ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 532.58.620.22

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОГО КОНУСА В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

БАГДОЕВ А. Г., ГРИГОРЯН М. С.

Уравнения электродинамики для сплошных сред и магнитных жидкостей приведены в работах [1, 2]. Общие вопросы движения магнитных жидкостей и тонких тел в сжимаемой жидкости рассмотрены в работах [3, 4]. При наличии кавитации движения тонких тел рассмотрены в [5].

В настоящей статье изучается движение тела в магнитной жидкости, которая считается неэлектропроводящей.

Уравнения неразрывности и движения были получены в [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\overline{U}=0$$

$$\rho\frac{d\overline{U}}{dt}=-\nabla P'+\frac{(\overline{B}\nabla)\overline{H}}{4\pi}+\eta\Delta\overline{U}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{U} \tag{1}$$

$$P'=P+\frac{1}{4\pi}\int_0^H\left[\mu-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_{T,H}\right]\overline{H}\,d\overline{H}$$

где ρ—плотность, $\overline{U}$—скорость частицы, $\overline{H}$—магнитное поле, $\overline{B}=\mu\overline{H}$, $\mu=\mu(\rho,T,H)$, ξ, η—вязкостные постоянные, P'—суммарное давление, P—давление.

Уравнения электродинамики для магнитной жидкости:

$$\operatorname{div}\overline{B}=0,\quad \operatorname{rot}\overline{H}=0$$

Рассмотрим задачу движения тонкого конуса со скоростью V. Ввиду малости возмущений можно полагать

$$P=P_0+P_1,\quad \rho=\rho_0+\rho_1,\quad \overline{H}=\overline{H}_0+\overline{H}_1 \tag{2}$$

Считаем, что μ зависит только от ρ, при этом

$$P'=P+\frac{1}{8\pi}\left[\mu-\rho\frac{d\mu}{d\rho}\right]H^2 \tag{3}$$

и уравнение движения имеет вид

$$\rho\frac{d\overline{U}}{dt}=-\nabla P+\frac{1}{8\pi}\rho\frac{d^2\mu}{d\rho^2}\nabla\rho H^2-\frac{1}{8\pi}\left[\mu-\rho\frac{d\mu}{d\rho}\right]\nabla H^2+\frac{\mu(\overline{H}\nabla)\overline{H}}{4\pi} \tag{4}$$

где отброшены слагаемые с ξ, η.

Учитывая то, что $\overline{H}\times\mathrm{rot}\overline{H}=0$ и используя равенство

$$\overline{H}\times\mathrm{rot}\overline{H}=\frac{1}{2}\nabla H^2-(\overline{H}\nabla)\overline{H} \tag{5}$$

можно записать

$$\rho\frac{d\overline{U}}{dt}=-\nabla P+\frac{1}{8\pi}\rho\frac{d\mu}{d\rho}\nabla H^2+\frac{1}{8\pi}\rho\frac{d^2\mu}{d\rho^2}\nabla\rho H^2 \tag{6}$$

Кроме того, предполагается постоянство энтропии

$$\frac{dP}{dt}=a^2\frac{d\rho}{dt} \tag{7}$$

a—скорость звука.

Для малых возмущений

$$P_1=a_0^2\rho_1 \tag{8}$$

a_0—невозмущенная скорость звука.

Окончательно получаются линеаризованные уравнения задачи

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\overline{V}=0$$

$$\rho_0\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}=-\nabla P_1+\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\nabla\frac{H^2}{8\pi}+\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\nabla\rho_1 \tag{9}$$

$$P_1=a_0^2\rho_1,\qquad \nabla\mu\overline{H}_0+\mu_0\nabla\overline{H}_1=0$$

В силу того, что $\mathrm{rot}H_1=0$, следует полагать

$$\overline{V}=\nabla\varphi,\qquad \overline{H}_1=\nabla\psi$$

Считаем, что $\overline{H}_0$ направлено по оси x, вдоль которой движется конус.

