ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 1, 1987 Механика

УДК 539.3

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

АКОПЯН Н. З., БАГДАСАРЯН Г. Е.

Задача вынужденных колебаний тонкой идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле рассмотрена в работе [1], в которой показано существенное влияние напряженности магнитного поля на амплитуду резонансных колебаний.

В настоящей работе, исходя из линейных уравнений магнитоупругости тонких пластин [2], рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластинки-полосы конечной электропроводности в продольном магнитном поле. Исследовано и показано существенное влияние напряженности магнитного поля, проводимости материала пластинки, частоты внешней силы и толщины пластинки на характеристики вынужденных колебаний.

1. Рассмотрим тонкую изотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, отнесенную к декартовым координатам $x$, $y$, $z$ так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью $xy$. Пусть пластинка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводимостью $\sigma$ находится в вакууме и под действием поперечной нагрузки $P(x, t)$ колеблется во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}(H, 0, 0)$, направленном по оси $ox$. Граничные условия, нагрузка и геометрия пластинки таковы, что формой колебаний является цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными координатной линии $oy$.

Задача решается на основе следующих предположений: а) справедлива гипотеза магнитоупругости тонких тел [2] в виде, предложенном в работе [3]; б) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки и окружающей среды равны единице; в) влияние токов смещения пренебрежимо мало.

На основе принятых предположений в работе [3] получена следующая система интегро-дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \\
\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma\delta}{c}\left(\psi+\frac{H}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{1}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi, t)}{\xi-x}d\xi=0 \\
D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{2\sigma h}{c}H\left(\psi+\frac{H}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-P(x, t)=0
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

описывающая вынужденные колебания пластинки-полосы конечной проводимости в продольном магнитном поле.

В уравнениях (1.1) $w$—прогиб пластинки, $\psi$—тангенциальная компонента индуцированного в слое $|z|<h$ электрического поля, $f$—нормальная компонента индуцированного в слое $|z|<h$ магнитного поля, $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$—цилиндрическая жесткость, $E$—модуль упругости, $\nu$—коэффициент Пуассона, $\varepsilon$—коэффициент затухания при отсутствии магнитного поля, $\rho$—плотность материала пластинки, $c$—электродинамическая постоянная,

$$\gamma=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x\in[0, a] \\ 0 & \text{при} \quad x\notin[0, a] \end{cases}$$

$a$—ширина пластинки-полосы. В первых двух уравнениях $-\infty<x<\infty$, а в последнем—$x\in[0, a]$.

К системе уравнений (1.1) в каждой конкретной задаче необходимо присоединить обычные условия закрепления краев пластинки, начальные условия и условия на бесконечности ($f$ и $\psi$ стремятся к нулю при $|x|\to\infty$).

Как показывает точное решение системы (1.1) в случае бесконечной пластинки, член $\partial f/\partial x$ во втором уравнении имеет порядок $h/a$ по сравнению с последним членом этого уравнения [4]. Поэтому, оставаясь в пределах точности теории тонких пластинок, в дальнейшем им будем пренебрегать. Тогда из первых двух уравнений системы (1.1) путем применения обратного преобразования Гильберта и с учетом третьего уравнения определяем $f$ и $\psi$. Подставляя найденное значение $\psi$ в третье уравнение системы (1.1), задачу вынужденных колебаний пластинки в продольном магнитном поле приводим к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{4\sigma h}{c^2}\int_0^a \frac{\partial F}{\partial t}\frac{d\xi}{\xi-x}+\frac{2\sigma h H^2}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}=0$$

где

$$F=D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}-P(x, t) \tag{1.2}$$

с обычными краевыми условиями для $w$ на длинных сторонах $x=0$ и $x=a$ пластинки.

2. На основе (1.2) рассмотрим задачу вынужденных колебаний шарнирно опертой по краям $x=0$, $x=a$ пластинки-полосы шириною $a$ под действием нормально приложенной нагрузки $P(x, t)=P_1(x)\sin\omega t$.

