ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

БАГДОЕВ А. Г., ПЕТРОСЯН Л. Г.

Интерес к гидродинамическим задачам, в которых рассматриваются движения жидкостей, приобретающих во внешнем магнитном поле значительную намагниченность («магнитные жидкости»), вызван возможными техническими применениями.

О создании и исследовании стабильных намагничивающихся жидкостей достаточно подробно изложено в обзорной работе [1]. Экспериментальными исследованиями магнитных жидкостей обнаружен целый ряд интересных явлений.

Ниже рассматривается распространение нелинейных волн в намагничивающейся жидкости.

Уравнения двумерных нестационарных коротких волн*, описывающие резкое изменение параметров среды в окрестности фронтов волн, для газовой динамики были получены в работе [2]. Учет вязкости для классических (симметричных) жидкостей был выполнен в [3]. Распространение волн в электропроводящей жидкости в магнитном поле для классических жидкостей рассмотрено в [4, 5]. Изучение задач распространения ударных волн в жидкостях, содержащих пузырьки газа, проводится в [6—11]. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры с учетом взаимовлияния пузырьков (с учетом влияния окружающего ансамбля других пузырьков на динамику его радиального движения) и теплообмена в процессах межфазного взаимодействия дано в работах [12, 13]. Построению общего вида уравнения коротких волн в теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений посвящены работы [14, 15]. Обобщение полученных ранее уравнений модуляции и их исследования [16] для более сложных сред, к каковым относится электропроводящая жидкость в магнитном поле с несимметричным тензором напряжений, содержащая газовые пузырьки, дается в работах [17, 18].

Представляет интерес применение развитой нелинейной теории волновых движений к намагничивающимся жидкостям в магнитном поле, содержащим газовые пузырьки, с целью выяснения роли эффектов намагничивания и газовых пузырьков на форму уравнений коротких волн и уравнений модуляции.

В настоящей работе дается построение общего вида уравнений

* Термин «короткие волны» был введен в работе [2] для выделения областей в окрестности волны, где параметры движения резко изменяются.

коротких волн для магнитной жидкости, содержащей пузырьки газа, в магнитном поле. Получены уравнения медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн. Дается упрощение уравнений модуляции для типично дифракционной задачи, в которой определяющими являются производные вдоль волны. Приводится условие фокусирования узких пучков.

1. Уравнение коротких волн магнитных жидкостей с пузырьками газа. Рассмотрим магнитную жидкость с пузырьками газа, магнитная проницаемость которой постоянна и отличается от магнитной проницаемости несущей магнитной жидкости.

Различие в магнитных свойствах жидкости и газа можно описать зависимостью магнитной проницаемости смеси μ от концентрации газа $\beta : \mu = \mu(\beta)$. Магнитная жидкость рассматривается как гомогенная среда, представляющая модель жидкости с пузырьками газа, в которой пренебрегают всеми эффектами, связанными с пузырьковой структурой газо-содержания, за исключением сжимаемости [6].

Уравнения движения непроводящих магнитных жидкостей с пузырьками совершенного газа имеют вид [1]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho\nabla\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta} \frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right) \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \nabla \cdot (\mu\vec{H}) = 0 \qquad (1.3), (1.4)$$

При записи уравнения (1.2) было использовано следующее из (1.3) уравнение:

$$\frac{\nabla\vec{H}^2}{2} - (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H} = 0$$

Здесь ρ — массовая плотность смеси, p — давление смеси, $\vec{v}$ — вектор скорости точки, ∇ — пространственный градиент, $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $d(...)/dt$ — полная производная по времени.

