

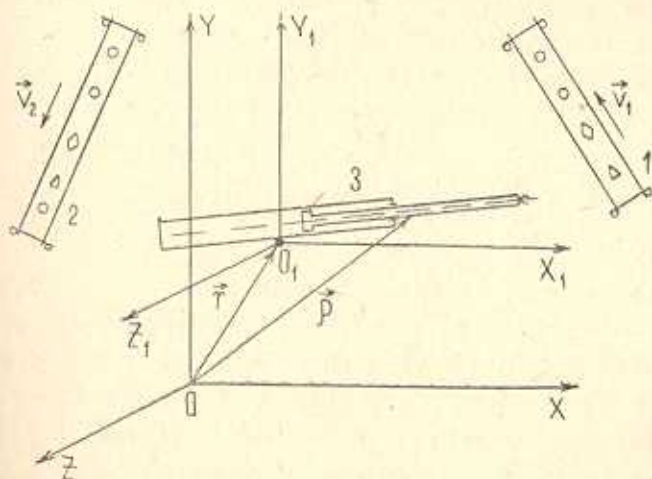
УДК 62.50

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА, ОБСЛУЖИВАЕМОГО МАНИПУЛЯЦИОННЫМ РОБОТОМ

ГУКАСЯН А. А.

Во многих областях современной техники при создании гибких автоматизированных линий широко используются манипуляционные роботы для выполнения различных технологических операций. Разработка эффективных режимов управления роботами представляет собой актуальную задачу. Вопросы математического моделирования, а также построения алгоритмов управления движением манипуляторов изложены в работах [1—6] и др. В работе на основе известных методов теории оптимального управления исследуются вопросы математического моделирования технологического процесса, где одним из основных элементов является манипулятор. Приведена постановка и некоторые частные решения задачи оптимального обслуживания манипулятором конвейеров.

1. Описание управляемого процесса. Рассматривается управляемый технологический процесс, который состоит из главного конвейера 1, вспомогательного конвейера 2, манипулятора 3 (фиг. 1). Задача манипулятора состоит в том, что он должен оптимальным образом переложить нужные детали с главного конвейера на вспомогательный конвейер. Для описания этого процесса введем инерциальную  $OXYZ$  и не-



Фиг. 1

инерциальную (связанную с манипулятором)  $O_1X_1Y_1Z_1$  системы координат. Пусть главный конвейер движется относительно системы  $OXYZ$  со скоростью  $v_1$ , а вспомогательный конвейер—со скоростью  $v_2$ . Манипулятор, обслуживающий работу конвейеров, в общем случае может быть многосленным. Здесь рассматривается только управляемое движение последнего звена манипулятора при заданном движении его основания. Все движения рассматриваются в плоскости  $XOY$ . Последнее звено манипулятора состоит из направляющего цилиндра и руки (стрелы) со схватом. Манипулятор имеет две степени подвижности, отвечающие перемещению стрелы вдоль направляющей и повороту направляющей вокруг оси вращения. Указанные движения осуществляются при помощи линейного электромеханического привода и пневмопривода. Электромеханический привод расположен в основании (в точке  $O_1$ ) и содержит двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. Обобщенные координаты, соответствующие степеням подвижности, следующие:  $\varphi$ —угол поворота направляющей,  $\theta$ —угол поворота ротора электродвигателя относительно оси вращения  $O_1Z_1$  ( $\theta=n\varphi$ ),  $n$ —коэффициент передачи редуктора электропривода,  $x(t)$ —расстояние центра масс стрелы до оси вращения в момент времени  $t$ . Управление системой осуществляется при помощи момента электромагнитных сил  $M(t)$ , приложенных к ротору электродвигателя относительно оси его вращения, и силы  $p(t)$  пневмопривода, приложенной к стреле и направленной вдоль оси отверстия направляющей.

Введем обозначения:  $l$ —полная длина стрелы,  $m_1$ —масса ротора электродвигателя,  $I_1$ —момент инерции ротора относительно его центра масс,  $m_2$ —масса цилиндра,  $I_2$ —момент инерции цилиндра относительно оси, параллельной  $OZ$  и проходящей через его центр масс,  $m_3$ —масса стрелы;  $I_3$ —момент инерции стрелы относительно оси, параллельной  $OZ$  и проходящей через ее центр масс,  $\vec{\omega}$ —вектор угловой скорости вращения цилиндра,  $\vec{r}$ —радиус-вектор основания последнего звена манипулятора относительно точки  $O$ ,  $\vec{\rho}$ —радиус-вектор центра масс стрелы относительно точки  $O$ .