Решение исходного уравнения (1.2), удовлетворяющего известным условиям шарнирного опирания, представим в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\sin\lambda_n x, \quad \lambda_n=\frac{n\pi}{a} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.2) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $w_n(t)$

$$L_m(w_m)+4\pi\sigma\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\frac{dL_n(w_n)}{dt}+\frac{\sigma H^2}{\rho c^2}\frac{dw_m}{dt}=$$

$$=A_m\sin\omega t+4\pi\sigma\omega B_m\cos\omega t \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.2}$$

где

$$L_k=\Omega_{0k}^2+\frac{d^2}{dt^2}+\varepsilon\frac{d}{dt},\quad \Omega_{0k}^2=\frac{D\lambda_k^4}{2\rho h}$$

$$a_{mn}=\frac{2h}{\pi a\lambda_m c^2}\int_0^a\int_0^a\frac{\cos\lambda_m x\sin\lambda_n\xi}{\xi-x}\,d\xi dx$$

$$A_m=\frac{1}{a\lambda_m\rho h}\int_0^a\cos\lambda_m x\,dP_1 \tag{2.3}$$

$$B_m=\frac{1}{\pi a\lambda_m\rho c^2}\int_0^a\int_0^a\frac{P_1(\xi)\cos\lambda_m x}{\xi-x}\,d\xi dx$$

$\Omega_{0k}$—частоты собственных колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля.

Если возмущающая сила отсутствует ($A_m=B_m=0$), то уравнения (2.2) являются однородными и характеризуют собственные магнитоупругие колебания конечнопроводящей пластинки в продольном магнитном поле. Представляя решение указанной однородной системы в виде

$$w_n(t)=c_n\exp(i\omega_0 t) \tag{2.4}$$

где $\omega_0$—частота магнитоупругих колебаний, для определения неизвестных коэффициентов $c_n$ получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений [5]:

$$[\gamma_m^2+\Omega^2+(\gamma+\alpha\sigma_0)\Omega]c_m+\sigma_0\Omega\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}(\gamma_n^2+\Omega^2+\gamma\Omega)c_n=0$$

где

$$\gamma_k=\frac{\Omega_{0k}}{\Omega_{01}},\quad \Omega=\frac{i\omega_0}{\Omega_{01}},\quad \gamma=\frac{\varepsilon}{\Omega_{01}},\quad \alpha=\frac{V_A^2}{c^2}$$

$$V_A^2=\frac{H^2}{4\pi\rho},\quad b_{mn}=a_{mn}\Omega_{01}^2,\quad \sigma_0=\frac{4\pi\sigma}{\Omega_{01}} \tag{2.5}$$

Приравнивая определитель однородной системы (2.5) нулю, приходим к следующему характеристическому уравнению относительно частоты $\Omega$

$$\|[\gamma_m^2+\Omega^2+(\gamma+\alpha\sigma_0)\Omega]\delta_{mn}+\sigma_0\Omega(\gamma_n^2+\Omega^2+\gamma\Omega)b_{mn}\|=0 \tag{2.6}$$

где $\delta_{mn}$—символ Кронекера.

Легко показать, что определитель (2.6) относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из (2.6) для определения первой частоты магнитоупругих колебаний получается уравнение

$$\sigma_0\Omega^3+(\beta+\sigma_0\gamma)\Omega^2+[\sigma_0(1+\alpha\beta)+\beta\gamma]\Omega+\beta=0 \tag{2.7}$$

где

$$\beta=\frac{1}{a_{11}\Omega_{01}^2}$$

Уравнение типа (2.7) при $\varepsilon=0$ получено и исследовано в работах многих авторов. Показано существенное влияние напряженности магнитного поля и проводимости материала пластинки как на частоту, так и на демпфирование колебаний.

Вернемся к основной задаче вышеуказанных колебаний пластинки, ограничиваясь первым приближением. Тогда из системы (2.2) в случае $P_1(x)=P_0\sin\lambda_1 x$ получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\left(\beta+\sigma_0\frac{d}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2w_1}{d\tau^2}+\gamma\frac{dw_1}{d\tau}+w_1+w_c\sin\theta\tau\right)+\sigma_0\alpha\beta\frac{dw_1}{d\tau}=0 \tag{2.8}$$

где

$$\tau=\Omega_{01}t,\quad \theta=\omega/\Omega_{01},\quad w_c=P_0/2\rho h\Omega_{01}^2$$

$w_c$ — прогиб пластинки от статически действующей вертикальной силы $P_0\sin\lambda_1 x$.

