ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

УДК 539.374

ВВИНЧИВАНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНУЮ ТРУБУ

АКОПЯН Г. А.

Рассматривается соосное внедрение с одновременным вращением вокруг своей оси жесткого цилиндрического тела в анизотропную, идеально-жестко-пластическую трубу, материал которого подчиняется соотношениям Мизеса-Хилла [1]. Подобная картина пластического деформирования встречается при клинопрессовой сварке разнородных труб [2]. Технологическая схема такого рода сварки представляет собой предварительный нагрев и соосное впрессовывание трубы из более твердого материала с монотонно возрастающим по оси внешним диаметром в трубу из более мягкого материала, помещенную в плотную недеформируемую цилиндрическую прессформу. Процесс соединения материалов происходит в твердой фазе, причем физический контакт образуется за счет пластической деформации более мягкого материала, вызывающей пластические деформации в приповерхностном весьма тонком слое трубы из более твердого материала. Заметных объемных формоизменений этой трубы в процессе впрессовывания не наблюдается.

§ 1. Основные уравнения задачи. 1. Общие соотношения теории анизотропного идеального жестко-пластического течения в цилиндрических координатах в обычных обозначениях имеют вид:

дифференциальные уравнения равновесия

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

условие текучести Мизеса-Хилла

$$
F_0(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+G_0(\sigma_z-\sigma_r)^2+H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+L_0\tau_{\theta z}^2+M_0\tau_{rz}^2+N_0\tau_{r\theta}^2=1 \tag{1.2}
$$

зависимости между компонентами тензора скоростей деформаций, скоростей перемещения и напряжений

$$
\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\Omega[H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)+G_0(\sigma_r-\sigma_z)]
$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=\Omega[F_0(\sigma_\theta-\sigma_z)+H_0(\sigma_\theta-\sigma_r)]$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\Omega[F_0(\sigma_z-\sigma_\theta)+G_0(\sigma_z-\sigma_r)]$$

$$2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=N_0\tau_{r\theta}\Omega \tag{1.3}$$

$$2\gamma_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}=L_0\tau_{\theta z}\Omega$$

$$2\gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}=M_0\tau_{rz}\Omega$$

2. Компоненты напряжений и скоростей перемещений можно представить через произвольные функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ в следующем виде:

$$\sigma_r=-2A-2Bz-2C\theta+\int\limits_a^r\left[2\mu(F+G)\varphi'-\lambda\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right)\right]\frac{\Omega_*}{r}\,dr$$

$$\sigma_\theta=\sigma_r+\Omega_*\left[2\mu(F+G)\varphi'-\lambda\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right)\right],\quad \tau_{r\theta}=C+\frac{D}{r^2}$$

$$\sigma_z=\sigma_r+\Omega_*\left\{2\mu F\varphi'-\lambda\left[(F+H)f'+H\frac{f}{r}\right]\right\},\quad \tau_{rz}=Br+\frac{E}{r} \tag{1.4}$$

$$\tau_{\theta z}=2L\Omega_*\left[\lambda(r\varphi)'-\frac{\mu}{2r^2}(fr)'\right],\quad u=(\lambda f-2\mu\varphi)\exp(\lambda z+\mu\theta)$$

$$v=2(r\varphi)'\exp(\lambda z+\mu\theta)+Kr,\quad w=-\frac{1}{r}(rf)'\exp(\lambda z+\mu\theta)+T$$

где λ, μ, a—заданные постоянные; A, B, C, D, E, K, T—произвольные постоянные и введены обозначения

$$\Omega_*=\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2+N_0\tau_{r\theta}^2}\left\{(G+F)(\lambda f'-2\mu\varphi')^2-2G\frac{\lambda}{r}(\lambda f'-2\mu\varphi')(rf)'+\right.$$

$$\left.+(H+G)\frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2+4L\left[\lambda(r\varphi)'-\frac{\mu}{2r^2}(rf)'\right]^2\right\}^{-1/2}$$

$$F=\frac{F_0}{\Delta},\quad G=\frac{G_0}{\Delta},\quad H=\frac{H_0}{\Delta},\quad L=L_0^{-1},\quad M=M_0^{-1},\quad N=N_0^{-1}$$

$$\Delta=F_0G_0+G_0H_0+H_0F_0$$

Уравнения (1.4) будут решением системы уравнений (1.1)–(1.3), если функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f''+\frac{f'}{r}-\frac{1+\lambda^2r^2}{r^2}f+2\mu\lambda\varphi+\frac{M_0\tau_{rz}}{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}\left\{(G+F)(\lambda f'-2\mu\varphi')^2-\right.$$