Обозначим величины, относящиеся к газовой фазе, индексом g, а жидкости — индексом f: например, ρ_f и ρ_g означают плотности жидкости и газа соответственно. Определим β как объем газа в единице объема смеси, тогда для плотности смеси имеем [6]

$$\rho = \rho_f(1-\beta) + \rho_g\beta \tag{1.5}$$

Если допустить, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, то массу газа в единице массы смеси можно считать постоянной [6]

$$(1-\beta)/\beta\rho_g = \mathrm{const} \tag{1.6}$$

В континуальной теории вкладом газа в массовую плотность обычно пренебрегают, тогда взамен (1.5) запишем [6]

$$\rho \approx \rho_f(1-\beta) \tag{1.7}$$

Так как жидкость несжимаема, а для газа имеем уравнение состояния совершенного газа, то в случае политропического процесса можно записать

$$\rho_f = \text{const}, \quad p_g^{1/n} R^3 = \text{const}, \quad \rho_g / p_g^{1/n} = \text{const} \tag{1.8}$$

где n—показатель политропы, причем при $n=1$ имеем изотермический процесс, а при $n=\gamma^*$—адиабатический процесс; R—радиус пузырька.

Связь между давлением в смеси p и давлением в газе p_g возьмем в следующем виде [6]:

$$p_g = p + \rho_f R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\nu\rho_f}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{3\rho_f}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \tag{1.9}$$

где ν—кинематическая вязкость смеси.

Здесь принято, что связь (1.9) между p и p_g существует и в смеси.

Исключая p из уравнений (1.2), согласно (1.9) получим

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p_g - (1-\beta)\nabla\left[\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right] + \rho_f R \nabla \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\nu\rho_f}{R}\nabla\frac{dR}{dt} \tag{1.10}$$

где в членах с дисперсией и диссипацией удержаны величины основного порядка.

Из соотношений (1.6)—(1.8) имеем

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{d\rho}{d\beta} \approx -\rho_f \frac{\partial\mu}{\partial\rho}, \quad \frac{d\beta}{d\rho_g} = -\frac{(1-\beta)\beta}{\rho_g}$$

$$\frac{\nabla\rho_g}{\rho_g} = \frac{1}{n}\frac{\nabla p_g}{p_g}, \quad \nabla\rho = -\rho_f \nabla\beta, \quad \nabla\rho_g = \frac{\rho_g}{\beta\rho_f(1-\beta)}\nabla\rho \tag{1.11}$$

Из третьего и пятого уравнений (1.11) получим

$$\nabla p_g = a_*^2 \nabla\rho, \quad a_*^2 = \frac{p_g}{\rho_f}\frac{n}{(1-\beta)\beta} \tag{1.12}$$

где a_*—скорость звука в жидкости с пузырьками.

Условия (обобщенные) совместности на волнах получаются следующей заменой [19] в уравнениях (1.1), (1.8), (1.10), (1.11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\lambda\delta, \quad \nabla \to \vec{n}\delta, \quad \lambda = -\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \vec{n} = \nabla F \tag{1.13}$$

Здесь $\delta = \dfrac{\partial}{\partial F}$—производная по нормали к волне, λ—нормальная скорость волны, $\vec{n}$—единичный вектор нормали к волне, $F=F(x, y, z, t)$—уравнение поверхности волны. Как показано в [14, 15], при вычислении слагаемых, соответствующих малым диссипативным членам, следует оставлять только производные по нормали к волне.

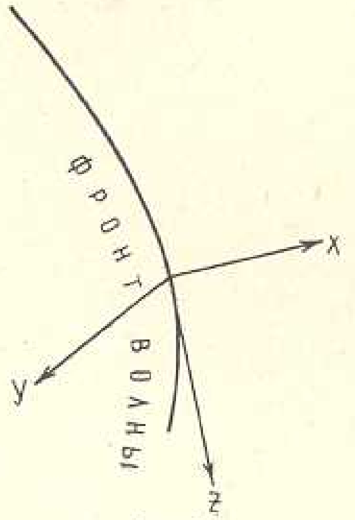
Предположено, что производные по касательной намного меньше производных по нормали