В неинерциальной системе отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$  векторы  $\vec{r}$ ,  $\vec{\rho}$ ,  $\vec{\omega}$  имеют следующие координатные представления:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho} = \begin{pmatrix} x_0(t) + x(t) \cos \varphi \\ y_0(t) + x(t) \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Положение детали на главном конвейере и ее скорость, а также местоположение детали на вспомогательном конвейере и ее скорость в системе  $O_1X_1Y_1Z_1$  определим соответственно угловыми ( $\varphi_*$ ,  $\dot{\varphi}_*$ ), ( $\varphi_{**}$ ,  $\dot{\varphi}_{**}$ ) и линейными ( $l_*$ ,  $\dot{l}_*$ ), ( $l_{**}$ ,  $\dot{l}_{**}$ ) переменными.

2. Уравнения движения. Уравнения Лагранжа, описывающие движение манипулятора, имеют вид

$$[I + 4m_3x^2 + (m_1n^2 + m_2 + m_3)(x_0^2 + y_0^2) + 4m_3x(y_0 \sin \varphi + x_0 \cos \varphi)]\ddot{\varphi} +$$

$$40 \quad + m_3(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)\ddot{x} + [8m_3x + 4m_3(y_0 \sin \varphi + x_0 \cos \varphi)]\dot{x}\dot{\varphi} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ [2(m_1 n^2 + m_2 + m_3)(x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0) + 4m_3 x (\dot{y}_0 \sin \varphi + \dot{x}_0 \cos \varphi)] \dot{\varphi} + \\
 &+ 2m_3 x (\dot{y}_0 \cos \varphi - \dot{x}_0 \sin \varphi) + 2m_3 x (y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \\
 &+ (m_1 n + m_2 + m_3)(x_0 \ddot{y}_0 - y_0 \ddot{x}_0) = M(t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 &m_3 \ddot{x} + m_3 (x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi) \ddot{\varphi} - m_3 (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 - \\
 &- 4m_3 x \dot{\varphi}^2 + m_3 (\ddot{x}_0 \cos \varphi + \dot{x}_0 \sin \varphi) - 2m_3 (\dot{y}_0 \cos \varphi - \dot{x}_0 \sin \varphi) \dot{\varphi} = P(t)
 \end{aligned}$$

где  $I = n^2 I_1 + I_2 + I_3$ ;  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0$  — соответственно проекции вектора скорости и ускорения основания в системе координат  $OXYZ$ .

К уравнениям (2.1) добавим уравнение электродвигателя [7]:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + kn\dot{\varphi} = u \tag{2.2}$$

Здесь  $L$  — коэффициент индуктивности обмотки ротора электродвигателя,  $i$  — ток в цепи ротора,  $R$  — электрическое сопротивление обмотки ротора электродвигателя,  $u$  — напряжение. Между моментом сил  $M(t)$ , развиваемым электроприводом, и током  $i$  имеется следующая связь:  $M = ki$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности между электрическим током в цепи ротора электродвигателя и моментом.

3. *Постановка задачи оптимального управления.* Пусть в момент времени  $T_1$  ( $T_1$  задано) положение и скорость детали на главном конвейере относительно системы  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  определяются величинами  $(\varphi_*, \dot{\varphi}_*), (l_*, \dot{l}_*)$ . Требуется, чтобы манипулятор оптимальным образом подошел к детали за время  $t \in [T_0, T_1]$  (в момент времени  $T_1$  происходит захват детали) и оптимальным образом за время  $t \in [T_1, T_2]$  переложил деталь на ее местоположение на вспомогательном конвейере. После этого манипулятор должен оптимальным образом совершить обратное движение и повторить цикл. Предполагаем, что масса переносимых деталей мала по сравнению с массами основных частей манипулятора и ею можно пренебречь.

