ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 6, 1986 Механика

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

СИМОНЯН В. В.

§ 1. Постановка задачи

Пусть упругое пространство составлено из двух полупространств ($z>0$, $z<-2h$) одинакового материала, соединенных между собой посредством слоя ($-2h\leqslant z\leqslant 0$) из другого материала. Слой расслаблен цилиндрическим отверстием ($r=R$, $-2h\leqslant z\leqslant 0$). Между граничными плоскостями слоя и двух полупространств на участках $r\geqslant R_1>>R$ имеет место полное сцепление, а на кольцевых областях $R<r<<R_1$ имеются трещины. На боковой поверхности и на торцах цилиндрической полости действует нормальное давление постоянной интенсивности.

Следует определить распределение напряжений на контактных поверхностях слоя с полупространствами.

В силу симметрии будем рассматривать напряженное состояние только в половине области составного пространства, а именно: в составном полупространстве ($-h<z<\infty$) с цилиндрической выемкой глубины h (фиг. 1.). Таким образом, решается задача пространственного слоя с цилиндрическим отверстием, сцепленным с полупространством. Другие задачи для полупространства и пространственных слоев рассматривались в работах [9, 11—13, 15].

Условимся все величины, относящиеся к полупространству ($z>0$), отмечать индексом 1, а величины, относящиеся к слою с цилиндрическим отверстием ($-h\leqslant z\leqslant 0$, $R\leqslant r<\infty$), —индексом 2.

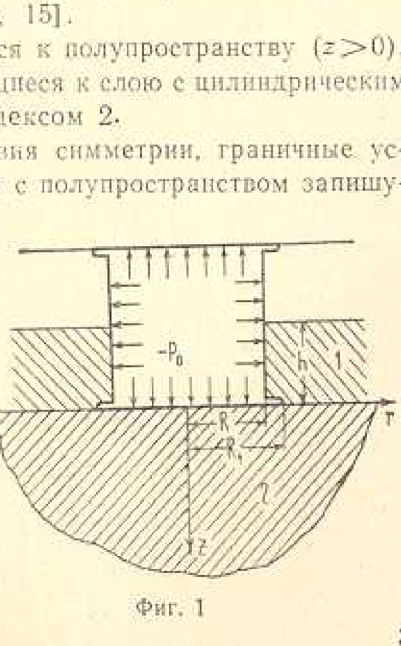
При такой постановке задачи условия симметрии, граничные условия и условия полного сцепления слоя с полупространством запишутся в виде

$$U_z^{(1)}(r,-h)=0,\quad \tau_{rz}^{(1)}(r,-h)=0\qquad (R\leqslant r<\infty)\qquad (1.1)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(R,z)=0,\quad \sigma_r^{(1)}(R,z)=-p_0\qquad (-h\leqslant z\leqslant 0)\qquad (1.2)$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=0,\quad \sigma_z^{(2)}(r,0)=-p_0\qquad (0\leqslant r<R)\qquad (1.3)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0)=\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=\tau(r)\qquad (R\leqslant r<\infty)\qquad (1.4)$$



Фиг. 1

$$\sigma_z^{(1)}(r,0)=\sigma_z^{(2)}(r,0)=p(r) \qquad (R\leqslant r<\infty) \tag{1.5}$$

$$U_z^{(1)}(r,0)=U_z^{(2)}(r,0); \quad U_r^{(1)}(r,0)=U_r^{(2)}(r,0) \quad (R_1\leqslant r<\infty) \tag{1.6}$$

Входящие в условия (1.4) и (1.5) функции $p(r)$ и $\tau(r)$ —контактные нормальные и касательные напряжения, действующие на плоскости сцепления $z=0$, которые подлежат определению.