Частное решение уравнения (2.8), описывающее установившиеся вынужденные колебания, имеет вид

$$w_1=w_c\sqrt{\beta^2+\sigma_0^2\theta^2}\{(\beta^2+\sigma_0^2\theta^2)[(\gamma\theta)^2+(1-\theta^2)^2]+$$
$$+\sigma_0\alpha\beta\theta^2[2\beta\gamma+2\sigma_0(1-\theta^2)+\sigma_0\alpha\beta]\}^{-0,5}\sin(\theta\tau-\varphi) \tag{2.9}$$

где угол $\varphi$, представляющий сдвиг фаз между возмущающей силой и вынужденными колебаниями, определяется из соотношения [6]

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{(\beta^2+\sigma_0^2\theta^2)\gamma+\sigma_0\alpha\beta^2}{(\beta^2+\sigma_0^2\theta^2)(1-\theta^2)+\sigma_0\alpha\beta\theta^2}\theta \tag{2.10}$$

Как видно из (2.9), амплитуда вынужденных колебаний получается путем умножения статического прогиба $w_c$ на абсолютное значение множителя

$$K=\left\{(\gamma\theta)^2+(1-\theta^2)^2+\frac{2\sigma_0\alpha\beta\theta^2}{\beta^2+\sigma_0^2\theta^2}[\beta\gamma+\sigma_0(1-\theta^2)+0,5\sigma_0\alpha\beta]\right\} \tag{2.11}$$

который называется динамическим коэффициентом [6]. При отсутствии магнитного поля ($\alpha=0$) из (2.11) для динамического коэффициента получим известное выражение

$$K_0=[(\gamma\theta)^2+(1-\theta^2)^2]^{-0,5} \tag{2.12}$$

Для большей наглядности сначала рассмотрим случай идеально проводящего материала ($\sigma_0 \to \infty$). В этом случае из (2.11) легко получить следующее выражение для динамического коэффициента

$$K_1 = [(\gamma\theta)^2 + (1-\theta^2)^2 + 2\alpha\beta(1-\theta^2) + (\alpha\beta)^2]^{-0,5} \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.13) с (2.12), можем записать

$$K_1 = K_0 \left[ 1 + \frac{2\alpha\beta(1-\theta^2) + (\alpha\beta)^2}{(1-\theta^2)^2 + (\gamma\theta)^2} \right]^{-0,5} \tag{2.14}$$

Рассматривая (2.13) или (2.14), легко заметить, что зависимость динамического коэффициента от параметра $\alpha$, характеризующего напряженность магнитного поля, является монотонно убывающей, если $\theta \leqslant 1$. Для этого случая ($\theta \leqslant 1$) на основании формулы (2.14) проведены вычисления значения относительного динамического коэффициента в зависимости от напряженности магнитного поля при различных значениях $s = 2h/a$. Здесь и в дальнейшем при расчетах принято: $E = 1{,}1 \cdot 10^{12}$ дин/см$^2$, $a = 10$ см, $\rho = 8{,}93$ г/см$^3$, $\nu = 0{,}36$, $\psi_0 = 0{,}03$, где $\psi_0 = 2\pi\varepsilon/\Omega_{01}$ — относительное рассеяние энергии вследствие конструкционного демпфирования. Результаты подсчета значений $K_1/K_0$ приведены в табл. 1 и на фиг. 1, причем пунктирные линии соответствуют случаю $\theta^2 = 0{,}9$, а сплошные линии — случаю $\theta = 1$ (случай резонанса в отсутствии магнитного поля). Рассматривая таблицу и построенные кривые, замечаем, что при наличии магнитного поля амплитуда вынужденных колебаний существенно уменьшается и это влияние намного усиливается в случае резонансных колебаний.

*Таблица 1*

Значения $K_1/K_0$

| | $10^{-4} \cdot H$ (э) / $10^2 \cdot s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta^2 = 0{,}9$ | 1 | 1 | $3{,}1 \cdot 10^{-2}$ | $8 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ | $2 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ |
| | 5 | 1 | 0,802 | 0,502 | 0,309 | 0,201 | 0,139 |
| | 9 | 1 | 0,959 | 0,855 | 0,724 | 0,595 | 0,485 |
| $\theta^2 = 1$ | 1 | 1 | $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}8 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}7 \cdot 10^{-4}$ | $9{,}6 \cdot 10^{-5}$ | $6{,}1 \cdot 10^{-5}$ |
| | 5 | 1 | 0,169 | $4{,}8 \cdot 10^{-2}$ | $2{,}1 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ | $7{,}7 \cdot 10^{-3}$ |
| | 9 | 1 | 0,746 | 0,270 | 0,124 | $7 \cdot 10^{-2}$ | $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ |

Если же частота вынуждающей силы велика по сравнению с собственной частотой ($\theta > 1$), то нарушается монотонная зависимость динамического коэффициента от напряженности магнитного поля. В этом случае динамический коэффициент принимает максимальное значение при $\alpha = (\theta^2 - 1)/\beta$ и равняется