Из уравнения (9) имеем

$$\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-P_1+\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{P_1}{a_0^2} \tag{10}$$

$$\frac{d\mu_0}{d\rho_0}H_0\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\mu_0\nabla^2\psi=0 \tag{11}$$

$$P_1=a_0^2\rho_1,\quad \frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla^2\varphi=0 \tag{12}$$

Отсюда получится уравнение

$$\frac{P_1}{a_0^2}=-\frac{\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x}}{a_0^2-\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}} \tag{13}$$

Функции φ и ψ должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left|a_0^2-\rho_0\frac{a^2\mu_0}{d\rho_0^2}\mu_0+\frac{\rho}{\mu_0}\left(\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\right)^2\frac{H_0^2}{4\pi}\right|+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\left(a_0^2-\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad (14)$$

$$\mu_0\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}H_0\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi \qquad (15)$$

В (14) введена радиальная координата r.

Из (14) следуют соотношения

$$\frac{r}{\sqrt{\theta}}=\lambda, \quad \theta=\frac{\mu_0c^2+\rho_0\left(\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\right)^2\frac{H_0^2}{4\pi}}{\mu_0c^2} \qquad (16)$$

$$c^2=\frac{a_0^2-\rho_0\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}\frac{H_0^2}{8\pi}}{\mu_0} \qquad (17)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad (18)$$

Волновое движение будет при $c^2>0$.

Можно также получить

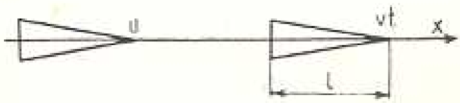
$$\psi=\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{\mu_0}\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}dt+\Phi \qquad (19)$$

Φ—гармоническая функция, $\nabla\Phi=0$.

На конусе имеют место граничные условия [4, 5]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\simeq V\beta, \quad r=r_k, \quad r_k=(Vt-x)\beta \qquad (20)$$

где β—угол полураствора конуса (фиг. 1).



Фиг. 1

Обозначим через l высоту конуса.

Для простоты можно считать, что жидкость несжимаема и полагать $\nabla^2\varphi=0$, тогда $\theta=1$ и решение имеет вид [4]

$$\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_{Vt-l}^{Vt}\frac{V\beta r_k dx_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+r^2}} \qquad (21)$$

Так же, как в [5], удержим в решении на конусе члены порядка $\beta^2\ln\beta$, тогда получим

$$\varphi=-\frac{1}{2}V\beta r_k(x,t)\ln\frac{1}{r_k} \qquad (22)$$

Таким образом, потенциал скорости φ найден на конусе в главных порядках.

Для вычисления $\overline{H}_1$ или ψ следует учесть граничные условия на конусе: равенство нормальных компонент индукции $\overline{B}$ и тангенциальных компонент H.

Обозначая штрихом значения $\overline{H}$ в конусе, принимая в нем $\mu'=1$, имеем

$$r=r_k,\ \mu H_{1r}+\beta\mu H_0\simeq H'_{1r}+\beta H_0,\quad H_{1x}-\beta H_{1r}=H'_{1x}-\beta H'_{1r}$$

Поскольку на конусе решение зависит от разности $Vt-x$, где t — время с начала движения, можно, полагая $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\simeq-\frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, из (19) получить

$$\psi=-\frac{\varkappa}{V}\varphi+\Phi,\quad \varkappa=\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{\mu_0}$$

Внутри конуса $H'_x=H_0+H'_{1x}$.

Тогда граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\mu\left(-\frac{\varkappa}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\beta(\mu-1)H_0=\frac{\partial\psi'}{\partial r}$$

$$-\frac{\varkappa}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta\left(-\frac{\varkappa}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)(\mu-1)+\beta^2(\mu-1)H_0=\frac{\partial\psi'}{\partial x}\qquad(23)$$

Следует учесть, что ψ'—решение уравнения

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial r}=0$$

Подобным же способом, как и для φ, можно получить

$$\Phi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Vt-l}^{Vt}\frac{q_1(x_1t)dx_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+r^2}}$$

На конусе в главном порядке

$$\Phi\simeq-\frac{1}{2\pi}q_1(x_1\,t)\ln\frac{1}{r}$$

Можно искать решение в конусе в виде ряда по полиномам Лежандра по угловой координате, причем в главном порядке получается

$$\psi'\simeq A\frac{3}{2}(Vt-x)^2-A\frac{r^2+(Vt-x)^2}{2}$$

где A — постоянная.