Решение задачи построим с помощью бигармонической функции А. Лява, которую для области (1) ищем в виде суммы интеграла Вебера [16] и ряда Фурье [1, 3, 4]

$$\Phi_1(r,z)=\int_0^\infty [A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda z+B(\lambda)\operatorname{ch}\lambda z+C(\lambda)\lambda z\operatorname{sh}\lambda z+D(\lambda)\lambda z\operatorname{ch}\lambda z]\,W_0(\lambda r)d\lambda+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[A_kK_0(\lambda_k r)+B_k\lambda_k rK_1(\lambda_k r)]\sin\lambda_k z+Dz\ln r$$

$$(R\leqslant r<\infty,\ -h\leqslant z\leqslant 0) \tag{1.7}$$

а для полупространства—в виде интеграла Ханкеля

$$\Phi_2(r,z)=\int_0^\infty \exp(-\lambda z)J_0(\lambda r)[E(\lambda)+\lambda zF(\lambda)]d\lambda, \quad (z>0,\ 0\leqslant r<\infty) \tag{1.8}$$

Здесь $J_n(x)$ —функции Бесселя первого рода от действительного аргумента. $K_n(x)$ —функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента, функция $W_n(x)$ определяется соотношением

$$W_n(x)=J_n(x)Y_1(\lambda R)-Y_n(x)J_1(\lambda R) \tag{1.9}$$

где $Y_n(x)$—функции Бесселя второго рода от действительного аргумента,

$$W_1(\lambda R)=0;\quad W_0(\lambda R)=-2/\pi R\lambda;\quad \lambda_k=k\pi/h$$

Пользуясь известными формулами, выражающими компоненты напряжений и перемещений через функцию Лява, и удовлетворяя граничным условиям (1.1)—(1.5), все неизвестные весовые функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, $E(\lambda)$ и $F(\lambda)$ выражаются через трансформанты Вебера и Ханкеля от неизвестных контактных напряжений $p(r)$, $\tau(r)$ и неизвестные коэффициенты разложения B_k.

Удовлетворяя последним двум условиям сцепления (1.6), получим интегральные уравнения относительно неизвестных контактных напряжений $p(r)$ и $\tau(r)$

$$G_2\int_0^\infty \frac{W_0(\lambda R)[(1-2\nu_1)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h-\lambda h]d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^\infty t\tau(t)\,W_1(\lambda t)dt+$$

$$+2(1-\nu_1)G_2\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^2\lambda h\,W_0(\lambda r)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^\infty tp(t)\,W_0(\lambda t)dt+$$

$$+4(1-\nu_1)\,G_2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 B_k^*\int_0^{\infty}\frac{\lambda^3\mathrm{sh}^2\lambda h\,W_0(\lambda R)\,W_0(\lambda r)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}=$$

$$=-2G_1(1-\nu_2)\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\,d\lambda\int_{R_1}^{\infty}tp(t)J_0(\lambda t)\,dt+(1-2\nu_2)G_1\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\,d\lambda\,\times$$

$$\times\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)J_1(\lambda t)\,dt+2(1-\nu_2)G_1p_0\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\,d\lambda\int_0^{R}tJ_0(\lambda t)\,dt \tag{1.10}$$

$$2(1-\nu_1)\int_0^{\infty}\frac{W_1(\lambda r)\mathrm{ch}^2\lambda h\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)\,W_1(\lambda t)\,dt+$$

$$+G_2\int_0^{\infty}\frac{[(1-2\nu_1)\mathrm{sh}\lambda h\,\mathrm{ch}\lambda h-\lambda h]\,W_1(\lambda r)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\int_{R_1}^{\infty}tp(t)\,W_0(\lambda t)\,dt+$$

$$+2G_2\sum_{k=1}^{\infty}B_k^*\left\{\lambda_k^2\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2W_1(\lambda r)[(1-2\nu_1)\mathrm{sh}\lambda h\,\mathrm{ch}\lambda h-\lambda h]\,W_0(\lambda R)\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{2(1-\nu_1)}{RK_1(\lambda_kR)}+\frac{\lambda_kK_0(\lambda_kR)}{K_1^2(\lambda_kR)}\right]K_1(\lambda_kR)+\frac{\lambda_krK_0(\lambda_kr)}{RK_1(\lambda_kr)}\right\}=$$

$$=-(1-2\nu_2)G_1p_0\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)\,d\lambda\int_0^{R}tJ_0(\lambda t)\,dt+G_1(1-2\nu_1)\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)\,d\lambda\int_{R_1}^{\infty}tp(t)\,\times$$

$$\times J_0(\lambda t)\,dt-2G_1(1-\nu_2)\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)\,d\lambda\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)J_1(\lambda t)\,dt \tag{1.11}$$