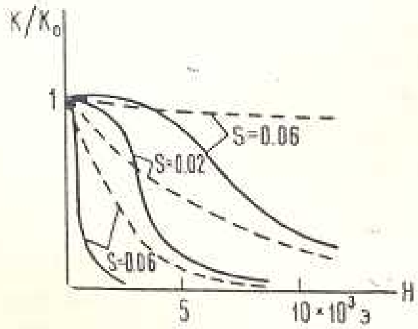
$$\max_{(\alpha)} K_1 = (\gamma\theta)^{-1}, \quad (\theta > 1) \tag{2.15}$$

На фиг. 2 приведены графики зависимости $K_1/K_0$ от напряженности магнитного поля при различных $s$, когда $\theta^2 = 1{,}1$, откуда видно, что в отличие от предыдущего случая ($\theta \leqslant 1$) здесь наличие магнитного поля может привести к существенному увеличению амплитуды вынужденных колебаний.

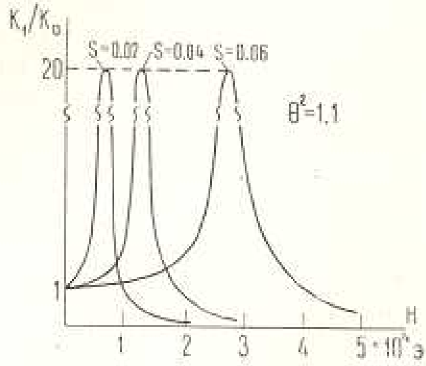
Перейдем к исследованию зависимости величины $K_1$ от частоты вынуждающей силы при фиксированных значениях напряженности магнитного поля. Из (2.13) видно, что динамический коэффициент $K_1$ как функция величины $\theta$ имеет максимум при $\theta^2 = 1+\alpha\beta-0{,}5\,\gamma^2$, который равен

$$\max_{(\theta)} K_1 = \frac{1}{\gamma\sqrt{1+\alpha\beta}} \tag{2.16}$$

где учтено, что $\gamma^2 \ll 1$.




Фиг. 1




Фиг. 2

Из (2.16) видно, что величина $\gamma^{-1}$ является максимальным значением динамического коэффициента по $\theta$ при отсутствии магнитного поля ($\alpha=0$), то есть

$$\max_{(\theta)} K_0 = \gamma^{-1}$$

В силу этого формулу (2.16) можно представить в виде

$$\frac{\max\limits_{(\theta)} K_1}{\max\limits_{(\theta)} K_0} = \gamma \max_{(\theta)} K_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\beta}} \tag{2.17}$$

Зависимость величины $\gamma \max\limits_{(\theta)} K_1$ от $s$ и $H$ приведена в табл. 2 и на фиг. 3.

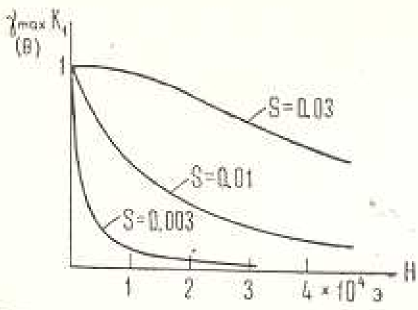
Рассматривая кривые, изображенные на фиг. 3, замечаем, что наложением магнитного поля с напряженностью порядка $10^4$э можно в несколько сотен раз уменьшить максимальную амплитуду вынужденных колебаний.

До сих пор рассматривали влияние магнитного поля на характеристики вынужденных колебаний, принимая модель идеального проводника. Рассмотрим теперь аналогичные вопросы в случае конечнопроводящего материала, опираясь на формулу (2.11). С этой целью на фиг. 4 представлен график зависимости относительного динамического коэффициента $K/K_0$ от напряженности магнитного поля при различных значениях относительной частоты: $\theta^2=0,9$, $\theta^2=1$, $\theta^2=1,1$. Представленные кривые построены по формулам (2.11) и (2.12) для медной пластинки ($\sigma=5,3\cdot10^{17}$ $c^{-1}$) при $s=0,02$.