$$-2G\frac{\lambda}{r}(\lambda f'-2\mu\varphi')(rf)'+(G+H)\frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2+4L\left[\lambda(r\varphi)'-\frac{\mu}{2r^2}(rf)'\right]^2\Bigg\}^{1/2}=0$$

$$\varphi''+\frac{\varphi'}{r}-\frac{1+\mu^2}{r^2}\varphi+\frac{\lambda\mu}{2r^2}f-\frac{N_0\tau_{r\theta}}{2r\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}\Bigg\{(G+F)(\lambda f'-2\mu\varphi')^2- \tag{1.5}$$

$$-2G\frac{\lambda}{r}(\lambda f'-2\mu\varphi')(rf)'+(G+H)\frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2+4L\left[\lambda(r\varphi)'-\frac{\mu}{2r^2}(rf)'\right]^2\Bigg\}^{1/2}=0$$

Полученная система уравнений кроме своих постоянных содержит еще четыре произвольные постоянные, входящие в функции $\tau_{r\theta}$ и τ_{rz}. Характер течения пластической массы на граничных поверхностях тела определяет краевые условия для этой системы, а из условий, накладываемых на указанные касательные напряжения на этих поверхностях, находятся произвольные постоянные, содержащиеся в этих выражениях. Гидростатическая постоянная A определяется из условия равновесия тела в продольном направлении. Решение (1.4) может представлять, в частности, пространственное деформирование пластического материала между шероховатыми жесткими сближающимися поверхностями $R_i=a_i\pm b_i\exp(\lambda z+\mu\theta)$, где a_i и b_i —положительные заданные постоянные.

3. В случае осесимметричного деформирования имеем $C=\mu=0$. Вводя обозначение $(r\varphi)'=\psi(r)$, для компонентов напряжений из (1.4) имеем

$$\sigma_r=-2A-2Bz-\varkappa\int\limits_a^r\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right)\frac{\omega}{r}dr,\quad \varkappa=\operatorname{sign}\lambda$$

$$\sigma_\theta=\sigma_r-\varkappa\left(Ff'-G\frac{f}{r}\right)\omega,\qquad \sigma_z=\sigma_r-\varkappa\left[(F+H)f'+H\frac{f}{r}\right]\omega$$

$$\tau_{\theta z}=2L\psi\omega,\quad \tau_{r\theta}=\frac{D}{r^2},\qquad \tau_{rz}=Br+\frac{E}{r} \tag{1.6}$$

где обозначено

$$\omega=\frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2+2H\dfrac{f'f}{r}+(G+H)\dfrac{f^2}{r^2}+4L\psi^2}} \tag{1.7}$$

Компоненты скоростей перемещений

$$u=\lambda f\exp(\lambda z),\quad v=\zeta r+2\psi\exp(\lambda z),\quad w=-\frac{1}{r}(rf)'\exp(\lambda z)+T \tag{1.8}$$

Вместо (1.5) будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

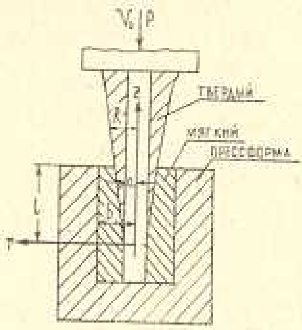
$$f''+\frac{f'}{r}-\frac{1+\lambda^2r^2}{r^2}f+\frac{\varkappa\lambda M_0\tau_{rz}}{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}\times$$

$$\times\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{r}+(G+H)\frac{f^2}{r^2}+4L\psi^2}=0$$

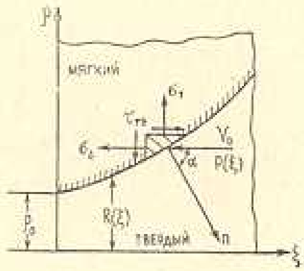
$$\psi'-\frac{\psi}{r}-\frac{\varkappa\lambda N_0\tau_{r\theta}}{2\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{r}+(G+H)\frac{f^2}{r^2}+4L\psi^2}=0 \tag{1.9}$$

Будем отличать внутреннее и внешнее внедрение в зависимости от того жесткий элемент впрессовывается с внутренней или с внешней стороны по отношению к элементу из более мягкого материала.

§ 2. *Внутреннее ввинчивание.* Пусть в абсолютно жесткую цилиндрическую прессформу плотно помещена цилиндрическая труба из идеально-жестко-пластического анизотропного материала с внутренним и внешним радиусами a и b, соответственно, а в нее соосно впрессовывается, совершая одновременно вращательное движение вокруг своей оси с угловой скоростью ω_1, цилиндрическая труба из значительно более твердого материала с переменным внешним радиусом $R(z) = a + \nu u_1 \exp\left(\nu \frac{z}{b}\right)$, где ν и u_1 — заданные положительные постоянные (фиг. 1). Материал этой трубы считаем недеформируемым.