Задачу управления движением системы (2.1), (2.2) можно сформулировать следующим образом. Требуется найти управляющие функции в виде программы  $u = u(t), p = p(t)$  или в виде синтеза  $u = u(t, \varphi^0, \dot{\varphi}^0), p = p(t, x^0, \dot{x}^0)$  такие, чтобы в некоторый момент времени  $t = T_1$  или  $t = T_2$  ( $T_1, T_2 < \infty$ ) выполнялись заданные конечные условия

$$\varphi(T_1) = \varphi_*, \quad \dot{\varphi}(T_1) = \dot{\varphi}_*, \quad x(T_1) = l_*, \quad \dot{x}(T_1) = \dot{l}_* \tag{3.1}$$

или

$$\varphi(T_2) = \varphi_{**}, \quad \dot{\varphi}(T_2) = \dot{\varphi}_{**}, \quad x(T_2) = l_{**}, \quad \dot{x}(T_2) = \dot{l}_{**}$$

На функции  $u$  и  $p$  могут быть наложены дополнительные условия: ограниченность, гладкость и др., то есть управляющие функции  $u$  и  $p$  выбираются из некоторого допустимого класса  $u \in \{U\}, p \in \{P\}$ . Кроме того, потребуем, чтобы достигал минимума функционал, характеризующий качество управления  $J = J[U, P] \rightarrow \min_{u, p}$  или  $J = T \rightarrow \min_{u, p}$ .

Функции  $\dot{x}_0(t), \dot{y}_0(t)$  также могут быть заданы как кинематическое управление и выбраны из условий

$$\dot{r} = \vec{v}, \quad \dot{v} = \vec{w}, \quad \vec{w} \in \{W\}$$

Здесь  $\{W\}$  — заданное множество; управление  $\vec{w}$  может быть выбрано из условия оптимальности совместно с  $u$  и  $p$ :

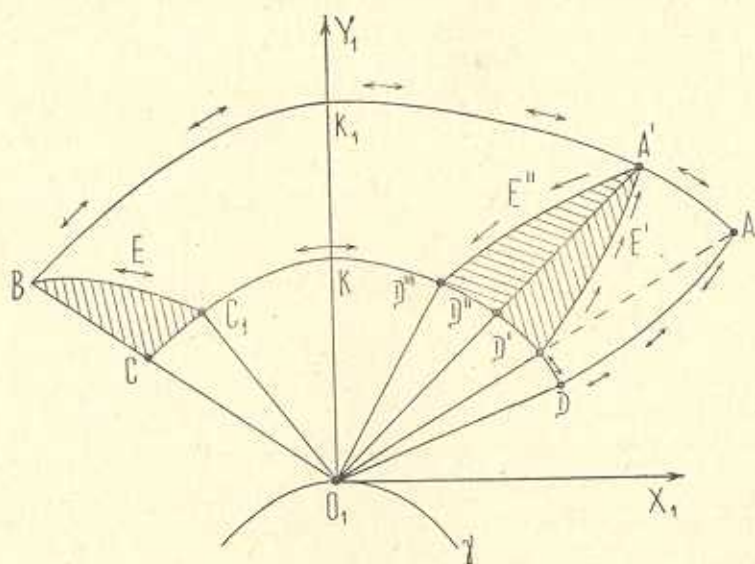
$$J = J|U, P, W| \rightarrow \min; \quad J = T \rightarrow \min_{u, p, w} \quad (3.2)$$

С точки зрения технологического процесса немаловажным критерием качества является также рациональное использование технологического участка. Этот критерий является геометрическим и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение. Сформулируем этот критерий следующим образом. Пусть решение задачи оптимального управления движением системы (2.1), (2.2), (3.1), (3.2) не единственно, то есть оптимальные управления  $u_{\text{опт}}$ ,  $p_{\text{опт}}$ ,  $w_{\text{опт}}$  принадлежат некоторым множествам оптимальных управлений  $u_{\text{опт}} \in \{U_{\text{опт}}\}$ ,  $p_{\text{опт}} \in \{P_{\text{опт}}\}$ ,  $w_{\text{опт}} \in \{W_{\text{опт}}\}$ . Обозначим через  $s$  максимальную площадь области, заметаемой манипулятором при оптимальном управлении. Требуется найти такие оптимальные управления  $u^*_{\text{опт}} \in \{U_{\text{опт}}\}$ ,  $p^*_{\text{опт}} \in \{P_{\text{опт}}\}$ ,  $w^* \in \{W_{\text{опт}}\}$ , которые обеспечивают минимальное значение  $s$

$$s^* = s(u^*, p^*, w^*) = \min_{u_{\text{опт}}, p_{\text{опт}}, w_{\text{опт}}} s(U_{\text{опт}}, P_{\text{опт}}, W_{\text{опт}}) \quad (3.3)$$

Ниже рассматривается случай, когда основание манипулятора (точка  $O_1$ ) движется по окружности.