где $\Delta(\lambda)=J_1^2(\lambda R)+Y_1^2(\lambda R)$, $\Omega(\lambda)=\lambda h+\mathrm{sh}\,\lambda h\,\mathrm{ch}\,\lambda h$, $B_k^*=\lambda_k^2RK_1(\lambda_kR)B_k$

Добавляя к интегральным уравнениям (1.10) и (1.11) уравнение для коэффицнента B_k

$$M(\lambda_k)\,B_k^*=4\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_k^2\lambda_p^2B_p^*\int_0^{\infty}\frac{\lambda^4W_0^2(\lambda R)\mathrm{sh}^2\lambda h\,d\lambda}{\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2(\lambda^2+\lambda_p^2)^2}+$$

$$+2\lambda_k^2\int_0^{\infty}\frac{W_0(\lambda R)\mathrm{sh}^2\lambda h\,d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}\int_{R_1}^{\infty}tp(t)\,W_0(\lambda t)\,dt+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{W_0(\lambda R)[(\lambda^2+\lambda_k^2)\Omega(\lambda)+\lambda^2\mathrm{sh}2\lambda h]}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)}\int_{R_1}^{\infty}t\tau(t)\,W_1(\lambda t)\,dt \tag{1.12}$$

где введено обозначение

$$M(\lambda_k)=\frac{\lambda_k^2 h}{2}\left[1+\frac{2(1-\nu_1)}{\lambda_k^2 R^2}-\frac{K_0^2(\lambda_k R)}{K_1^2(\lambda_k R)}\right] \tag{1.13}$$

получим два интегральных уравнения и бесконечную систему, где неизвестными являются контактные напряжения $p(r)$, $\tau(r)$ и коэффициент B_k.

Далее используем следующие известные соотношения для бесселевых функций:

$$J_0(\lambda t)=\frac{2}{\pi}\int_t^\infty\frac{\sin\lambda x dx}{\sqrt{x^2-t^2}},\quad J_1(\lambda t)=-\frac{2}{\pi t}\int_t^\infty\frac{x\cos\lambda x dx}{\sqrt{x^2-t^2}} \tag{1.14}$$

$$W_1(\lambda t)=-\frac{2}{\pi t}\int_t^\infty\frac{x[\cos\lambda x Y_1(\lambda R)-\sin\lambda x J_1(\lambda R)]dx}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

$$W_0(\lambda t)=\frac{2}{\pi}\int_t^\infty\frac{[\sin\lambda x Y_1(\lambda R)+\cos\lambda x J_1(\lambda R)]dx}{\sqrt{x^2-t^2}} \tag{1.15}$$

После подстановки выражений (1.14) и (1.15) в интегральные уравнения (1.10) и (1.11), полученные в новых интегральных уравнениях внутренние интегралы преобразуем следующим образом:

$$\int_{R_1}^\infty tp(t)J_0(\lambda t)dt=\int_{R_1}^\infty H(x)\sin\lambda x dx;\quad \int_{R_1}^\infty t\tau(t)J_1(\lambda t)dt=\int_{R_1}^\infty S(x)\cos\lambda x dx$$

$$\int_{R_1}^\infty tp(t)W_0(\lambda t)dt=\int_{R_1}^\infty H(x)[\sin\lambda x Y_1(\lambda R)+\cos\lambda x J_1(\lambda R)]dx$$

$$\int_{R_1}^\infty t\tau(t)W_1(\lambda t)dt=\int_{R_1}^\infty S(x)[\cos\lambda x Y_1(\lambda R)-\sin\lambda x J_1(\lambda R)]dx \tag{1.16}$$

Здесь введены новые функции

$$H(x)=\frac{2}{\pi}\int_{R_1}^\infty\frac{tp(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}};\quad S(x)=-\frac{2x}{\pi}\int_{R_1}^\infty\frac{\tau(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \tag{1.17}$$

С помощью формул (1.17) интегральные уравнения (1.10) и (1.11) запишутся относительно новых функций $H(x)$ и $S(x)$, которые представляют собой интегралы Абеля от неизвестных контактных напряжений $p(r)$ и $\tau(r)$.