Фиг. 1



Фиг. 2

Цилиндрическую координатную систему закрепляем с жесткой трубой так, чтобы плоскость $z=0$ прошла через входное торцевое сечение, а положительное направление оси z—по оси труб, против направления движения. Полагаем, что вращение жесткой трубы происходит в сторону возрастания полярной координаты θ. Считаем, что материал деформируемой анизотропной трубы по всей толщине в области $z>0$ переходит в чисто пластическое состояние, а торец $z=l$ этой трубы считаем свободным от внешних сил.

Введем обозначения: $u_0=\frac{u_1}{b}$, $\lambda=\frac{\nu}{b}$, $\rho_0=\frac{a}{b}$, безразмерные координаты $\rho=\frac{r}{b}$, $\xi=\frac{z}{b}$ и функции

$$R(z)=bR_*(\xi),\quad f(r)=b^2f_*(\rho),\quad \psi(r)=b\psi_*(\rho)$$

где $R_*(\xi)=\rho_0+\nu u_0 e^{\nu\xi}$.

После преобразования формул (1.6)—(1.7), опуская в дальнейшем знак $_*$, для компонентов напряжений получаем

$$\sigma_r=-2A-2B\xi-\int_{\rho_0}^{\rho}\left(Ff'-G\frac{f}{\rho}\right)\frac{\omega}{\rho}\,d\rho$$

$$\sigma_\theta=\sigma_r-\left(Ff'-G\frac{f}{\rho}\right)\omega,\quad \sigma_z=\sigma_r-\left[(F+H)f'+H\frac{f}{\rho}\right]\omega \tag{2.1}$$

$$\tau_{\theta z}=2L\psi\omega,\quad \tau_{r\theta}=\frac{D}{\rho^2},\quad \tau_{rz}=B\rho+\frac{E}{\rho}$$

причем

$$\omega=\frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2+2H\dfrac{f'f}{\rho}+(G+H)\dfrac{f^2}{\rho^2}+4L\psi^2}}$$

Компоненты скоростей перемещений в новых обозначениях будут

$$u=\nu f(\rho)\exp(\nu\xi),\quad v=K\rho+2\psi(\rho)\exp(\nu\xi),\quad w=-\frac{1}{\rho}(\rho f)'\exp(\nu\xi)+T \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем скорости перемещений отнесены к b.

Система дифференциальных уравнений (1.9) в новых переменных перепишется в виде

$$f''+\frac{f'}{\rho}-\frac{1+\nu^2\rho^2}{\rho^2}f+\frac{\nu M_0\tau_{rz}}{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2+N_0\tau_{r\theta}^2}}\times$$

$$\times\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{\rho}+(G+H)\frac{f^2}{\rho^2}+4L\psi^2}=0$$

$$\psi'-\frac{\psi}{\rho}-\frac{\nu N_0\tau_{r\theta}}{2\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}\sqrt{(F+H)f'^2+2H\frac{f'f}{\rho}+(G+H)\frac{f^2}{\rho^2}+4L\psi^2}=0 \tag{2.3}$$

Исходя из допущения о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также принимая за нормальную скорость перемещения на поверхности $\rho=R(\xi)$ радиальную скорость перемещения $u(\rho_0,\xi)$, для функции $f(\rho)$ будем иметь граничные условия

$$f(\rho_0)=u_0V_0=u_*,\quad f(1)=0 \tag{2.4}$$

где V_0—скорость внедрения.

На контактной поверхности между жесткой и деформируемой трубами принимаем условие $v=\beta V$, где $V=\omega_1 R$—линейная скорость (в долях b) точки внешней поверхности жесткой трубы, β—параметр, $0\leqslant\beta\leqslant1$, зависящий от скорости вращения, шероховатости поверхностей, физико-механических свойств материалов и определяемый из эксперимента. Используя принятое условие и выражение v из (2.2), находим $K=\beta\omega_1$ и значение

$$\psi(\rho_0)=\frac{\nu}{2}\beta\omega_1 u_0 \tag{2.5}$$

Принимаем, что степени шероховатости на внутренних и внешних поверхностях в продольных и кольцевых направлениях, соответственно, заданы и равны m_1, $-q_1$ и m_2, $-q_2$, причем $m_i, q_i>0$ и подчиняются условию $m_i^2+q_i^2\leqslant 1$. Используя эти граничные условия, находим

$$B=\frac{m_2-\rho_0 m_1}{1-\rho_0^2},\quad E=\frac{m_1-\rho_0 m_2}{1-\rho_0^2}\rho_0,\quad D=-q_2=-\rho_0^2 q_1 \tag{2.6}$$