4. Алгоритм решения задачи оптимального обслуживания. Изменение кинематики манипулятора при часто встречающемся управлении схематично указано на фиг. 2. Основание манипулятора, точка  $O_1$ , совершает движение по заданной траектории  $\gamma$ , а кромка направляющего цилиндра движется по траектории  $DKC$ . Пусть решение задачи



Фиг. 2

оптимального обслуживания принадлежит классу одновременного управления по двум степеням подвижности. Во время перехода схвата манипулятора из точки  $A$ , где находится деталь, в точку  $B$  ее местоположения, при одновременном повороте и движении стрелы (в начальный момент времени  $x(T_0) = \dot{x}(T_0) = 0$ ) манипулятора максимальная заметаемая площадь ( $s_1$ ) равна площади области  $O_1DAK_1BCO_1$ . Рассматриваем также решение задачи оптимального обслуживания в классе управлений, когда происходит поэтапное включение приводов, то есть поворот стрелы и ее движение происходят поочередно. В этом случае допускается захват детали в окружности точки  $A$ , то есть в точке  $A'$ . Сначала оптимально поворачиваем направляющий цилиндр до определенного угла (кромка направляющего цилиндра совпадает с точкой  $D'$ ), потом происходит оптимальное движение стрелы с угловой скоростью движения конвейера до совпадения схвата с точкой  $A'$ . После чего аналогично происходит поэтапное оптимальное движение стрелы до совпадения положения схвата с точкой  $B$ . В этом случае максимальная заметаемая площадь ( $s_2$ ) равна площади области  $O_1DD'E'A'E''D''KC_1EBCO_1$ , где  $s_2 \ll s_1$ . Поэтому для удовлетворения (частичного удовлетворения) условию (3.3) необходимо пользоваться управлением второго типа, который дает возможность упростить уравнение движения (2.1).

Сформулируем задачи оптимального управления движением, которые необходимо решать на каждом этапе. Пусть в начальный момент времени  $t = T_0$  стрела находится в полном выдвинутом положении и  $x = 0$ . Основание манипулятора (точка  $O_1$ ) движется по окружности  $x_0 = a \cos \alpha(t)$ ,  $y_0 = a \sin \alpha(t)$ ;  $\alpha(t)$  изменяется линейным образом  $\dot{\alpha}(t) = k_1 t + k_2$ , тогда первое уравнение (2.1) принимает вид

$$(I + ma^2)\ddot{\varphi} + m'a^2k_1 = M(t) \quad (4.1)$$

где  $I = I_1 n^2 + I_2 + I_3$ ,  $m = m_1 n^2 + m_2 + m_3$ ,  $m' = m_1 n + m_2 + m_3$

Учитывая, что  $M = ik$ , из (4.1) и (2.2) получим

$$\ddot{\varphi} + a_1 \dot{\varphi} + a_2 \varphi = v(t) \quad (4.2)$$

где  $a_1 = R/L$ ,  $a_2 = nk^2/L(I + ma^2)$ ,  $v(t) = (ku - a^2 k_1 m' R)/L(I + a^2 m)$  (4.3)

Из описания алгоритма управления следует, что на первом этапе управления необходимо оптимальным образом повернуть направляющий цилиндр, движение которого описывается уравнением (4.1). Задачу на этом этапе можно сформулировать следующим образом: пусть в начальный момент времени  $t = T_0$  положение направляющего цилиндра определяется величинами ( $T_0 = 0$ )

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0, \quad \ddot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}_0 \quad (4.4)$$

требуется найти такое оптимальное управление  $v(t) \in \{V\}$ , которое обеспечивает приведение системы (4.2), (4.4) за время  $t \in [0, T_1]$  из начального состояния в заданное конечное состояние

$$\varphi(T_1) = \varphi_*, \quad \dot{\varphi}(T_1) = \dot{\varphi}_*, \quad \ddot{\varphi}(T_1) = \ddot{\varphi}_* \quad (4.5)$$

с минимизацией в процессе управления функционала

$$J = \int_0^{T_1} v^2(t) dt \rightarrow \min_{v(t)} \quad (4.6)$$

Функция Гамильтона задачи (4.2)–(4.6) имеет вид [8]

$$H = -v^2 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + (v - a_1 q_1 - a_2 q_2) p_3$$

где  $q = (q_1, q_2, q_3)$  — вектор вспомогательных переменных,  $p = (-1, p_1, p_2, p_3)$  — вектор сопряженных переменных и удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.7)$$

В соответствии с принципом максимума оптимально управляющая функция представляется в следующем виде:

$$v(t) = B_3(C_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) + C_3) \quad (4.8)$$

здесь  $\lambda_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ ,  $a_1^2 > 4a_2$ ,  $B_3 = 1/2a_2$ .