Обычно соотношение (1.13) используется для гиперболических уравнений [19], однако, как показано в [15, 20], их можно использовать при записи обобщенных условий совместности, в результате применения которых диссипативные члены формально включаются в формулу для нормальной скорости волны.

$$c_n\delta\rho-\rho\delta U_n=0 \tag{1.14}$$

$$-\rho c_n\delta\vec{v}=-\vec{n}a_*^2\delta\rho-(1-\beta)\vec{n}\delta\left[\frac{H^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right]+\rho_f R\vec{n}c_n^2\delta^3 R-\frac{4\nu}{R}\rho_f c_n\vec{n}\delta^2 R \tag{1.15}$$

$$\delta\rho=-\rho_f\delta\beta,\quad \delta R=-\frac{R}{3np_g}\delta p_g,\quad \delta p_g=np_g\frac{\delta\rho}{\beta\rho_f(1-\beta)} \qquad (1.16),(1.17),(1.18)$$



Фиг. 1

где $c_n=\lambda-U_n$ — нормальная скорость волны относительно частицы, U_n—проекция скорости частицы на нормаль к волне.

Отметим, что $d^2R/dt^2=c_n^2\delta^2 R$.

Выберем ось x по нормали к волне, а y и z—по касательной к ней (фиг. 1).

Из уравнения (1.3) можно получить

$$\delta H_y=\delta H_z=0 \text{ или } \delta\vec{H}_t=0 \tag{1.19}$$

где $\vec{H}_t$—тангенциальный вектор к волне.

Из уравнения (1.4) с учетом того, что в силу (1.11)

$$\delta\mu=\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\partial\beta=-\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\delta\rho$$

можно получить

$$-\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}H_n\delta\rho+\mu\delta H_n=0$$

или

$$\delta H^2=2H_n^2\frac{1}{\rho_f}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\delta\rho \tag{1.20}$$

Здесь было использовано тождество $\delta H^2=\delta(H_t^2+H_n^2)=2H_n\delta H_n$. Из уравнений (1.14)—(1.19) и (1.21) получим

$$c_n^2=a_*^2-(1-\beta)\frac{H^2}{8\pi}\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}\frac{1}{\rho_f}+(1-\beta)\frac{H_n^2}{4\pi\rho_f\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2+$$
$$+\frac{R^2c_n^2}{3\beta(1-\beta)}\frac{\delta^3U_n}{\delta U_n}-\frac{4\nu c_n}{3\beta(1-\beta)}\frac{\delta^2U_n}{\delta U_n} \tag{1.21}$$

Обозначим $\beta=\beta_0+\beta'$, $R=R_0+R'$, $\rho=\rho_0+\rho'$, $\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}'$, $a_*=a_{*0}+a_*'$,

$c_n=c+c'$, $\mu=\mu_0(\rho_0)+\dfrac{\partial\mu_0}{\partial\rho_0}\rho'$, $p=p_0+p'$, где штрих означает малые возмущения, произведенные волной, перед которой вектор скорости частиц невозмущенного движения $\vec{V}_0=0$.

Условия совместности имеют место и для возмущений, поэтому из (1.19) можно получить, что $H'_t=0$.

Известно, что [18]

$$a'_*=\alpha^0 U'_n,\quad \alpha^0=\left[\frac{\partial(\rho a_*)}{a_*\partial\rho}\right]_{\rho=\rho_0,\ a_*=a_{*0}} \tag{1.22}$$

Для получения уравнения движения среды вблизи волны (уравнение коротких волн) можно использовать метод [20], основанный на записи уравнения для произвольной среды и конкретизации коэффициентов для данной среды.

