошные линии) и $b=1,3 \cdot 10^{-7}$ (пунктирные линии). Как видно из фиг. 2, закономерность изменения критической силы от температуры, как и в упругой задаче, здесь также сохранялась.

С другой стороны, уменьшение толщины панели в отличие от упругой задачи в данном случае приводило к более резкому уменьшению значения критической силы. Кроме того, увеличение температуры также влияло на значение критической силы более интенсивно, чем это наблюдалось в задаче упругости.

Է. Հ. ԱՐՏԵՄՅԱՆ

Ա մ ֆ ո փ ու լ մ

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է առաձգամածուցիկ, արտաքին հավասարաչափ ճնշման ենթարկված շրջանային պանելի կայունության խնդիրը կամայական ջերմային դաշտում, հաշվի առնելով նախնական վիճակի մոմենտայնությունը: Կրիտիկական պարամետրերի որոշումը բերվում է անվերջ մատրիցի ամենափոքր սեփական արժեքի դանկում:

THE STABILITY OF A TOUGH-ELASTIC CIRCULAR CYLINDRICAL PANEL IN THE TEMPERATURE FIELD

E. G. ARTEMIAN

S u m m a r y

The stability of a tough-elastic circular cylindrical panel is investigated using one-dimensional arrangement in the temperature field. The load uniform is considered. The calculation of critical parameters is reduced to the calculation of minimum proper values of the infinitum.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л. А. К устойчивости цилиндрической панели.—Иза. АН АрмССР, Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 16—21.
2. Мовсисян Л. А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки.—Докл. АН АрмССР, 1971, т. 52, № 2, с. 70—75.
3. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругих и вязкоупругих термочувствительных пластин и оболочек.—Иза. АН АрмССР, Механика, 1966, т. 39, № 4, с. 26—30.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
5. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1968. 520 с.
6. Бусаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 265 с.
7. Колтунов М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 695 с.
9. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, Физматгиз, 1971. 237 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
11.VI.1986