Функция  $\varphi(t)$  определяется из (4.2) и с учетом (4.8) принимает вид

$$\varphi(t) = A_1 + A_2 \exp(-\lambda_2 t) + A_3 \exp(-\lambda_1 t) + C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + C_3 B_3 t \quad (4.9)$$

где  $B_1 = B_3/(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2)$ ,  $B_2 = B_3/(\lambda_2^2 + a_1 \lambda_2 + a_2)$

Постоянные  $A_i, C_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) определяются из условий (4.4), (4.5). Из (4.3) и (4.8) следует, что оптимальное изменение электрического напряжения, подаваемого на вход электродвигателя, имеет вид

$$u(t) = LB_3(I + a^2 m)(C_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t) + C_3) / k + a^2 k_1 m' R / k \quad (4.10)$$

На втором этапе происходит поворот направляющего цилиндра со скоростью  $\dot{\varphi}_*$  и одновременно оптимальное выдвижение стрелы. Второе уравнение системы (2.1) в этом случае принимает вид

$$m_3 \ddot{x} - m_3(x_0 \cos \varphi_* + y_0 \sin \varphi_*) \dot{\varphi}_*^2 - 4m_3 x \varphi_*^2 + m_3(\ddot{x}_0 \cos \varphi_* + \ddot{y}_0 \sin \varphi_*) - \\ - 2m_3(\dot{y}_0 \cos \varphi_* - \dot{x}_0 \sin \varphi_*) \dot{\varphi}_* = l(t), \quad |p(t)| \leq P_0 \quad (4.11)$$

Пусть величины  $\varphi_*(t)$ ,  $\dot{\varphi}_*(t)$  имеют порядок  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ),  $t \in [T_1, T_2] \sim 1$ , тогда, обозначая через  $\bar{\varphi}_*$  среднюю величину угла поворота цилиндра во время движения стрелы, можно в первом приближении уравнение (4.11) записать в виде

$$\ddot{x}(t) = F(t) \quad (4.12)$$

где  $F(t) = p(t)/m_3 - W_0$ ,  $W_0 = x_0 \cos \bar{\varphi}_* - \dot{y}_0 \sin \bar{\varphi}_*$

Если обозначить через  $F_0$  величину  $P_0/m_1$ , ограничение на  $F(t)$  принимает вид

$$-F_0 - W_0 \leq F(t) \leq F_0 - W_0 \quad (4.13)$$

Ставится следующая задача оптимального быстрогодействия. Пусть в начальный момент времени  $t = T_1$  положение стрелы определяется соотношениями

$$x(T_1) = 0, \quad \dot{x}(T_1) = 0 \quad (4.14)$$

Требуется найти такое оптимальное программное управление  $F(t)$ , которое за кратчайшее время обеспечивает приведение системы (4.12), (4.13) из начального состояния (4.14) в заданное конечное положение.

$$x(T_2) = l_*(T_2) - l/2, \quad \dot{x}(T_2) = l_*(T_2) \quad (4.15)$$

Здесь, более того, можно исследовать задачу оптимального синтеза о быстрейшем попадании в начало координат из произвольного начального состояния [8].

Обозначая  $x(t) = q^1$ ,  $\dot{x}(t) = q^2$ , уравнение (4.12) можно написать в виде

$$\dot{q}^1 = q^2, \quad \dot{q}^2 = F(t) \quad (4.16)$$

Функция Гамильтона  $H$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = p^1 q^2 + p^2 (p(t)/m_2 - W_0) \quad (4.17)$$

