ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 539.376

# УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

ДРОЗДОВ А. Д.

В работе получены условия устойчивости армированных стержней, изготовленных из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала, при учете сдвиговых деформаций. Устойчивость исследована при произвольном ядре релаксации материала и различных типах закрепления концов стержня. Определение устойчивости на бесконечном интервале времени соответствует определению устойчивости по Ляпунову.

*1. Постановка задачи.* Рассмотрим изгиб прямолинейного стержня длины $l$, изготовленного из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Стержень имеет две оси симметрии. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через продольную ось и ось симметрии. Обозначим через $S$ площадь поперечного сечения стержня, а через $J$—его момент инерции. Введем ось $0x$, направленную вдоль продольной оси в недеформированном состоянии. Возраст материала стержня в окрестности точки $x$ относительно элемента материала в окрестности точки 0 обозначим через $\rho(x)$. Функция $\rho$ кусочно-непрерывная и ограниченная.

В момент времени $t_0 \geqslant 0$ к стержню приложена внешняя нагрузка, состоящая из сжимающей силы $P$ и распределенной поперечной нагрузки интенсивности $q(x)$. Деформации сжатия $\varepsilon_1$ и сдвига $\varepsilon_2$ связаны с соответствующими напряжениями $\sigma_1$ и $\sigma_2$ соотношениями [1]

$$\sigma_1 = E(I-R_1)\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = 2G(I-R_2)\varepsilon_2 \tag{1.1}$$

Здесь $E$—постоянный модуль упруго-мгновенной деформации, $G$—постоянный модуль сдвига, $I$—единичный оператор, $R_1$, $R_2$—операторы релаксации при сжатии и сдвиге

$$R_j\varepsilon = \int\limits_{t_0}^{t} r_j(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\varepsilon(\tau, x)d\tau, \quad (j=1, 2)$$

где $r_1$, $r_2$—соответствующие ядра релаксации.

Предположим, что удлинения, сдвиги и углы поворота элемента стержня малы, так что их квадратами можно пренебречь. Обозначим через $w_1(t, x, z)$, $w_2(t, x, z)$ продольное и поперечное смещения точек стержня, находящихся на расстоянии $z$ от продольной оси. Согласно гипотезе прямых нормалей [2]

$$w_1 = u(t, x) + z\gamma(t, x), \quad w_2 = y(t, x) \tag{1.2}$$

Здесь $u$—продольное смещение точек оси стержня, $y$—прогиб стержня, $\gamma$—угол поворота нормали к продольной оси. Из соотношений (1.2) получим

$$\varepsilon_1 = u' + z\gamma', \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\gamma + y'), \quad y' = \partial y/\partial x \tag{1.3}$$

Обозначим через $M$ изгибающий момент, через $Q_0$—перерезывающую силу, а через $Q$—проекцию равнодействующей всех сил, приложенных к сечению, на перпендикуляр к продольной оси в недеформированном состоянии

$$M = -\int \sigma_1 z ds, \quad Q_0 = -\int \sigma_2 ds, \quad Q = Q_0 + Py' \tag{1.4}$$

Здесь $ds$—элемент площади сечения стержня.

Подставим выражения (1.1), (1.3) в соотношения (1.4)

$$\begin{aligned} M &= -EJ(I - R_1)\gamma' \\ Q &= -GS(I - R_2)(\gamma + y') + Py' \end{aligned} \tag{1.5}$$

В квазистатическом приближении уравнения равновесия элемента стержня в изогнутом положении имеют вид [3]

$$M' = Q - Py', \quad Q' = q \tag{1.6}$$

Подставляя выражения (1.5) в равенства (1.6), получим систему уравнений для определения прогиба стержня при учете деформации сдвига

$$EJ[(I - R_1)\gamma']' = GS(I - R_2)(\gamma + y'), \quad [-GS(I - R_2)(\gamma + y') + Py']' = q \tag{1.7}$$

*Определение.* Стержень называется устойчивым по Ляпунову на бесконечном интервале времени, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\sup_x |q(x)| < \delta$ следует оценка $\sup_{t,x} |y(t, x)| < \varepsilon$, $(x \in [0, l], \ t \geq t_0)$.

Цель работы—получение условий на величину сжимающей силы $P$, при которых стержень устойчив. В случае, когда деформацией сдвига можно пренебречь, аналогичная задача исследована в [4].