*Таблица 2*

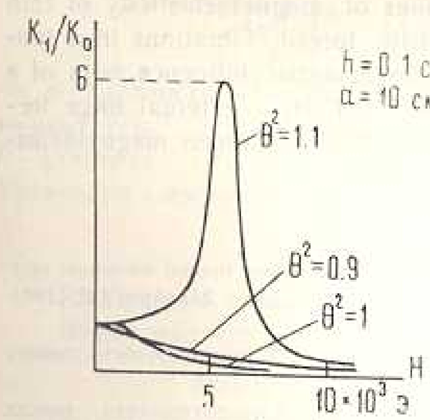
Значения $\gamma_{\max\,(\theta)} K(s,H)$

| $10^2 s$ \ $10^{-4}H$ (э) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 1 | 0,093 | 0,047 | 0,032 | 0,023 | 0,019 |
| 1 | 1 | 0,494 | 0,273 | 0,186 | 0,141 | 0,113 |
| 3 | 1 | 0,947 | 0,828 | 0,701 | 0,594 | 0,508 |
| 5 | 1 | 0,988 | 0,954 | 0,904 | 0,846 | 0,786 |
| 7 | 1 | 0,995 | 0,982 | 0,962 | 0,935 | 0,903 |
| 9 | 1 | 0,998 | 0,992 | 0,981 | 0,968 | 0,951 |

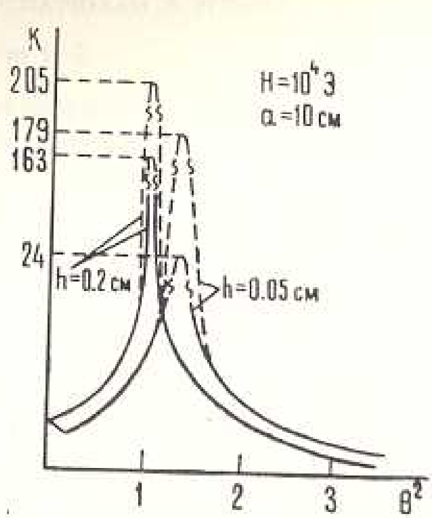



Фиг. 3

Сравнивая фиг. 1,2 с фиг. 4 замечаем: а) зависимость динамического коэффициента от напряженности магнитного поля для конечнопроводящего материала имеет качественно аналогичную картину, что и в случае идеального проводника; б) модель идеального проводника дает завышенное значение для максимума динамического коэффициента и увеличивает скорость убывания амплитуды вынужденных колебаний.




Фиг. 4




Фиг. 5

Зависимость динамического коэффициента от частоты вынуждающей силы при $H=10^4$э показана на фиг. 5. Сплошные линии построены на основе формулы (2.11) и соответствуют конечному проводнику, а пунктирные линии—на основе формулы (2.13) и соответствуют идеальному проводнику.

Из фиг. 5 видно: а) в случае конечнопроводящего материала, в отличие от идеального проводника, при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности динамический коэффициент вначале уменьшается, достигая минимума для определенного значения $b$, после чего картина зависимости такая, как и в случае идеального проводника, б) как и выше, модель идеального проводника дает завышенные результаты.

## ԸՆԴԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Պ. Զ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

### Ամփոփում

*Աշխատանքում, ելնելով բարակ սալերի մագնիսաառաձգականության տեսության գծային հավասարումներից, դիտարկվում են ընդերկայնական մագնիսական դաշտում վերջավոր էլեկտրահաղորդիչ բարակ սալ-շերտի ստիպողական տատանումները։*

*Հետազոտված է և ցույց է տրված մագնիսական դաշտի լարվածության, սալի նյութի հաղորդականության, արտաքին ուժի հաճախականության և սալի հաստության էական ազդեցությունը ստիպողական մագնիսաառաձգական տատանումների բնութագրիչների վրա։*

## FORCED VIBRATIONS OF FINITE CONDUCTIVE PLATE IN A LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

P. Z. HAKOPIAN, G. E. BAGDASARIAN

### Summary

In the work based on linear equations of magnetoelasticity of thin plates, the finite conductive thin plate-strip forced vibrations in a longitudinal magnetic field is considered. The essential influence both of a magnetic field intensity, plate material conductivity, external force frequencies and plate thickness upon characteristics of forced magnetoelastic vibrations have been investigated and shown.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Вынужденные колебания тонкой идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле.—Докл. АН АрмССР, 1985, т. 80, №1, с. 28—32.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
3. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной.—Уч. записки ЕГУ, 1977, №2, с. 32—48.
4. *Багдасарян Г. Е.* К теории колебаний и устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле.—Докл. АН АрмССР, 1975, т. *61*, № 5, с. 275—283.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
6. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.—М: Физматгиз, 1959. 439 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию 14.1.1986