Далее, применяя к первому интегральному уравнению оператор

$$I_1(f)=\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{rf(r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

а к второму – оператор

$$I_2(f)=\frac{d}{dy}\left[y\int\limits_y^\infty\frac{f(r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]$$

и учитывая следующие известные соотношения [8]:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_y^\infty\frac{rW_0(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=-[\sin\lambda y\,Y_1(\lambda R)+\cos\lambda y\,J_1(\lambda R)]$$

$$\frac{d}{dy}\int\limits_y^\infty\frac{rJ_0(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=-\sin\lambda y;\quad \frac{d}{dy}\left[y\int\limits_y^\infty\frac{J_1(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]=\cos\lambda y$$

$$\frac{d}{dy}\left[y\int\limits_y^\infty\frac{W_1(\lambda r)dr}{\sqrt{r^2-y^2}}\right]=\cos\lambda y\,Y_1(\lambda R)-\sin\lambda y\,J_1(\lambda R) \tag{1.18}$$

получим следующие интегральные уравнения:

$$\mu_1H(y)=\frac{\mu_2}{\pi}\int\limits_{R_1}^\infty S(x)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\int\limits_{R_1}^\infty K_1(x,y)H(x)dx+$$

$$+\int\limits_{R_1}^\infty K_2(x,y)S(x)dx+\sum_{k=1}^\infty\chi_k^{(1)}(y)\,B_k^*+f(y)$$

$$\mu_1S(y)=\frac{\mu_2}{\pi}\int\limits_{R_1}^\infty H(x)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\int\limits_{R_1}^\infty S(x)K_3(x,y)dx+$$

$$+\int\limits_{R_1}^\infty H(x)K_4(x,y)dx+\sum_{k=1}^\infty\chi_k^{(2)}(y)B_k^* \tag{1.19}$$

Здесь введены обозначения

$$\mu_1=1+\frac{(1-\nu_1)G_2}{(1-\nu_2)G_1};\quad \mu_2=\frac{(1-2\nu_2)G_1-(1-2\nu_1)G_2}{2(1-\nu_2)G_1}$$

$$K_1(x,y)=(1-\mu_1)\int\limits_0^\infty\left\{\frac{I_1(\lambda R)\exp(-(x+y)\lambda)}{K_1(\lambda R)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\exp(-2\lambda h)-1-2\lambda h)S_2(\lambda x)S_2(\lambda y)}{\pi\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}\right\}d\lambda$$

$$K_2(x,y)=\frac{2h}{\pi}(\mu_1-1)\int\limits_0^\infty\frac{\lambda S_2(\lambda y)S_1(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}$$

$$K_4(x,y)=\frac{2h(\mu_1-1)}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda S_1(\lambda y)S_2(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)}$$

$$\chi_k^{(1)}(y)=\frac{4(1-\mu_1)\lambda_k^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{W_0(\lambda R)\,\mathrm{sh}^2\lambda h S_2(\lambda y)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2};\quad f(y)=\frac{2p_0(\mu_1-1)}{\pi}(y-\sqrt{y^2-1})$$

$$\chi_k^{(2)}(y)=\frac{4\lambda_k^2}{2}\int_0^\infty\frac{\lambda^2S_1(\lambda y)[(1-2\nu_1)\,\mathrm{sh}\lambda h\,\mathrm{ch}\lambda h-\lambda h]\,W_0(\lambda R)d\lambda}{\Delta(\lambda)\Omega(\lambda)(\lambda^2+\lambda_k^2)^2}-$$

$$-\frac{G_2}{2(1-\nu_1)G_1}\left[2\nu_1-1-\lambda_k y-\frac{\lambda_k K_0(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k R)}\right]\frac{\exp(-\lambda_k y)}{K_1(\lambda_k R)}$$

$$S_1(\lambda x)=\cos\lambda x\,Y_1(\lambda R)-\sin\lambda x\,J_1(\lambda R)$$

$$S_2(\lambda x)=\sin\lambda x\,Y_1(\lambda R)+\cos\lambda x\,J_1(\lambda R) \qquad (1.20)$$

Заметим, что при $R_1=R$ ядра $K_1(x, y)$ и $K_3(x, y)$ имеют неподвижную особенность вида $\frac{1}{x+y-2R}$. При $R_1>R$ все ядра $K_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ в системе интегральных уравнений (1.19) регулярны.