Уравнение коротких волн для произвольной нелинейной диссипативной диспергирующей среды можно записать в виде [14, 17, 18]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\tau}-\frac{1}{2}L(u)-\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial\ln\Phi}{\partial t}=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\Gamma u\frac{\partial u}{\partial\tau}+D\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+E\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}\right]$$

$$L=\frac{\Delta_{\alpha_1}}{\alpha_k\Delta_{\alpha_k}}\left[\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\right] \tag{1.23}$$

Здесь $dx=H_1 d\tau$; $H_1=c+U_{n0}$ — нормальная скорость для невозмущенной волны (в данной задаче $U_{n0}=0$); $\tau=\tau_1(x,y,z)-t$ — время пробега от волны до данной точки (эйконал) в линейной задаче; α_1, α_2, α_3 — компоненты волнового вектора в системе координат x, y, z; $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0$ — дисперсионное уравнение в линейной задаче; Φ — значение u для лучевого решения; $u=U'_n$ — возмущенное значение проекции на нормаль к волне скорости частицы; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Значение коэффициентов в правой части (1.23) можно найти, используя формулу для нормальной скорости волны в нелинейной диссипативной задаче, определяемую из условий совместности на волне, записанных в виде [18]

$$c_n=c+\gamma U'_n+D'\frac{\delta^2 U'_n}{\delta U'_n}+E'\frac{\delta^3 U'_n}{\delta U'_n} \tag{1.24}$$

где значения γ, D', E' можно получить из (1.21).

Заметим, что

$$\delta=\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\tau},\ D=\frac{D'}{H_1},\ E=\frac{E'}{H_1^2},\ \Gamma=\gamma+1$$

Для нахождения коэффициентов с производными по y и z в $L(u)$ следует использовать уравнение (1.21), записанное для линейной задачи без диссипации и дисперсии в виде

$$c^2 = a_{*0}^2 - (1-\beta_0)\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}\frac{1}{\rho_f} + (1-\beta_0)\frac{H_{n0}^2}{4\pi\rho_f\mu_0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2 \tag{1.25}$$

где

$$c^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2}, \quad H_{n0} = \frac{H_{x0}\alpha_1 + H_{y0}\alpha_2 + H_{z0}\alpha_3}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}}$$

Здесь учтено, что в невозмущенной среде $\vec{V}_0=0$.

Учитывая вышеизложенное, (1.25) можно записать в виде

$$1 - \frac{(1-\beta_0)}{4\pi\rho_f\mu_0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2(\alpha_1 H_{x0} + \alpha_2 H_{y0} + \alpha_3 H_{z0})^2 =$$

$$= \left\{a_{*0}^2 - (1-\beta_0)\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}\frac{1}{\rho_f}\right\}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) \tag{1.26}$$

В подвижной системе координат, связанной с волной, $\alpha_2\approx 0$, $\alpha_3\approx 0$. Тогда скорость волны будет [14]

$$H_1 = c \approx \frac{1}{\alpha_1}, \text{ а } \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\alpha_k\Delta_{\alpha_k}} \approx \frac{1}{\alpha_1}$$

Учитывая малость α_2, α_3 вблизи оси x, можно получить

$$-d\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\alpha_1 = \left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2\frac{1-\beta_0}{\rho_f}\frac{M^2}{4\pi\mu_0 d^2}H_{y0}^2 + M\left\{\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)\frac{H_{x0}^2H_{y0}^2}{\rho_f^2(4\pi\mu_0)^2d^2}+1\right\}$$

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3} = -\frac{(\partial\mu_0/\partial\beta_0)^2(1-\beta_0)M}{d^2 8\pi\alpha_1\rho_f}H_{y0}H_{z0}$$

$$d = M + \left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2\frac{1-\beta_0}{4\pi\mu_0\rho_f}H_{x0}^2, \quad M = a_{*0}^2 - \frac{H_0^2}{8\pi}\frac{1-\beta_0}{\rho_f}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2} \tag{1.27}$$

Выражение для $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_3^2$ получится из первого уравнения (1.27) с заменой в правой части H_{y0} на H_{z0}.