В дальнейшем предполагаем, что $P < GS$ и выполнены условия:

1) существует такая функция $r_1^{(1)}(t, \tau)$, что для любого $x \in [0, l]$

$$0 \leq r_1(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) \leq r_1^{(1)}(t, \tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

$$|r_1^{(1)}| = \sup_t \int_{t_0}^{t} r_1^{(1)}(t, \tau) d\tau < 1$$

2) функция $r_1^{(1)}(t, \tau)$ допускает представление

$$r_1^{(1)} = \varphi_1(t, \tau) + \varphi_2(t, \tau)(t - \tau)^{-\varkappa_1}$$

где функции $\varphi_1$, $\varphi_2$ непрерывны по $t$, $\tau$ и $0 < \varkappa_1 < 1$.

2. *Устойчивость консольного стержня.* Пусть один конец стержня жестко защемлен, а другой свободен

$$y(t, 0)=\gamma(t, 0)=0, \quad M(t, l)=Q(t, l)=0 \tag{2.1}$$

Из второго равенства (1.6) и (2.1) найдем

$$Q=-N(x), \quad N=\int_x^l q d\xi \tag{2.2}$$

Подставим это выражение в (1.5) и разрешим полученное соотношение относительно $y'$

$$y'=(1-\alpha)^{-1}[I-(1-\alpha)^{-1}R_2]^{-1}[N/(GS)-(I-R_2)\gamma], \quad \alpha=P/(GS) \tag{2.3}$$

Из (1.7), (2.2), (2.3) получим

$$\begin{gathered}[(I-R_1)\gamma']'=-n\alpha(1-\alpha)^{-1}[I+\alpha(1-\alpha)^{-1}(I-(1-\alpha)^{-1}R_2)^{-1}R_2]\gamma+\\ +(1-\alpha)^{-1}[I+\alpha(1-\alpha)^{-1}(I-(1-\alpha)^{-1}R_2)^{-1}R_2]N_1\\ n=GS/(EJ), \quad N_1=N/(EJ)\end{gathered} \tag{2.4}$$

Граничные условия для уравнения (2.4) имеют вид

$$\gamma(t, 0)=0, \quad \gamma'(t, l)=0 \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала случай, когда эффектом ползучести при сдвиге можно пренебречь ($R_2=0$). Тогда уравнение (2.4) можно записать в виде

$$[(I-R_1)\gamma']'=-n\alpha(1-\alpha)^{-1}\gamma+(1-\alpha)^{-1}N_1 \tag{2.6}$$

Умножим соотношение (2.6) на $\gamma(t, x)$ и проинтегрируем по $x$ в пределах от 0 до $l$. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (2.5), получим

$$\begin{gathered}J_1^2(t)=n\alpha(1-\alpha)^{-1}J_0^2(t)+\int_0^l \gamma' R_1\gamma' dx-(1-\alpha)^{-1}\int_0^l N_1\gamma dx\\ J_j^2(t)=\int_0^l\left[\frac{\partial^j}{\partial x^j}\gamma(t, x)\right]^2 dx, \quad (j=0, 1)\end{gathered} \tag{2.7}$$

Оценим второе и третье слагаемое в правой части (2.7) с помощью неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\int_0^l \gamma' R_1\gamma' dx\right|\leqslant J_1(t)\int_{t_0}^t r_1^{(1)}(t, \tau)J_1(\tau)d\tau \tag{2.8}$$

$$\left|\int_0^l N_1\gamma dx\right|\leqslant KJ_0(t), \quad K^2=\int_0^l N_1^2 dx$$

Обозначим через $U$ множество непрерывно дифференцируемых функций $v(x)$, удовлетворяющих условиям $v(0)=v'(l)=0$. Положим

$$\lambda=\inf_v \int_0^l (v')^2dx \left| \int_0^l v^2dx \right|^{-1}, \qquad v\in U$$

Согласно неравенству Рэлея [5], $\lambda=\pi^2/(4l^2)$ есть минимальное положительное собственное значение краевой задачи $v''+\lambda v=0$, $v(0)=v'(l)=0$. Из определения величины $\lambda$ следует оценка

$$J_0^2\leqslant\lambda^{-1}J_1^2 \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.7)—(2.9) получим

$$[1-n\alpha\lambda^{-1}(1-\alpha)^{-1}]J_1(t)\leqslant\int_{t_0}^{t} r_1^{(1)}(t, \tau)J_1(\tau)d\tau+K[\lambda^{1/2}(1-\alpha)]^{-1}$$

откуда найдем

$$[1-|r_1^{(1)}|-n\alpha\lambda^{-1}(1-\alpha)^{-1}]J_1^0(t)\leqslant K[\lambda^{1/2}(1-\alpha)]^{-1}, \quad J_1^0(t)=\sup_\tau J_1(\tau), \quad t_0\leqslant\tau\leqslant t \tag{2.10}$$

Из (2.3), (2.5) следует, что существует такая постоянная $C>0$, что

$$|y(t, x)|\leqslant C[J_1^0(t)+K] \tag{2.11}$$

Из неравенств (2.10), (2.11) следует

Теорема 1. Пусть

$$P<\lambda EJ(1-|r_1^{(1)}|)[1+\lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1} \tag{2.12}$$

Тогда стержень устойчив.