При одинаковой шероховатости на контактных поверхностях, то есть при $\rho=\rho_0$ и $\rho=1$, степени шероховатости одинаковы по всем направлениям и равны соответственно m_1 и m_2. Можно положить

$$\tau_{r\theta}=-\frac{m_i v}{\sqrt{v^2+w^2}},\quad \tau_{rz}=\frac{m_i w}{\sqrt{v^2+w^2}}\quad \text{при } \rho=\rho_0,\ 1$$

Полагая $K=T=0$ и учитывая выражения для $\tau_{r\theta}$ и τ_{rz} в (2.1), из формул (2.2) находим

$$B=\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\left\{\frac{\rho_0 m_1\left[f'(\rho_0)+\frac{u_*}{\rho_0}\right]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0)+\frac{1}{4}\left[f'(\rho_0)+\frac{u_*}{\rho_0}\right]^2}}-\frac{m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1)+\frac{1}{4}f'^2(1)}}\right\}$$

$$E=-\frac{\rho_0}{2(1-\rho_0^2)}\left\{\frac{m_1\left[f'(\rho_0)+\frac{u_*}{\rho_0}\right]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0)+\frac{1}{4}\left[f'(\rho_0)+\frac{u_*}{\rho_0}\right]^2}}-\frac{\rho_0 m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1)+\frac{1}{4}f'^2(1)}}\right\}$$

$$D=-\frac{m_1\rho_0^2\psi(\rho_0)}{\sqrt{\psi^2(\rho_0)+\frac{1}{4}\left[f'(\rho_0)+\frac{u_*}{\rho_0}\right]^2}}=-\frac{m_2\psi(1)}{\sqrt{\psi^2(1)+\frac{1}{4}f'^2(1)}}$$

Последнее равенство и (2.4) являются граничными условиями для системы уравнений (2.3). При отсутствии вращения $\psi(\rho)=D=0$ и формулы для B и E совпадают с соответствующими выражениями (2.6).

Торец деформируемой трубы $\xi=\xi_0=l/b$ свободен от нормальных сил, следовательно,

$$\int_{\rho_0}^{1}\sigma_z(\rho,\ \xi_0)\rho d\rho=0 \tag{2.7}$$

Подставляя выражение σ_z из (2.1) и производя интегрирование по частям в полученном двухкратном интеграле, найдем

$$A=-B\xi_0-\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int_{\rho_0}^{1}\left[\left(2H+F+\frac{F}{\rho^2}\right)f'+\left(2H+G-\frac{G}{\rho^2}\right)\frac{f}{\rho}\right]\omega\rho d\rho$$

Используя выражения компонентов скоростей перемещений, легко проверить, что условие сохранения количества масс—

$$\rho_0 \int_0^{\xi_0} u(\rho_0, \xi) d\xi = \int_{\rho_0}^{1} [w(\rho, \xi_0) - u(\rho, 0)] \rho d\rho$$

выполняется тождественно.

Из условия равновесия элемента на контактной поверхности трубы $\rho = R(\xi)$ (фиг. 2) для абсолютного значения давления по оси имеем

$$p(\xi) = -\sigma_z(\rho_0, \xi)\cos\alpha + \tau_{rz}(\rho_0)\sin\alpha$$

причем

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+R'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$

Суммарная осевая сила, приходящаяся на эту поверхность, то есть сила впрессовывания будет

$$P = 2\pi b^2 \int_0^{\xi_0} R(\xi)\sqrt{1+R'^2(\xi)}\, p(\xi) d\xi \tag{2.8}$$

Подставляя выражения для $R(\xi)$ и $p(\xi)$ и производя интегрирование, находим

$$P/\pi b^2 = 2\rho_0 m_1 \xi_0 + 2u_0(e^{\nu\xi_0} - 1)(m_1 + \nu\rho_0 S) + \nu^2 u_0^2 S(e^{2\nu\xi_0} - 1) +$$
$$+ 4B\rho_0 u_0[1 + e^{\nu\xi_0}(\nu\xi_0 - 1)] + B\nu u_0^2[1 + e^{2\nu\xi_0}(2\nu\xi_0 - 1)] \tag{2.9}$$

причем $S = Q - 2B\xi_0$, где

$$Q = -\frac{1}{1-\rho_0^2} \int_{\rho_0}^{1} \left[\left(2H + F + \frac{F}{\rho^2} \right) f' + \left(2H + G - \frac{G}{\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega\rho\, d\rho +$$
$$+ \left[(F + H) f'(\rho_0) + H \frac{u_0}{\rho_0} \right] \omega(\rho_0)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции, входящие в (2.9), и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P = 2\pi b^2 \xi_0 (\rho_0 + \nu u_0)(m_1 + \nu^2 u_0 Q) \tag{2.10}$$