Из условий совместности (1.14), (1.16)—(1.18) можно получить

$$\beta' = \frac{1-\beta_0}{c}U_n'$$

а из (1.20)

$$H_n' = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\frac{1-\beta_0}{c}U_n'H_{n0}$$

Учитывая эти соотношения, из (1.24), подставляя c_n в равенство (1.21), находим для γ, D', E' следующие выражения:

$$\gamma = \frac{a_{*0}}{c}\alpha^0 - \frac{1-\beta_0}{2c^2}\frac{1}{\rho_f 8\pi}\left[H_0^2\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2} - (1-\beta_0)\frac{\partial^3\mu_0}{\partial\rho_0^3}H_0^2 - \right.$$

$$\left. -2H_{n0}^2\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2\frac{1}{\mu_0} + 6(1-\beta_0)\frac{1}{\mu_0}H_{n0}^2\frac{\partial\mu_0}{\partial\rho_0}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2} - 6(1-\beta_0)H_{n0}^2\frac{1}{\mu_0^2}\left(\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^3\right]$$

$$D' = -\frac{2\nu}{3\beta_0(1-\beta_0)}, \qquad E' = \frac{R_0^2 c}{6\beta_0(1-\beta_0)} \tag{1.28}$$

2. *Уравнение для медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн.* Для простоты рассмотрим однородную среду и плоскую волну, для которых лучевое решение $\Phi=\text{const}$.

Ищем решение уравнения (1.23) в виде волн

$$u = U_0 + \frac{1}{2}\left[U_1 \exp(i\theta - m\alpha^2 t) + \overline{U}_1 \exp(-i\theta - m\alpha^2 t) + \right.$$

$$\left. + U_2 \exp(2i\theta - 2m\alpha^2 t) + \overline{U}_2 \exp(-2i\theta - 2m\alpha^2 t)\right] \tag{2.1}$$

где $\theta = \alpha\tau - \omega t$; $\alpha = \alpha_1 \omega_0 H_1$; ω_0 — частота в неподвижной системе координат; m — коэффициент затухания; U_0, U_1, U_2 — медленно меняющиеся амплитуды; $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ — комплексно-сопряженные функции.

Подставляя значение u из (2.1) в уравнение (1.23) и приравнивая e^0, $e^{i\theta}$, $e^{2i\theta}$, получим

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} L(U_0) = -\frac{1}{H_1}\left[\Gamma \frac{\partial}{\partial \tau}\left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau}\right) + \frac{1}{4}\Gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(U_1 \overline{U}_1) \times \right.$$

$$\left. \times \exp(-2m\alpha^2 t) + D\frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} + E\frac{\partial^4 U_0}{\partial \tau^4}\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial U_1}{\partial \tau}(i\omega + m\alpha^2) + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \omega\alpha U_1 - i\alpha^3 m U_1 -$$

$$- \frac{1}{2} L(U_1) = -\frac{1}{H_1}\left[-\Gamma\alpha^2 U_0 U_1 - \Gamma \frac{1}{2}\alpha^2 \overline{U}_1 U_2 \exp(-2m\alpha^2 t) + \right.$$

$$\left. + 3Di\alpha \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - 3D\alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - Di\alpha^3 U_1 - 6E\alpha^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - 4Ei\alpha^3 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \alpha_4 E U_1\right] \tag{2.3}$$

$$4\alpha\omega U_2 - 4i\alpha^3 m U_2 + 2i\alpha \frac{\partial U_2}{\partial t} + \left(\frac{1}{H_1} E\alpha^3 2i - 2m\alpha^2\right)\frac{\partial U_2}{\partial \tau} - \frac{1}{2} L(U_2) =$$

$$= -\frac{1}{H_1}\left[-\alpha^2 U_1^2 \Gamma - 8i\alpha^3 U_2 D + 16\alpha^4 U_2 E\right] \tag{2.4}$$