Для определения постоянной D получим уравнение

$$\frac{D}{R^2}+p_0=-\frac{1}{h}\int_{R_1}^\infty S(x)\,dx\int_0^\infty\frac{S_1(\lambda x)\,W_0(\lambda R)d\lambda}{\Delta(\lambda)} \qquad (1.21)$$

Перейдем в системе интегральных уравнений (1.19) к безразмерным координатам $(R/x,\ R/y)$ и введем новые обозначения

$$H^*(x)=RH(R/x)/x;\quad S^*(x)=RS(R/x)/x$$

Тогда, продолжая функции $H^*(x)$ и $S^*(x)$ на отрицательную область значений аргумента соответственно четным и нечетным образом $H^*(-x)=H^*(x)$; $S^*(-x)=-S^*(x)$, вместо интегральных уравнений (1.19) получим интегральные уравнения такого вида:

$$H^*(y)+\frac{\mu_2}{\pi\mu_1}\int_{-1}^1\frac{S^*(x)dx}{y-x}=\int_{-1}^1H^*(x)\,K_1^*(x, y)dx+\int_{-1}^1S^*(x)\,K_2^*(x, y)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty\chi_k^{(1)*}(y)B_k^*+f^*(y) \qquad (1.22)$$

$$S^*(y)-\frac{\mu_2}{\pi\mu_1}\int_{-1}^1\frac{H^*(x)dx}{y-x}=\int_{-1}^1S^*(x)\,K_3^*(x, y)dx+\int_{-1}^1H^*(x)K_4^*(x, y)+$$

$$+\sum_{k=1}^\infty\chi_k^{(2)*}(y)B_k^* \qquad (1.23)$$

а из уравнения (1.12), на основании тех же преобразований, получим

$$B_k^*=\sum_{p=1}^\infty a_{kp}B_p^*+\int_{-1}^1S^*(x)Q_k^{(1)}(x)dx+\int_{-1}^1H^*(x)Q_k^{(2)}(x)dx;\ k=1, 2, \ldots \qquad (1.24)$$

где

$$K_i(x,y)=\frac{K_i\left(\frac{1}{|x|},\frac{1}{|y|}\right)}{2|xy|},\quad i=1,2,3,4;\quad f^*(y)=f\left(\frac{1}{|y|}\right)\Big/|y|$$

$$\chi_k^{(1)*}(y)=\chi_k^{(1)}\left(\frac{1}{|y|}\right)\Big/|y|;\qquad \chi_k^{(2)*}(y)=\chi_k^{(2)}\left(\frac{1}{|y|}\right)\Big/|y|$$

$$Q_k^{(1)}(x)=\frac{1}{M(\lambda_k)|x|}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^2W_0(\lambda)[(\lambda^2+\lambda_k^2)\Omega(\lambda)+\lambda_k^2\operatorname{sh}^2\lambda h]S_1(\lambda/|x|)d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)}$$

$$Q_k^{(2)}(x)=\frac{1}{M(\lambda_k)|x|}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^2W_0(\lambda)S_2(\lambda/|x|)\operatorname{sh}^2\lambda h d\lambda}{(\lambda^2+\lambda_k^2)^2\Omega(\lambda)\Delta(\lambda)}\tag{1.25}$$

Итак, решение задачи сведено к решению системы интегральных уравнений (1.22) и (1.23), а также к бесконечной системе (1.24).

§ 2. Сведение решения задачи к системе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Введем новую комплекснозначную функцию

$$\varphi(x)=H^*(x)+iS^*(x)\tag{2.1}$$

Умножая интегральное уравнение (1.23) на i и складывая с интегральным уравнением (1.22), получим

$$\varphi(y)-\frac{i\theta}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)dx}{y-x}=\int\limits_{-1}^{1}\varphi(x)K(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{1}\overline{\varphi}(x)P(x,y)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k(y)B_k^*+f^*(y)$$

где (2.2)

$$\theta=\frac{\mu_2}{\mu_1};\quad K(x,y)=\frac{1}{2}[K_1^*(x,y)-iK_2^*(x,y)+K_3^*(x,y)+iK_4^*(x,y)]$$

$$P(x,y)=\frac{1}{2}[K_1^*(x,y)+iK_2^*(x,y)-K_3^*(x,y)+iK_4^*(x,y)]$$

$$\chi_k(y)=\chi_k^{(1)*}(y)+i\chi_k^{(2)*}(y)\tag{2.3}$$

Таким образом, решение задачи сведено к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши. Решение уравнения (2.2) ищем в виде ряда по ортогональным многочленам Якоби [7]

$$\varphi(x)=\omega(x)\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(\alpha,-\alpha)}(x)\tag{2.4}$$