Вращающий момент определится по формуле

$$M^* = 2\pi b^3 q_1 \int_0^{\xi_0} (\rho_0 + \nu u_0 e^{\nu\xi})^2 \sqrt{1 + \nu^4 u_0^2 e^{2\nu\xi}}\, d\xi \tag{2.11}$$

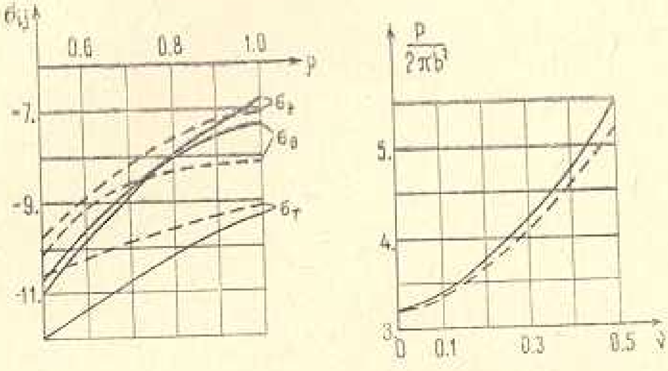
Получено численное решение системы дифференциальных уравнений (2.3) с краевыми условиями (2.4), (2.5), при следующих значениях параметров:

$\nu = 0{,}2$; $\xi = 0$, $\xi_0 = 8$, $V_0 = 1$; $u_0 = 0{,}25$; $\rho_0 = 0{,}5$; $m_1 = 0{,}8$; $m_2 = 0{,}1$; $q_1 = 0{,}5$

$$q_2=0{,}125;\ \beta=0{,}5;\ \omega_1=1;\ F/M=5;\ G/M=2;\ H/M=0{,}5;\ L/M=1{,}5;$$
$$N/M=2{,}5$$

На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022, по формулам (2.1), (2.10) на фиг. 3 построены графики напряжений и силы впрессовывания. Для сравнения пунктирной линией показан график напряжений и силы впрессовывания для изотропной трубы. Как видно из графиков, анизотропия существенно влияет на напряженное состояние и на величину силы впрессовывания.

1. При весьма малых значениях ν в системе уравнений (2.3), принимая $\nu=0$, приходим к двум отдельным дифференциальным уравнениям



Фиг. 3

$$f''+\frac{f'}{\rho}-\frac{f}{\rho^2}=0,\quad \psi'-\frac{\psi}{\rho}=0 \tag{2.12}$$

решения которых при краевых условиях (2.4) и (2.5) соответственно будут

$$f=\frac{\rho_0 u_*}{1-\rho_0^2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right),\quad \psi=\frac{\nu}{2}\beta\omega_1 u_0\frac{\rho}{\rho_0} \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в формулы напряжений (2.1), получим

$$\sigma_r=-\frac{2(\rho_0 m_1-m_2)}{1-\rho_0^2}(\xi_0-\xi)-\frac{1}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+\frac{2(F-G)}{\rho^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{F+G}{\rho^4}\right]\omega_0\rho d\rho+\int_{\rho_0}^{\rho}\left(F-G+\frac{F+G}{\rho^2}\right)\frac{\omega_0}{\rho}d\rho,\quad \sigma_\theta=\sigma_r+\left(F-G+\frac{F+G}{\rho^2}\right)\omega_0$$
$$\sigma_z=\sigma_r+\left(F+2H+\frac{F}{\rho^2}\right)\omega_0,\quad \tau_{rz}=\frac{m_1-\rho_0 m_2}{1-\rho_0^2}\,\frac{\rho_0}{\rho}-\frac{\rho_0 m_1-m_2}{1-\rho_0^2}\rho \tag{2.14}$$

$$\omega_0=\frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{F+G+4H+(F-G)\dfrac{2}{\rho^2}+\dfrac{F+G}{\rho^4}+L\alpha^2\rho^2}}, \quad \tau_{r\theta}=-q_1\frac{\rho_0^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\theta z}=L\alpha\rho\omega_0$$

$$\alpha=\nu\beta\omega_1\left(\frac{1}{\rho_0^2}-1\right)$$

Скорости перемещений согласно (2.2) будут

$$u=\frac{\nu\rho_0 u_*}{1-\rho_0^2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)e^{\nu\xi}, \quad v=\beta\omega_1\rho\left(1+\nu\frac{u_r}{\rho_0}e^{\nu\xi}\right)$$