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда необходимо учитывать ползучесть как при сжатии, так и при сдвиге. Введем оператор $R$, определенный по формуле $R=\alpha(1-\alpha)^{-1}[I-(1-\alpha)^{-1}R_2]^{-1}R_2$. Ядро этого оператора обозначим через $r(t, \tau)$. Предположим, что выполняются условия:

1) существует такая функция $r^{(1)}(t, \tau, \alpha)$, что для любых $t>t_0$, $x\in[0, l]$, $\alpha\in(0, 1)$

$$|r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))|\leqslant r^{(1)}(t, \tau, \alpha), \quad |r^{(1)}|<\infty$$

2) функция $r^{(1)}(t, \tau, \alpha)$ допускает представление

$$r^{(1)}=\varphi_1(t, \tau, \alpha)+\varphi_2(t, \tau, \alpha)(t-\tau)^{-\varkappa}$$

где функции $\varphi_1$, $\varphi_2$ непрерывны по $t$, $\tau$ и $0<\varkappa<1$.

Запишем уравнение (2.4) в виде

$$[(I-R_1)\gamma']'=-n\alpha(1-\alpha)^{-1}(I+R)\gamma+(1-\alpha)^{-1}(I+R)N_1 \tag{2.13}$$

Умножим равенство (2.13) на $\gamma(t,x)$ и проинтегрируем по $x$ в пределах от 0 до $l$. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (2.5), получим

$$J_1^2(t) = \int_0^l \gamma' R_1 \gamma' dx + n\alpha(1-\alpha)^{-1}\left[ J_0^2(t) + \int_0^l \gamma R \gamma \, dx \right] -$$

$$-(1-\alpha)^{-1} \int_0^l \gamma(I+R) N_1 dx \tag{2.14}$$

Оценим величины, входящие в правую часть (2.14) с помощью неравенства Коши-Буняковского и (2.9)

$$\left| \int_0^l \gamma' R_1 \gamma' dx \right| \leqslant J_1(t) \int_{t_0}^t r_1^{(1)}(t, \tau) J_1(\tau) d\tau$$

$$\left| \int_0^l \gamma R \gamma \, dx \right| \leqslant \lambda^{-1} J_1(t) \int_{t_0}^t r^{(1)}(t, \tau, \alpha) J_1(\tau) d\tau \tag{2.15}$$

$$\left| \int_0^l \gamma(I+R) N_1 dx \right| \leqslant K \lambda^{-1/2} (1+|r^{(1)}|) J_1(t)$$

Из (2.14), (2.15) следует соотношение

$$[1 - n\alpha(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1}] J_1(t) \leqslant \int_{t_0}^t [r_1^{(1)}(t, \tau) + n\alpha(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1} r^{(1)}(t, \tau, \alpha)] J_1(\tau) d\tau +$$

$$+ K(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1/2}(1+|r^{(1)}|)$$

Из этого неравенства получим

$$[1 - |r_1^{(1)}| - n\alpha(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1}(1+|r^{(1)}|)] J_1^0(t) \leqslant K(1-\alpha)^{-1}\lambda^{-1}(1+|r^{(1)}|) \tag{2.16}$$

Из соотношений (2.11), (2.16) следует

Теорема 2. Пусть $\alpha(1-\alpha)^{-1}(1+|r^{(1)}|) < \lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)$. Тогда стержень устойчив.

Приведенное выше условие устойчивости можно записать в виде

$$P < \lambda EJ(1-|r_1^{(1)}|)[1+|r^{(1)}|+\lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1} \tag{2.17}$$

*3. Устойчивость шарнирно опертого стержня.* Пусть концы стержня шарнирно закреплены

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0, \quad \gamma'(t, 0) = \gamma'(t, l) = 0 \tag{3.1}$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда ползучестью при сдвиге можно пренебречь ($R_2 = 0$). Из соотношений (1.7) получим

$$\gamma' = -(1-\alpha) y'' - q_1, \quad q_1 = 2q/(GS) \tag{3.2}$$

Продифференцируем первое равенство (1.7) по $x$ и подставим в него выражение (3.2)

$$[(I-R_1)y'']'' = -n\alpha(1-\alpha)^{-1}y'' + (1-\alpha)^{-1}[nq_1 - ((I-R_1)q_1)''] \tag{3.3}$$