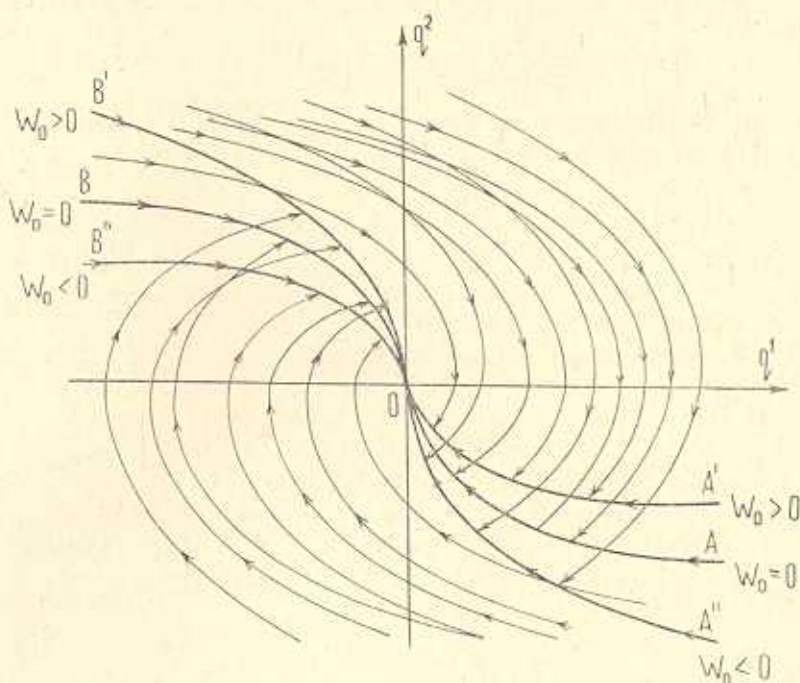
Для вспомогательных переменных  $p^1$ ,  $p^2$  получаем:  $p^1 = c_1$ ,  $p^2 = c_2 - c_1 t$  ( $c_1$ ,  $c_2$  — постоянные). Оптимальное уравнение  $F(t)$  зависит от  $\text{sign}(c_2 - c_1 t)$  и является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения  $\pm F_0 - W_0$ . Для отрезка времени, на котором  $F = F_0 - W_0$ , имеем

$$q^1 = \frac{1}{2} (q^2)^2 / (F_0 - W_0) - c_1^2 / 2(F_0 - W_0) + c_1 \quad (4.18)$$

Аналогично, для отрезка времени, на котором  $F = -F_0 - W_0$ , получаем

$$q^1 = -\frac{1}{2} (q^2)^2 / (F_0 + W_0) + c_1^2 / 2(F_0 + W_0) + c_1 \quad (4.19)$$

На фиг. 3 в случае  $F_0 > W_0$  изображено все семейство полученных фазовых траекторий, где  $AO$ ,  $A'O$ ,  $A''O$  — соответственно дуги параболы  $q^1 = (q^2)^2 / 2(F_0 - W_0)$  при  $W_0 = 0$ ,  $W_0 > 0$ ,  $W_0 < 0$ , расположенные в нижней полуплоскости  $q^1$ ,  $q^2$ ;  $BO$ ,  $B'O$ ,  $B''O$  — соответственно дуги параболы  $q^1 = -(q^2)^2 / 2(F_0 + W_0)$  при  $W_0 = 0$ ,  $W_0 > 0$ ,  $W_0 < 0$ , расположенные в верхней полуплоскости  $q^1$ ,  $q^2$ . Линиями переключения управляющей функции  $F(t)$  являются  $AOB$ ,  $A'OB'$ ,  $A''OB''$ . Обозначая через  $v(q^1, q^2) = v(q(t))$  функцию, заданную на фазовой плоскости  $q^1$ ,  $q^2$ , можно решение рассматриваемой задачи истолковать следующим образом:



Фиг. 3

$$v(q(t)) = \begin{cases} F_0 - W_0 & \text{при } W_0 = 0 & \text{ниже линии } AOB \text{ и на дуге } AO \\ -F_0 - W_0 & \text{при } W_0 = 0 & \text{выше линии } AOB \text{ и на дуге } BO \\ F_0 - W_0 & \text{при } W_0 > 0 & \text{ниже линии } A'OB' \text{ и на дуге } A'O \\ -F_0 - W_0 & \text{при } W_0 > 0 & \text{выше линии } A'OB' \text{ и на дуге } B'O \\ F_0 - W_0 & \text{при } W_0 < 0 & \text{ниже линии } A''OB'' \text{ и на дуге } A''O \\ -F_0 - W_0 & \text{при } W_0 < 0 & \text{выше линии } A''OB'' \text{ и на дуге } B''O \end{cases}$$