где $\omega(x)=(1-x)^{-i\gamma}(1+x)^{i\gamma}$, $|\operatorname{Re}\gamma|<1$, $\alpha=-i\gamma$, $\gamma=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}i\theta$

Далее, пользуясь известным функциональным соотношением для многочленов Якоби [7, 10] и условием ортогональности многочленов Якоби, сведем уравнение (2.2) к бесконечной системе

$$X_n=\sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{nm}+\sum_{m=1}^{\infty} \overline{X}_m B_{nm}+\sum_{k=1}^{\infty} B_k^* D_{kn}+E_n^{(0)} X_0+E_n^{(1)} \tag{2.5}$$

где

$$A_{nm}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)dy \int_{-1}^{1} \omega(x) P_m^{(\alpha,-\alpha)}(x) K(x,y)dx$$

$$B_{nm}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)dy \int_{-1}^{1} \omega(x) P_m^{(-\alpha,\alpha)}(x) P(x,y)dx$$

$$D_{kn}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)\chi_k(y)dy;\quad E_n^{(0)}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y) b(y)dy$$

$$E_n^{(1)}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y) f^*(y)dy \tag{2.6}$$

$$b(y)=\int_{-1}^{1} \omega_1(y) P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)dy \int_{-1}^{1} [\omega(x) P_0^{(\alpha,-\alpha)}(x) K(x,y)+\omega(x) P_0^{(-\alpha,\alpha)}(x) P(x,y)]dx$$

$$\omega_1(y)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{\alpha};\quad c_n=\frac{2\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{(2n-1)\Gamma^2(n)}$$

Уравнение (1.24) примет вид

$$B_k^*=\sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} B_p^*+\sum_{n=0}^{\infty} X_n F_{kn}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty} F_{kn}^{(2)} \overline{X}_n,\quad k=1,2,\ldots \tag{2.7}$$

где

$$F_{kn}^{(1)}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \omega(x) P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x)[Q_k^{(2)}(x)-iQ_k^{(1)}(x)]dx$$

$$F_{kn}^{(2)}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \omega(x) P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)[Q_k^{(1)}(x)+iQ_k^{(2)}(x)]dx$$

Итак, решение задачи окончательно сведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.5) и (2.7).

После численного решения бесконечных систем (2.5) и (2.7) все искомые величины будут определены.

Неизвестный коэффициент X_0 определяется из условия равновесия слоя

$$X_0=-\frac{R^2 \operatorname{sh} \pi\gamma\, p_0}{2\pi\gamma}$$

§ 3. Исследование бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.5) и (2.7)

Рассмотрим первое из ядер бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.5)

$$A_{nm}=\frac{1}{c_n}\int_{-1}^{1}\omega_1(y)P_{n-1}^{(-\alpha,\alpha)}(y)dy\int_{-1}^{1}\omega(x)P_m^{(\alpha,-\alpha)}(x)K(x,y)dx \tag{3.1}$$

где ядро $K(x, y)$ определяется по второй формуле (2.3).

Используя формулу Родрига для ортогональных многочленов Якоби [17] и интегрируя по частям в интеграле (3.1), получим

$$A_{nm}=\frac{1}{2mc_n(2n-2)}\int_{-1}^{1}P_{m-1}^{(\alpha+1,\,-\alpha+1)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{-\alpha+1}dx\int_{-1}^{1}(1+y)^{\alpha+1}\times$$

$$\times(1-y)^{-\alpha+1}P_{n-2}^{(-\alpha+1,\,\alpha+1)}(y)\frac{\partial^2 K^*(x,y)dy}{\partial x\partial y} \tag{3.2}$$

Сделав замену переменных

$$x=\cos\theta,\quad y=\cos\varphi;\quad 0<\theta<\pi;\quad 0<\varphi<\pi \tag{3.3}$$

и используя асимптотические представления многочленов Якоби для больших n [17], а также асимптотическое представление функций $\Gamma(n)$ для больших n [17], получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n-2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I}{m\sqrt{m-1}} \tag{3.4}$$