Умножим соотношение (3.3) на $y(t, x)$ и проинтегрируем по $x$ в пределах от 0 до $l$. Интегрируя по частям и учитывая (3.1), (3.2), получим

$$Y_2^2(t) = \int_0^l y'' R_1 y'' dx + n\alpha(1-\alpha)^{-1} Y_1^2(t) + (1-\alpha)^{-1}\left[n\int_0^l q_1 y dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^l y''(I - R_1) q_1 dx \right] \tag{3.4}$$

$$Y_j^2(t) = \int_0^l \left[\frac{\partial^j}{\partial x^j} y(t, x)\right]^2 dx, \quad (j=1, 2)$$

Обозначим через $U$ множество дважды непрерывно дифференцируемых функций $v(x)$, удовлетворяющих условию $v(0)=v(l)=0$. Положим

$$\lambda = \inf_v \int_0^l (v'')^2 dx \left[\int_0^l (v')^2 dx\right]^{-1}, \quad v \in V$$

Согласно неравенству Рэлея [5], $\lambda = \pi^2 l^{-2}$ есть минимальное положительное значение краевой задачи $v^{IV}(x) + \lambda v''(x) = 0$, $v(0) = v(l) = 0$, $v''(0) = v''(l) = 0$. Из определения величины $\lambda$ следует оценка $Y_1^2(t) \leqslant \lambda^{-1} Y_2^2(t)$. Слагаемые в правой части соотношения (3.4) оценим с помощью неравенства Коши-Буняковского аналогично (2.8). Получим, что при $\alpha(1-\alpha)^{-1} < \lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)$ справедливо соотношение

$$Y_2(t) \leqslant C_1 K_1, \quad K_1^2 = \int_0^l q_1^2 dx \tag{3.5}$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от интенсивности поперечной нагрузки. Из граничных условий (3.1) и неравенства Коши-Буняковского найдем

$$|y(t, x)| \leqslant 2l^{3/2} Y_2(t) \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.5), (3.6) следует

Теорема 3. Пусть

$$P < \lambda EJ(1-|r_1^{(1)}|)[1 + \lambda n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1} \tag{3.7}$$

Тогда стержень устойчив.

4. *Устойчивость стержня с жестко защемленными концами.* Пусть концы стержня жестко защемлены

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0, \quad \gamma(t, 0) = \gamma(t, l) = 0 \tag{4.1}$$

и ползучестью при сдвиге можно пренебречь ($R_2 = 0$). Из соотношений (3.2), (4.1) найдем

$$y'(t, x) = (1-\alpha)^{-1}\left[N_2 + \left(l^{-1}\int_0^l \gamma dx - \gamma\right)\right]$$

$$N_2(x) = l^{-1}\int_0^l (l-\xi)q_1 d\xi - \int_0^x q_1 d\xi \tag{4.2}$$

Из (4.2) и первого равенства (1.7) следует соотношение

$$[(I-R_1)\gamma']' = (1-\alpha)^{-1}\left(-n\alpha\gamma + nl^{-1}\int_0^l \gamma dx + nN_2\right) \tag{4.3}$$

Умножим (4.3) на $\gamma(t, x)$ и проинтегрируем по $x$ в пределах от 0 до $l$. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (4.1), получим

$$J_1^2(t) + n(l(1-\alpha))^{-1}\left(\int_0^l \gamma dx\right)^2 = \int_0^l \gamma' R_1 \gamma' dx + n\alpha(1-\alpha)^{-1}J_0^2(t) -$$

$$- n(1-\alpha)^{-1}\int_0^l N_2\gamma dx \tag{4.4}$$

Обозначим через $U$ множество непрерывно дифференцируемых функций $v(x)$, удовлетворяющих условиям $v(0)=v(l)=0$. Положим

$$\lambda(\alpha) = \inf_v\left[\int_0^l (v')^2 dx + a\left(\int_0^l v dx\right)^2\right]\left(\int_0^l v^2 dx\right)^{-1}, \quad a = n[l(1-\alpha)(1-|r_1^{(1)}|)]^{-1}$$