Приравнивая в (2.3) члены, содержащие U_1, получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega = -\frac{1}{H_1} E\alpha^3, \quad m = -\frac{1}{H_1} D \qquad (2.5), (2.6)$$

Из уравнения (2.4), с учетом (2.5) и (2.6), можно получить $U_2 \sim \varepsilon^2$ (ε — малая величина порядка U_1). Для простоты рассмотрим случай, когда $E\alpha^3 \gg 1$, тогда можно отбросить слагаемые с производными от U_2. Уравнение (2.3) после подстановки (2.4)—(2.6) примет вид

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau}\left[-\frac{3}{H_1} Ei\alpha^3 - \frac{2}{H_1} D\alpha^2\right] + \frac{1}{H_1}(3Di\alpha - 6E\alpha^2)\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} =$$

$$= \frac{1}{H_1}\left(\Gamma\alpha^2 U_0 U_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma^2\alpha^2 \overline{U}_1 U_1^2 \exp(-2m\alpha^2 t)}{-4Di\alpha + 12E\alpha^2}\right) + \frac{1}{2} L(U_1) \qquad (2.7)$$

В неоднородной среде в (2.7) добавится член $i\alpha U_1 \dfrac{\partial \ln \Phi}{\partial t}$.

3. Уравнения для амплитуд в задаче стационарной дифракции. Пусть размеры области по y и z имеют порядок $\sqrt{1/\alpha}$, что является типичным для задач дифракции узких пучков, тогда из уравнения (2.2) можно получить $U_0 \sim \varepsilon^2/\alpha$, соответствующий член U_0 в уравнении (2.3) можно отбросить. Поскольку задача стационарная и имеет место $(\partial U_1/\partial t) = (\partial U_1/\partial t)_{x_k} + \partial U_1/\partial \tau_1$, что следует из $\tau = \tau_1(x_k) - t$, где x_k — исходная система координат, то $(\partial U_1/\partial t)_{x_k} = 0$, причем $(\partial U_1/\partial t) = \partial U_1/\partial \tau_1$. Для дифракционных задач $\partial^2 U_1/\partial \tau_1^2$ можно отбросить по сравнению с $\partial^2 U_2/\partial y^2$, следовательно, уравнение (2.7) примет вид (в дальнейшем индекс при τ опущен)

$$i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial \tau}\left(1 - \frac{3}{H_1} E\alpha^2 + \frac{2}{H_1} D\alpha i\right) = \frac{1}{2H_1}\,\frac{\Gamma^2\alpha^2 U_1 |U_1|^2 \exp(-2m\alpha^2 t)}{-4D\alpha i + 12E\alpha^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha_1}\left[\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y \partial z}\right] \qquad (3.1)$$

положим

$$U_1 = a e^{i\varphi}$$

где a — амплитуда, φ — фаза. При этом можно получить систему уравнений для a и φ.

Можно искать решение задачи узких пучков для точных уравнений (2.3) и (2.4), полагая в них $U_2 = b e^{i\psi}$ и получив систему четырех уравнений для a, φ и b, ψ; при этом следует считать

$$a = \frac{K(\tau)}{f}\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right), \quad b = \frac{K'(\tau)}{F}\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 F^2}\right)$$

$$\varphi = \sigma(\tau) + k\frac{y^2}{2}, \quad \psi = \Sigma(\tau) + k'\frac{y^2}{2}$$

и получить обыкновенные дифференциальные уравнения для f, F, σ, Σ, k, k', K, K'.

В задаче о пучках с осевой симметрией получается решение [17], из которого следует, что для сред, в которых $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2 > 0$, выпуклые волны фокусируются.

Для простоты выберем магнитное поле по оси пучка x, тогда из (1.27) получится, что $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2\partial\alpha_3 = 0$, $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2 = \partial^2\alpha_1/\partial\alpha_3^2$. В случае, когда $M < 0$ и $d > 0$ (что означает $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2 > 0$) будет иметь место фокусирование пучков. Хотя указанное условие означает, что в силу (1.5) для точечных волн $c^2>0$ только внутри некоторого угла вблизи оси x, и в этом смысле волны вне угла неустойчивые, тем не менее для узких пучков $H_n \approx H_x$ условие устойчивости выполнено.