Из условий (23) можно получить

$$-\mu\varkappa\beta+\mu\frac{1}{2\pi r_k}q_1+\beta(\mu-1)H_0=-Ar_k\qquad(24)$$

$$-\frac{\varkappa}{2}\beta^2 \ln\frac{1}{r_k} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial q_1}{\partial x}\ln\frac{1}{r_k} + \beta\left(-\varkappa\beta + \frac{q_1}{2\pi r_k}\right)\times$$

$$\times(\mu-1)+\beta^2(\mu-1)H_0 = -2A(Vt-x) \qquad (25)$$

В силу малости Ar_k из (24) имеем

$$q_1 = \frac{(\mu\varkappa - \mu H_0 + H_0)\,2\pi(Vt-x)\beta^2}{\mu}, \quad A\sim\beta^2$$

Тогда для давления получаем

$$P_1 = -\left\{\frac{1}{2}\rho_0 V^2\beta^2\ln\beta + \rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\frac{H_0}{8\pi}\ln\beta\left(\varkappa - 2H_0 + \frac{2H_0}{\mu_0}\right)\beta^2\right\}$$

Поскольку жидкость несжимаема, здесь принято $\frac{1}{a_0^2} = 0$.

При $\mu_0 = 1$ $P_1 = -\frac{1}{2}\rho_0 V^2\beta^2\ln\beta$, являющееся главным членом в формуле для давления в жидкости без магнитного поля. Подобные же формулы в порядке $\beta^2\ln\beta$ получатся в сжимаемой среде.

Как видно из асимптотического решения, учет магнитных свойств меняет давление на конусе.

Полученные формулы позволяют определять значения $\frac{d\mu_0}{d\rho_0}$, $\frac{d^2\mu_0}{d\rho_0^2}$ по измерениям P на конусе.

Для смеси жидкостей, имеющих магнитные проницаемости μ' и $\bar\mu$, с малой концентрацией последней β', имеется приближенная формула

$$\mu_0 = \mu' + \frac{3(\bar\mu - \mu')\mu'\beta'}{\bar\mu + 2\mu'}$$

Для заданных μ', $\bar\mu$ и β', записав для плотности смеси

$$\rho_0 = (1-\beta')\rho' + \beta'\bar\rho$$

можно получить

$$\frac{d\mu_0}{d\rho_0} = \frac{3(\bar\mu - \mu')\mu'}{(\bar\mu + 2\mu')(\bar\rho - \rho')}$$

Отсюда

$$P_1 = -\left[\frac{1}{2}\rho_0 V^2 + \frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\rho_0}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{d\rho_0}\left(\rho_0\frac{d\mu_0}{d\rho_0} - 2\rho_0 + 2\right)\right]\beta^2\ln\beta$$

По заданным постоянным значениям μ_0, ρ_0 можно выяснять, возрастает ли давление.

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ԲԱՐԱԿ ԿՈՆԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Մ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է ոչ էլեկտրահաղորդիչ մագնիսական հեղուկի առանցքային մագնիսական դաշտով հաստատուն արագությամբ շարժվող կոնի վերաբերյալ խնդրի լուծումը։

Որոշվում է կոնի վրա ճնշման գլխավոր բաղադրիչը։

Ստացված արդյունքների համաձայն կարելի է փորձնական ճանապարհով որոշել հեղուկի հատկությունները։

THE STUDY OF MOTION OF A THIN CONE IN MAGNETIC FLUID

A. G. BAGDOEV, M. S. GRIGORIAN

Summary

The solution of the motion problem of a cone with constant velocity in a nonelectroconducting magnetic fluid in an axial magnetic field has been worked out. The principal addend in the formula for pressure on the cone has been found. The obtained results for the properties of fluid can be determined experimentally.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 533 с.
2. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1973, вып. 17, с. 221—229.
3. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика намагничивающихся жидкостей.—Итоги науки и техники, М.: 1981, т. 16.
4. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: МГУ, 1977. 299 с.
5. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела.—ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 951—953.

Институт механики АН Армянской ССР
Кировоканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
14.XII.1984