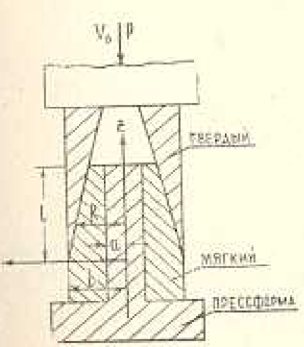
$$w=\frac{2u_*\rho_0}{1-\rho_0^2}e^{\nu\xi}+T \tag{2.15}$$

Сила впрессовывания и момент вращения определяются по (2.9) и (2.11), причем значение Q определится по формуле

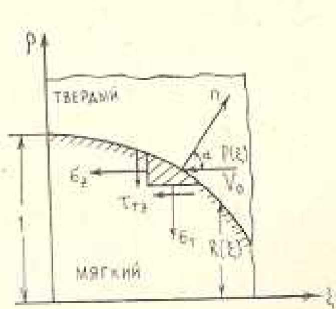
$$Q=-\frac{F+(F+2H)\rho_0^2}{\rho_0^2}\omega_0(\rho_0)+\frac{1}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+\frac{2(F-G)}{\rho^2}+\frac{F+G}{\rho^4}\right]\omega_0\rho\, d\rho$$

§ 3. *Внешнее ввинчивание.* Пусть теперь цилиндрическая труба с внутренним и внешним радиусами a и b, соответственно, из идеально-жестко-пластического ортотропного материала плотно насажена на недеформируемую трубу (прессформа), на которую с наружной стороны соосно впрессовывается, одновременно вращаясь вокруг своей оси в положительном направлении с угловой скоростью ω_1, труба из значительно более твердого материала с внутренним, монотонно возрастающим по оси трубы относительным радиусом $R=1-\nu u_0 \exp(\nu\xi)$. Материал этой трубы считаем абсолютно жестким, а координатную систему закрепляем с ней как в случае внутреннего внедрения (фиг. 4). Принимаем, что деформируемая труба по всей толщине при $z>0$ переходит в чисто пластическое состояние.

Заменяя в выражениях (2.1)—(2.2) знаки функции $f(\rho)$ и $\psi(\rho)$, для компонентов напряжений получим



Фиг. 4



Фиг. 5

$$
\sigma_r = -2A - 2B\xi + \int_{\rho_0}^{\rho} \left(Ff' - G\frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho}\, d\rho
$$

$$
\sigma_\theta = \sigma_r + \left(Ff' - G\frac{f}{\rho} \right)\omega, \quad \sigma_z = \sigma_r + \left[(F+H)f' + H\frac{f}{\rho} \right]\omega
$$

$$
\tau_{\theta z} = -2L\psi\omega, \quad \tau_{r\theta} = \frac{D}{\rho^2}, \quad \tau_{rz} = B\rho + \frac{E}{\rho} \tag{3.1}
$$

причем

$$
\omega = \frac{\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2}}
$$

Соответственно, для компонентов скоростей перемещений (в долях b) будем иметь

$$
u = -\nu f(\rho)e^{\nu\xi}, \quad v = K\rho - 2\psi(\rho)e^{\nu\xi}, \quad w = \frac{1}{\rho}(\rho f)'e^{\nu\xi} + T \tag{3.2}
$$

Система дифференциальных уравнений (2.3) примет вид

$$
f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{1+\nu^2\rho^2}{\rho^2}f - \frac{\nu\tau_{rz}M_0}{\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}} \times
$$

$$
\times \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2} = 0
$$

$$
\psi' - \frac{\psi}{\rho} + \frac{\nu N_0\tau_{r\theta}}{2\sqrt{1 - M_0\tau_{rz}^2 - N_0\tau_{r\theta}^2}} \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H\frac{f'f}{\rho} + (G+H)\frac{f^2}{\rho^2} + 4L\psi^2} = 0 \tag{3.3}
$$

Исходя из допущения о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также из того, что нормальная скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\xi)$ заменяется радиальной $u(1, \xi)$, для функции $f(\rho)$ имеем граничные условия

$$
f(\rho_0) = 0, \quad f(1) = u_0 V_0 = u_* \tag{3.4}
$$

Далее на контактной поверхности $\rho = 1$ принимаем условие $v = \beta V$, где $V = \omega_1 R$ — линейная скорость точки внутренней поверхности жесткой трубы, находим $K = \beta\omega_1$ и значение

$$
\psi(1) = \frac{\nu}{2}\beta\omega_1 u_0 \tag{3.5}
$$

Граничные значения τ_{rz} и $\tau_{r\theta}$ на внутреннем и на внешнем поверхностях в продольном и в кольцевом направлениях считаем известными $-m_1$, q_1 и $-m_2$, q_2, соответственно, где $m_i, q_i > 0$ и очевидно $m_i^2 + q_i^2 \leqslant 1$.