ՄԱԳՆԻՍԱՑՈՂ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է մագնիսական դաշտում գտնվող, գազի պղպջակներ պարունակող, մագնիսական հեղուկի համար կարճ ալիքների հավասարումների ընդհանուր տեսքի կառուցումը։ Ստացված են քվազիմոնոքրոմատիկ ալիքների դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդների և ֆազերի հավասարումները։ Տիպիկ դիֆրակցիոն խնդիրների համար տրվում է մոդուլյացիայի հավասարումների պարզեցումը, որում որոշիչ են հանդիսանում ըստ ալիքի երկարության ածանցյալները։ Բերվում է նեղ փնջերի ֆոկուսացման պայմանը։

THE PROPAGATIONS OF NONLINEAR WAVES IN MAGNETIZED FLUID

A. G. BAGDOEV, L. G. PETROSSIAN

Summary

The construction of general form of equations of short waves in magnetic fluid with gas bubbles in the magnetic field is given. The equations of slow varying amplitudes and phases of quasimonochromatic waves are obtained. The simplification of equations of modulations for typical diffraction problems, in which the greatest is the differentiation along the wave, is rendered. The conditions of narrow bundle focusing are carried out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика намагничивающихся жидкостей.—Итоги науки и техники, сер.Механика жидкости и газа, М.: т. *16*, с. 76—208.
2. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн.—ПММ, 1958, т. *22*, № 5, с. 586—599.
3. *Шефтер Г. М.* Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости.—ПММ, 1969, т. *33*, № 1, с. 162—168.
4. *Минасян М. М.* О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике.—Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. *55*, № 5, с. 273—280.
5. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.—Ж. выч. мат. и матем. физики, 1972, т. *12*, № 6, с. 1512—1529.
6. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкости с пузырьками газа.—В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.

7. *Crespo A.* Sound and shock waves in liquids containing bubbles.—Phys. Fluids, 1969, v. 12, № 11, p. 2274.
8. *Бэтчелор Дж. К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости.—Сб. пер. Механика, 1968, № 3, с. 65—84.
9. *Кедринский В. К.* Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа.—ПМТФ, 1968, № 4, с. 29—34.
10. *Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде.—Докл. АН СССР, 1972, т. *207*, № 2, с. 313—315.
11. *Noordzij L.* Shock waves in bubble—liquid mixtures.—Phys. Comm., 1971, v. 3, № 1.
12. *Когарко Б. С.* Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации.—Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 4, с. 779—782.
13. *Паркин Б. Р., Гилмор Ф. Р., Броуд Г. Л.* Ударные волны в воде с пузырьками воздуха.—В сб.: Подводные и подземные взрывы. М.: Мир, 1974, с. 152—258.
14. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо диссипативной среды.—ЖТФ, 1980, т. *50*, вып. 12, с. 2504—2511.
15. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями.—ЖТФ, 1980, т. *50*, вып. 12, с. 2512—2519.
16. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 133—143.
17. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. *36*, № 5, с. 3—16.
18. *Bagdoev A. G., Petrossian L. G.* The propagation of quasimonochromatic nonlinear modulation waves in micropolar electroconducting gas fluid mixture.—Modelling, Simulation and Control, A, AMSE, Press, 1984, v. 1, № 1, p. 1—29.
19. *Jeffery A., Tanuiti T.* Nonlinear wave propagation.—New York—London: Acad. Press, 1964. 369 p.
20. *Багдоев А. Г.* Уравнение нелинейной вязкотермомагнитной среды вблизи фронтов волн.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1974, т. *27*, № 1, с. 63—77.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
7.XII.1984