Легко показать, что $\pi^2 l^{-2} \leqslant \lambda(\alpha) \leqslant 4\pi^2 l^{-2}$. Из определения величины $\lambda$ и (4.4) следует неравенство

$$|r_1^{(1)}|J_1^2(t) + [1 - n\alpha(\lambda(1-\alpha)(1-|r_1^{(1)}|))^{-1}]\Big[(1-|r_1^{(1)}|)J_1^2(t) + n(l(1-\alpha))^{-1}\times$$

$$\times\left(\int_0^l \gamma dx\right)^2\Big] \leqslant \left|\int_0^l \gamma' R_1 \gamma' dx\right| + n(1-\alpha)^{-1}\left|\int_0^l N_2\gamma dx\right|$$

Оценим слагаемые в правой части этого соотношения аналогично (2.8). Получим, что при

$$\alpha(1-\alpha)^{-1} < \lambda(\alpha)n^{-1}(1-|r_1^{(1)}|) \tag{4.5}$$

справедлива оценка

$$J_0(t) \leqslant C_2 K_2, \quad K_2^2 = \int_0^l N_2^2 dx \tag{4.6}$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от интенсивности поперечной нагрузки. Из соотношений (4.1), (4.2) и неравенства Коши-Буняковского вытекает оценка

$$|y(t, x)| \leqslant l^{1/2}(1-\alpha)^{-1}[2J_0(t)-K_2] \tag{4.7}$$

Из (4.6), (4.7) следует

Теорема 4. Пусть выполняется неравенство (4.5). Тогда стержень устойчив.

*5. Устойчивость армированного стержня.* Пусть стержень изготовлен из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала и армирован упругим материалом. Поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии. Арматура расположена симметрично относительно этих осей. Площадь поперечного сечения арматуры равна $S_a$, а момент инерции равен $J_a$. Напряжения и деформации в арматуре удовлетворяют закону Гука $\sigma_1=E_a\varepsilon_1$, $\sigma_2=2G_a\varepsilon_2$, где $E_a$, $G_a$—постоянный модуль упругой деформации и постоянный модуль сдвига армирующего материала.

Условия устойчивости армированного стержня совпадают с условиями устойчивости неармированного стержня, у которого модуль упруго-мгновенной деформации равен $E$, модуль сдвига равен $G$, площадь поперечного сечения равна $S_0=(GS+G_aS_a)/G$, момент инерции равен $J_0=(EJ+E_aJ_a)/E$, а ядра релаксации при сжатии и сдвиге имеют вид $\beta_1 r_1$ и $\beta_2 r_2$, где $\beta_1=J/J_0$, $\beta_2=S/S_0$.

*6. Некоторые замечания.*

1) Если деформацией сдвига можно пренебречь ($G=\infty$), то условия устойчивости (2.12), (2.17), (3.7), (4.5) принимают вид

$$P<\lambda EJ(1-|r_1^{(1)}|) \tag{6.1}$$

2) Пусть существует такое предельное ядро релаксации $r_1^0(t,\tau)$ что $|r_1^0|<1$ и при $t_1\to\infty$ равномерно по $t\geqslant t_1$

$$\lim \int_{t_1}^{t} \sup_x |r_1(t+\rho(x), \tau+\rho(x))-r_1^0(t,\tau)|d\tau=0$$

Тогда в условиях теорем 1, 2, 3, 4 можно заменить норму ядра $r_1^{(1)}$ на норму предельного ядра релаксации $r_1^0$. Условие устойчивости стержня при отсутствии деформации сдвига (6.1) в этом случае переходит в условие устойчивости, полученное в [4].

Автор выражает глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и ценные замечания.

## ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՔԻ ԿՈՇՏՈՒԹՅՈՒՆՈՎ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Դ. ԴՐՈԶԴՈՎ

### Ամփոփում

*Աշխատանքում ստացված են անհամասեռ-ծերացող առաձգամածուցիկ նյութից պատրաստված ամրանավորված ձողի կայունության պայմանները*

սահքային դեֆորմացիաների հաշվառման դեպքում: Կայունությունը հետազոտված է նյութի կամայական կորիզի ռելաքսացիայի և ձողի ծայրերի տարբեր տիպի ամրակցումների դեպքում: Կայունության որոշումը ժամանակի անվերջ միջակայքի կայունության որոշմանը:

## STABILITY OF VISCO-ELASTIC BEAMS WITH FINITE DISPLACEMENT RIGIDITY

A. D. DROZDOV

S u m m a r y

In the paper conditions of stability of beams from aging visco-elastic material have been obtained.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно-стареющих сред.—Докл. АН СССР, 1976. т. *229*, № 3, с. 569—571.
2. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973.
3. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
4. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.—Докл. АН Арм. ССР, 1984, т. 78, № 3, с. 117—121.
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

Московский автомеханический институт

Поступила в редакцию 17.I.1984