Используя эти граничные условия, находим

$$B=\frac{\rho_0 m_1-m_2}{1-\rho_0^2},\quad E=\frac{\rho_0 m_2-m_1}{1-\rho_0^2}\rho_0,\quad D=q_2=q_1\rho_0^2 \tag{3.6}$$

Из статического условия (2.7) определяем

$$A=-B\xi_0+\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int\limits_{\rho_0}^{1}\left[\left(2H+F+\frac{F}{\rho^2}\right)f'+\left(2H+G-\frac{G}{\rho^2}\right)\frac{f}{\rho}\right]\omega\rho d\rho$$

Легко убедиться, что условие сохранения количества масс удовлетворяется тождественно.

Из условия равновесия элемента вблизи контактной поверхности $\rho=R(\xi)$ (фиг. 5) для абсолютного значения осевого давления получим

$$p(\xi)=-\sigma_z(1,\xi)\cos\alpha-\tau_{rz}(1)\sin\alpha \tag{3.7}$$

причем

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+R'^2}},\quad \cos\alpha=-\frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$

Сила впрессовывания определяется по формуле (2.8), где следует положить $R=1-\nu u_0 e^{\nu\xi}$, а значение $p(\xi)$—согласно (3.7). Находим

$$P/\pi b^2=2\xi_0 m_2+2u_0(e^{\nu\xi_0}-1)(\nu S-m_2)-\nu^2u_0^2S(e^{2\nu\xi_0}-1)+$$
$$+4Bu_0[1+e^{\nu\xi_0}(\nu\xi_0-1)]-B\nu u_0^2[1+e^{2\nu\xi_0}(2\nu\xi_0-1)] \tag{3.8}$$

где $S=Q-2B\xi_0$, причем

$$Q=\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int\limits_{\rho_0}^{1}\left[\left(2H+F+\frac{F}{\rho^2}\right)f'+\left(2H+G-\frac{G}{\rho^2}\right)\frac{f}{\rho}\right]\omega\rho d\rho-$$
$$-\int\limits_{\rho_0}^{1}\left(Ff'-G\frac{f}{\rho}\right)\frac{\omega}{\rho}d\rho-[(F+H)f'(1)+Hu_0]\omega(1)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

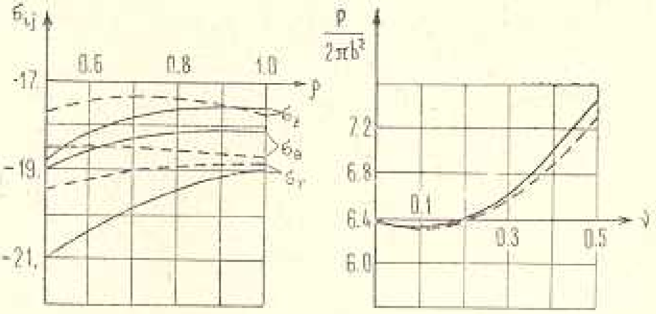
$$P/\pi b^2=2\xi_0(1-\nu u_0)(m_2+\nu^2u_0Q) \tag{3.9}$$

Вращающий момент будет

$$M^*=2\pi b^3q_2\int\limits_0^{\xi_0}(1-\nu u_0e^{\nu\xi})^2\sqrt{1+\nu^4u_0^2e^{2\nu\xi}}d\xi$$

1. При весьма малых значениях ν система (3.3) сводится к дифференциальным уравнениям (2.12), решения которых при граничных условиях (3.4) и (3.5) будут

$$f=\frac{\rho_0u_0}{1-\rho_0^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-\frac{\rho_0}{\rho}\right),\quad \psi=\frac{\nu}{2}\beta\omega_1u_0\rho$$



Фиг. 6

Формулы напряжений (3.1) примут вид

$$\sigma_r = -\frac{2(m_2-\rho_0 m_1)}{1-\rho_0^2}(\xi_0-\xi) - \frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int\limits_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+(F-G)\frac{1+\rho_0^2}{\rho^2}+\right.$$

$$\left.+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^4}\right]\omega_0\rho\, d\rho + \int\limits_{\rho_0}^{\rho}\left[F-G+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right]\frac{\omega_0}{\rho}\, d\rho$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left[F-G+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right]\omega_0, \quad \sigma_z = \sigma_r + \left[F+2H+F\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right]\omega_0$$