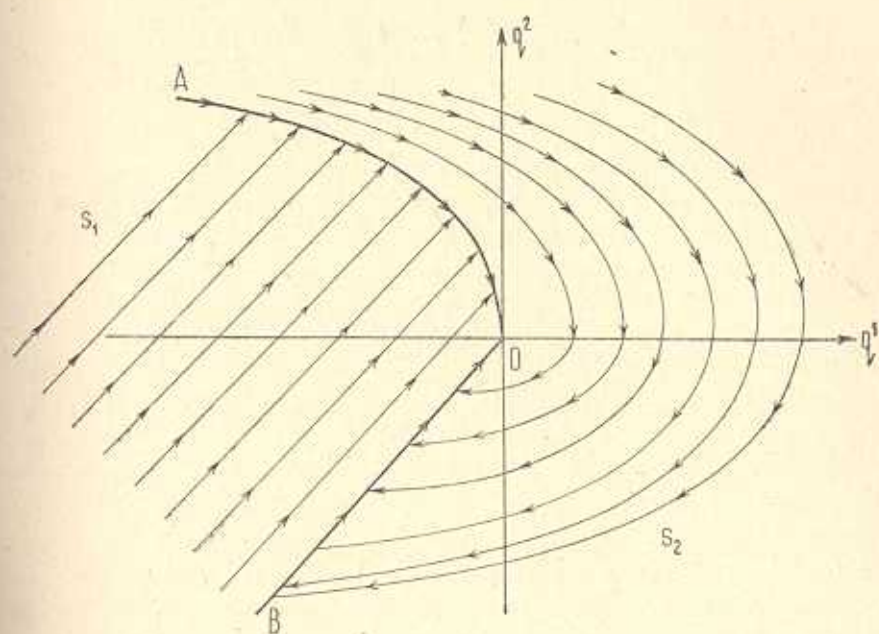
На каждой оптимальной траектории значение управляющего параметра  $F(t)$  равно  $v(q(t))$  в той точке, в которой в момент  $t$  находится фазовая точка. Фазовые траектории состоят из двух кусков парабол, примыкающих друг к другу.

В случае  $F_0 = W_0$ ,  $W_0 > 0$  для отрезка времени, на котором  $F = 0$ , фазовые траектории представляют собой прямые линии  $q^1 = q^2 t + c_1$ , а для отрезка времени, на котором  $F = -F_0 - W_0$ , — параболы (4.19). На фиг. 4 изображено все семейство полученных таким образом фазовых траекторий. Линией переключения управляющей функции является кривая  $AOB$ , где  $AO$  — дуга параболы  $q^1 = -(q^2)^2 / 2(F_0 + W_0)$ , а  $BO$  — кусок линии  $q^1 = q^2 t$ , которые проходят через начало координат. Решение задачи представим в виде синтеза

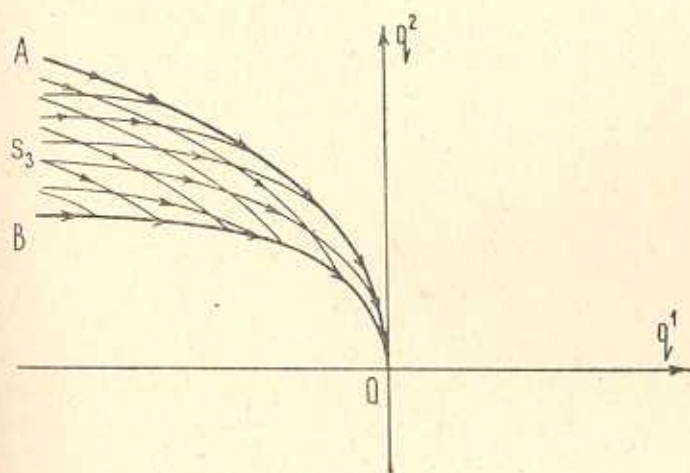
$$v(q(t)) = \begin{cases} 0 & \text{в области } s_1 \text{ и на линии } BO \\ -F_0 - W_0 & \text{в области } s_2 \text{ и на линии } AO \end{cases} \quad (4.20)$$

где через  $s_1$  обозначена внутренняя открытая область на плоскости  $q^1 O q^2$ , заключенная между кривыми  $AO$  и  $BO$ , а через  $s_2$  — внешняя открытая область. В случае  $F_0 = W_0$ ,  $W_0 > 0$  на каждой оптимальной траектории значение оптимального управления  $F(t)$  равно  $v(q(t))$ .





Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 изображено семейство фазовых траекторий задачи (4.16)–(4.19) в случае  $F_0 < W_0$ ,  $W_0 > 0$ , где  $AO$  и  $BO$  — соответственно, дуги парабол  $q^1 = (q^2)^2 / 2(F_0 - W_0)$  и  $q^1 = -(q^2)^2 / 2(F_0 + W_0)$ , которые проходят через начало координат. Из решения видно, что в этом случае задача оптимального быстродействия имеет решение только для тех начальных условий, которые находятся в полуоткрытой области, ограниченной линиями  $AO$  и  $BO$ .

При помощи функции  $v(q(t))$  решение задачи оптимального управления можно представить в виде

$$v(q(t)) = \begin{cases} F_0 - W_0 & \text{при } F_0 < W_0, W_0 > 0 \text{ в области } s_3 \text{ и на дуге } AO \\ -F_0 - W_0 & \text{при } F_0 < W_0, W_0 > 0 \text{ в области } s_3 \text{ и на дуге } BO \end{cases} \quad (4.21)$$

где  $s_3$ —открытая область, ограниченная линиями  $AO$  и  $BO$ . Из (4.21) следует, что в области  $s_3$  решение задачи быстрогодействия не единственно, то есть внутри  $s_3$  можно двигаться по законам (4.18) и (4.19) до попадания на линию переключения  $AO, BO$ . На каждой оптимальной траектории значение управляющего параметра  $F(t)$  в произвольный момент времени  $t$  равно  $v(q(t))$  из (4.21).

Остальные этапы движения манипулятора, которые связаны с движением стрелы и поворотом направляющего цилиндра, аналогичны задачам первого и второго этапа.

*Заключение.* Рассмотрен процесс оптимального обслуживания манипулятором конвейеров, который может являться участком автоматизированной линии. При некоторых предположениях сформулирована задача оптимального обслуживания с разными критериями оптимальности. Приведено описание оптимального решения одного цикла поэтапного управления манипулятором.

**ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՆԻՆ ՌԵՐՏՏՈՎ ԻՄԱՍԱԿԱՆՔԱՐՎՈՂ ՏԵԽՆՈԼՈԳԻԱԿԱՆ  
ՊՐՈՑԵՍԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿՈՆՏՐՈԼՄԱՆ ՄԻ ԿՆՅՐԻ ՄԱՍԻՆ**

Ա. Ա. ԳՈՒԿԱՍԻԱՆ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

*Օպտիմալ ղեկավարման հարանի մեթոդներով հետադառվում է սեր-  
նոլողիական պրոցեսի մաթեմատիկական մոդելավորման հարցերը, որը բաղ-  
կացած է զլիսավոր կոնվեյերից, միջանկյալ կոնվեյերից և մանիպուլյատորից:  
Չեղանկարված է կոնվեյերներին մանիպուլյատորով օպտիմալ մատակարար-  
ման ընդհանուր խնդիրը: Բերված է մանիպուլյատորի էտալ առ էտալ ղե-  
կավարման մի ցիկլի օպտիմալ մատակարարման խնդրի լուծումը: Որպես  
օպտիմալության չափանիշ ընդունված է էներգետիկ ծախսերի և անցման  
պրոցեսի ժամանակի մինիմիզացիան:*

**A PROBLEM OF OPTIMAL MODELLING OF TECHNOLOGICAL  
PROCESSES SERVED BY A MANIPULATOR ROBOT**

A. A. GUKASIAN

S u m m a r y

On the basis of known methods of optimal control, the questions of mathematical modelling of the area of technological processes are investigated, which consists of the main conveyor, auxiliary conveyor and a manipulator. The general problem of optimal service by means of the manipulator of the conveyor with various criteria of optimization

has been formulated. The solutions of optimal service of a single cycle of periodical control by a manipulator has been given, when its base moves about the circle. As a criteria of optimization the minimization of energetic expense and time of shift process has been accepted.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные работы: Динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. В. Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 416 с.
3. Корнев Г. В. Целенаправленная механика управляемых манипуляторов. М.: Наука, 1979. 448 с.
4. Акуленко Л. Д., Болотник Н. И., Каплунов А. А. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами. М.: Препринт № 218, ИПМ АН СССР, 1983. 72 с.
5. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.—Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 4, с. 101—113.
6. Вукобратович М., Потконяк В. Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 131—141.
7. Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979. 615 с.
8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
22.IV.1985