где

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{(1-\cos\theta)^{\alpha+1}(1+\cos\theta)^{-\alpha+1}(1-\cos\varphi)^{-\alpha+1}(1+\cos\varphi)^{\alpha+1}}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha+\frac{3}{2}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\alpha+\frac{3}{2}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 K^*(\cos\theta,\cos\varphi)}{\partial\theta\partial\varphi}\right|d\theta d\varphi \tag{3.5}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I}{\sqrt{n-2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sqrt{m-1}}=0 \tag{3.6}$$

то следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|=0 \tag{3.7}$$

Тем же путем строятся аналогичные оценки для всех коэффициентов бесконечной системы (2.5) и (2.7).

Таким образом, показывается, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.5) и (2.7) квазивполне регулярна.

Для выделения особенностей контактных напряжений $p(r)$ и $\tau(r)$ у границы зоны контакта, на основании формул обращения Абеля напряжения $p(r)$ и $\tau(r)$ представим в виде

$$p(r)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-R_1^2}}\Big[\cos\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(-\alpha,\,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)-$$

$$-\sin\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(-\alpha,\,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)\Big]+\theta_1(r) \tag{3.8}$$

$$\tau(r)=-\frac{1}{r\sqrt{r^2-R_1^2}}\Big[\cos\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(-\alpha,\,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)+$$

$$+\sin\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(-\alpha,\,\alpha)}\left(\frac{R_1}{r}\right)\Big]+\theta_2(r) \tag{3.9}$$

Из формул (3.8) и (3.9) видно, что контактные нормальные и касательные напряжения у границы зоны контакта имеют корневую особенность с осциллирующими множителями $\cos\left[\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\right]$ и $\sin\left[\gamma\ln\frac{r+R_1}{r-R_1}\right]$ [18].

В случае однородного пространства с цилиндрической полостью решение задачи сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма II рода и к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. С помощью ортогональных многочленов Лежандра, решение задачи окончательно сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [14].

§ 4. Численный пример

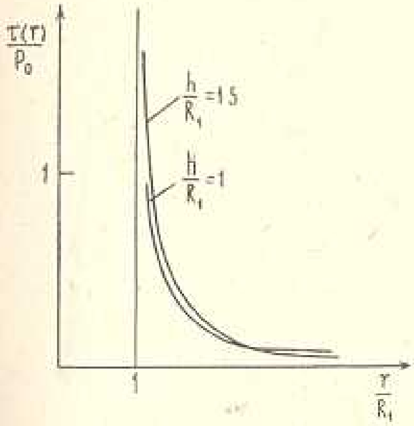
Для напряженного состояния однородного пространства с цилиндрической полостью, когда на поверхности полости действует равномерное давление, проведены расчеты на ЭВМ. Решена система линейных уравнений из 24-х неизвестных. Результаты расчетов по определению контактных напряжений представлены в табл. 1.

Таблица 1

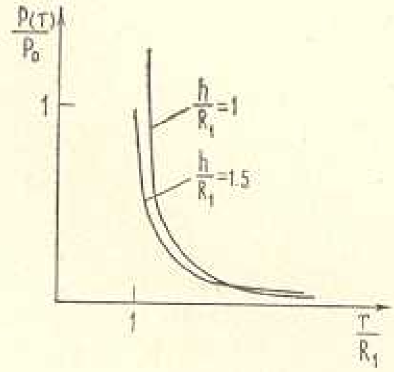
r/R_1	$p(r)/p_0$		$\tau(r)/p_0$	
	$\frac{h}{R_1}=1;\ \nu=0{,}3$	$\frac{h}{R_1}=1{,}5;\ \nu=0{,}3$	$\frac{h}{R_1}=1;\ \nu=0{,}3$	$\frac{h}{R_1}=1{,}5;\ \nu=0{,}3$
1,01	7,6432	5,1182	3,8307	2,9815
1,03	3,8762	2,1324	2,9061	2,0912
1,05	2,3644	1,9961	1,7724	1,3445
1,07	2,1065	1,6351	1,3278	1,0827
1,09	1,6084	1,1763	1,0442	0,9440
1,5	0,2286	0,1812	0,1057	0,0491
2,0	0,1834	0,1423	0,0893	0,0758
2,5	0,1261	0,1373	0,0452	0,0609
3	0,1051	0,1212	0,0140	0,0352

Распределение контактных напряжений иллюстрируется также на фиг. 2 и 3.