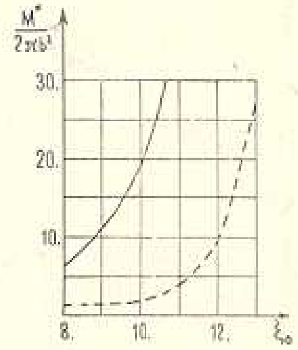
$$\tau_{rz} = \frac{\rho_0 m_2 - m_1}{1-\rho_0^2}\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{m_2-\rho_0 m_1}{1-\rho_0^2}\rho, \quad \tau_{r\theta} = q_1\frac{\rho_0^2}{\rho^2}$$

$$\tau_{\theta z} = -L\alpha\omega_0, \quad \alpha = \nu\beta\omega_1(1-\rho_0^2)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1-M_0\tau_{rz}^2-N_0\tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{F+G+4H+2(F-G)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}+(F+G)\frac{\rho_0^4}{\rho^4}+L\alpha^2\rho^2}}$$

Скорости перемещений, соответственно, будут



Фиг. 7

$$u_0 = -\frac{\nu u_* \rho_0}{1-\rho_0^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\exp(\nu\xi)$$

$$v = \beta\omega_1\rho(1+\nu u_0\exp(\nu\xi)), \quad w = \frac{2u_*}{1-\rho_0^2}\exp(\nu\xi)+T$$

Сила впрессовывания определится по формуле (3.9), причем

$$Q = \frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\int\limits_{\rho_0}^{1}\left[F+G+4H+(F-G)\frac{1+\rho_0^2}{\rho^2}+\right.$$

$$\left.+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^4}\right]\omega_0\rho\, d\rho - \int\limits_{\rho_0}^{1}\left[F-G+(F+G)\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right]\frac{\omega_0}{\rho}\, d\rho -$$

$$
-\frac{[2H+F(1+\rho_0^2)]\sqrt{1-M_0m_2^2-N_0q_2^2}}{\sqrt{F+G+4H+2(F-G)\rho_0^2+(F+G)\rho_0^4+L\alpha^2}}
$$

Численное решение системы дифференциальных уравнений (3.3) с краевыми условиями (3.4), (3.5) получено при следующих значениях параметров

$\nu=0{,}2$; $\xi=0$; $\xi_0=8$; $V_0=1$; $u_0=0{,}25$; $\rho_0=0{,}5$; $m_1=0{,}1$; $m_2=0{,}8$; $q_1=0{,}5$
$q_2=0{,}125$; $\beta=0{,}5$; $\omega_1=1$; $F/M=5$; $G/M=2$; $H/M=0{,}5$; $L/M=1{,}5$; $N/M=2{,}5$

На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022, по формулам (3.1) и (3.9) построены графики напряжений и силы впрессовывания (фиг. 6). Для сравнения пунктирной линией показан график напряжений и силы впрессовывания для изотропной трубы. Из графиков видно влияние анизотропии на напряженное состояние и силу впрессовывания. На фиг. 7 показан график изменения крутящего момента M^* в зависимости от глубины внедрения ξ_0 в случае внутреннего (сплошная линия) и внешнего внедрения (пунктирная линия).

ԿՈՇՏ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐՊՏՈՒՏԱԿՈՒՄԸ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է սեփական առանցքի շուրջը պտտումով կոշտ գլանային մարմնի ներդրումը անիզոտրոպ իդեալական-կոշտ-պլաստիկ խողովակի մեջ, որի նյութը ենթարկվում է Միզես-Հիլլի հոսունության պայմանին։ Լուծման մեջ դեֆորմացիաների արագությունների տենզորը ֆունկցիա է շառավղային և երկայնական կոորդինատներից։ Ստացված են գլանային անիզոտրոպ խողովակի մեջ առաջացած լարումները, ներդրման ուժը և պտտող մոմենտը որոշող արտահայտությունները։ Դիտարկված է արտաքին և ներքին ներդրումը։ Բերված են թվային օրինակներ։

THE SCREW DISPLACEMENT OF A RIGID CYLINDRICAL BODY IN A PLASTIC ANISOTROPIC PIPE

A. G. HACOBIAN

Summary

The penetration of a rigid cylindrical body with simultaneous rotation around its axis in an anisotropic ideal rigid plastic pipe is considered, the material of which obeys the Mises-Hill flow criterion. In the solution the tensor of speed strain is a function of radial and longitudinal coordinates. We have obtained relations which determine the stress appearing in a cylindrical anisotropic pipe as well as the penetration force and the rotating moment. Internal and external penetration are considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
2. *Шоршоров М. Х., Колесниченко В. А., Алехин В. П.* Клинопрессовая сварка давлением разнородных материалов. М.: Металлургия, 1982. 112 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
1.IV.1985