Опираясь на результаты вычислений, можно сделать некоторые выводы относительно поведения контактных напряжений на линии сцепления слоя с цилиндрической полостью с полупространствами:



Фиг. 2



Фиг. 3

1. Для любой глубины цилиндрической полости и для любого значения коэффициента Пуассона оба напряжения имеют особенности у границы зоны контакта. Вследствие этого контактные напряжения резко возрастают при приближении к границе зоны контакта.

2. При уменьшении глубины цилиндрической полости контактные нормальные и касательные напряжения возрастают.

Автор выражает благодарность Абрамяну Б. Л. и Макаряну В. С. за внимание к работе.

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՌՈՉՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Վ. Վ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է գլանային խոռոչով անհամասեռ տարածության համար առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ խոռոչի պատերի վրա ազդում է հավասարաչափ բեռ։ Խնդրի լուծումը փնտրվում է Լյավի բիհարմոնիկ ֆունկցիաների օգնությամբ։ Խնդրի լուծումը բերվում է անվերջ գծային հանրահաշվական համակարգերի լուծմանը։ Մասնավոր դեպքում, երբ տարածությունը համասեռ է, կատարված է թվային հաշվարկ կոնտակտային նորմալ և շոշափող լարումների բաշխման բնույթը պարզելու համար։

AN AXISYMMETRICAL PROBLEM FOR A NONHOMOGENEUS SPACE WITH A CYLINDRICAL CAVITY

V. V. SIMONIAN

Summary

An axisymmetrical problem for a nonhomogeneus space with a cylindrical cavity is considered. It is assumed that the load of p_0 intensivity acts upon the surface of the cylindrical cavity. The solution of the problem in built with the help of Love biharmonic functions. The solution of the problem is reduced to the infinite systems of linear algebraic eqations. In particular when the space is homogeneus calculations for the normal and tangential stresses are made at the points of contact.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.—Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1969, т. 22, № 2, с. 3—13.
2. *Васильев В. З.* Напряжения в упругом изотропном полупространстве вблизи торца вертикальной цилиндрической выемки.—ПМ, АН УССР, 1967, т. *3*, № 7, с. 109—117.
3. *Абрамян Б. Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра.—Докл. АН Арм. ССР. 1958, т. *26*, №2, с. 65—72.
4. *Макарян В. С., Папоян С. О.* Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1980, т. *33*, №1, с. 3—11.
5. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1976, т. *29*, №5, с. 3—14.
6. *Srivastav P., Narain Prem* Stress distribution to pressurized exterior crak in an infinite isotropic elastic medium with coaxial cylindrical cavity.—Intern. J. Engng. Sci., 1966, v. 4, №6, p. 689—697.
7. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного пространства при наличии сцепления.—ПММ, 1973, т. *37*, вып. 6, с. 1109—1116.
8. *Бейтман Г. и Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 296 с.
9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками.—ПММ, 1972, т. *36*, вып. 5, с. 770—780.
10. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби.—ПММ, 1966, т. *30*, вып. 3, с. 564—569.
11. *Srivastav R. P.* A pair of dual integral equations involving Bessel functions of the first and second kind.—Proc. Edinb. Math. Soc. Ser. 2, 1964, v. 14, №2, p. 25—36.
12. *Шапиро Г. С.* К вопросу об определении напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки.—Изв. АН СССР, ОТН, 1941, №5, с. 105—109.
13. *Айзенберг Д. Ю., Шапиро Г. С.* О передаче давления через слой, имеющий цилиндрическое отверстие.—Инж. сборник, 1950, №7, с. 65—69.
14. *Симонян В. В.* Осесимметричная задача для пространства с цилиндрической полостью.—Докл. АН Арм. ССР, 1981, т. *72*, №4, с. 244—250.
15. *Симонян В. В.* Об одной осесимметричной задаче для пространства с цилиндрической полостью. В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела.—Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981, с. 238—243.
16. *Титчмарш Э.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго рода. Часть I.—М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
17. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
18. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения.—Докл. АН СССР, 1937, т. *17*, №4, с. 173—178.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
28.I.1985