ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 539.3.313.014.11

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЛЯ КЛАССА НАГРУЗОК ПОДКРЕПЛЕНИЕ ОТВЕРСТИЯ В РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛОСКОСТИ

ВИГДЕРГАУЗ С. Б.

1. Пусть в неограниченной плоской пластинке малой толщины h вырезано отверстие с гладким контуром Г, усиленное упругим безмоментным стержнем переменной жесткости $G(s)$, где s—длина дуги Г. Пластинка, занимающая область S в системе декартовых координат XY, однородна и изотропна с упругими модулями E и ν. На бесконечности заданы растягивающие напряжения

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = q, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{1.1}$$

а подкрепление свободно от внешних усилий.

В [5] рассмотрена вариационная задача об отыскании формы Г и функции $G(s)$, доставляющих минимум величине U—суммарной потенциальной энергии упругой деформации пластинки и стержня при заданном его объеме и площади отверстия. Выведены необходимые условия стационарности функционала U в виде дополнительных соотношений для деформации стержня и напряжений на контуре пластинки.

В частности, если стержень отсутствует, то получается условие равнопрочности контура, ранее найденное в ряде работ как оптимальное для локального критерия—минимизации максимального по $(S+\Gamma)$ значения интенсивности касательных напряжений при нагрузке (1.1). Для $p=q$ наилучшим является круговое отверстие, усиленное стержнем постоянной толщины ($G(s)=G_0$).

Входящая слагаемым в U потенциальная энергия деформации пластинки определялась в [5] как интеграл от ее удельной плотности по части S, заключенной между Г и достаточно удаленным контуром, вне которого напряжения постоянны. Можно, однако, учитывать лишь энергию возмущения, вносимого отверстием в однородное поле (1.1), но вычисленную по всей области S [4]

$$2U = K\iint\limits_{S}[u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \gamma_1(u_x+v_y)^2]\,dxdy + \int\limits_{\Gamma}(-u_s^0 y_n + v_s^0 x_n)^2 G(s)\,ds \tag{1.2}$$

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad \gamma_1 = 1-\nu$$

Здесь u, v—возмущения компонент вектора перемещения точки пластинки, u^0, v^0—полные компоненты этого вектора для подкрепления. Нижними индексами обозначено дифференцирование по соответствующей переменной, x_n, y_n—направляющие косинусы внутренней нормали n к контуру. Первый интеграл в (1.2) существует, так как u, v в статическом случае убывает на бесконечности не хуже, чем r^{-1}, где $r^2=x^2+y^2$ [6].

На Γ справедливы соотношения

$$Eu_s^0=Eu_s-py_n-\nu qx_n, \quad Ev_s^0=Ev_s+qx_n+\nu py_n \tag{1.3}$$

Нетрудно показать, что варьирование расширенного по Лагранжу функционала (1.2) с учетом (1.3) дает те же условия оптимальности, что и в [5].

Постановку задачи можно обобщить, считая, что параметры нагрузки в (1.1) не фиксированы точно, а лишь не превышают определенной величины P, и усилия σ_x, σ_y с равной вероятностью и независимо друг от друга принимают любые значения из промежутка $[0, P]$. При этом также требуется найти форму Γ и функцию $G(s)$, доставляющие минимум наибольшему по всем допустимым нагрузкам значению U (1.2).

$$\min_{\Gamma, G(\cdot)} \max_{p,q} U(p, q); \quad 0\leqslant p, q\leqslant P \tag{1.4}$$

Здесь обозначена зависимость функционала от текущих значений параметров p, q.

В [1] отмечено, что для подобных задач возможны два варианта решения. В первом существует «наихудшая» нагрузка, рассчитанная на которую конструкция оптимальна и для всех остальных нагрузок. Во втором такой нагрузки нет, и конструкция, оптимальная в «целом», не оптимальна ни для какой нагрузки в отдельности.

К первому из них относится и рассматриваемый случай. Наихудшей является симметричная нагрузка $\sigma_x=\sigma_y=P$ и, следовательно, окружность, подкрепленная стержнем постоянной толщины оптимальна также и в смысле (1.4).

Для доказательства заметим, что при любых фиксированных Γ и $G(s)$ функция $U(p, q)$—положительно определенная квадратичная форма своих аргументов.

$$U(p, q)=a_1p^2+a_{12}pq+a_2q^2; \quad a_1, a_2>0 \tag{1.5}$$

Пусть величины p, q растут от произвольных начальных значений p_0, q_0 из $[0, p]$ пропорционально безразмерному параметру $t: p=tp_0$, $q=tq_0$, $t\geqslant1$, тогда, в силу однородности

$$U(tp_0, tq_0)=t^2U(p_0, q_0)\geqslant U(p_0, q_0)$$

откуда следует, что при данных Γ и $G(s)$

$$\max_{p,q} U(p, q)=\max\{\max_q U(P, q), \max_p U(p, P)\}$$

Согласно (1.5) $U(P, q)$, как функция от q, может достигать максимума на отрезке $[0, P]$ только в его концах. Аналогично для $U(p, P)$. Поэтому

$$\max_{p,q} U(p, q) = \max\{U(P, 0),\ U(0, P),\ U(P, P)\} \tag{1.6}$$

Обозначим теперь значение функционала (1.2) для круглого отверстия и стержня постоянной толщины через $W(p, q)$. Упоминавшийся результат работы [5] записывается в виде

$$\min_{\Gamma, G(\cdot)} U(P, P) = W(P, P) \tag{1.7}$$

Величины $W(P, P)$ (всестороннее растяжение пластинки) и $W(P, 0) = W(0, P)$ (одноосное растяжение) вычислены в [4]

$$W(P, P) = \frac{4c(1-(1-\nu)\lambda)^2}{(1+(1+\nu)\lambda)^2}$$

$$W(P, 0) = \frac{c(1-(1-\nu)\lambda)^2}{(1+(1+\nu)\lambda)^2} + \frac{12c\lambda^3}{(1+(3+\nu)\lambda)^2} + \frac{\varkappa c(1+(1+\nu)\lambda)^2}{(1+(3+\nu)\lambda)^2}$$

$$c = \frac{4\pi R_0^2 P^2(1+\nu)}{Eh};\quad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

R_0 – радиус отверстия, $\lambda = G_0(EhR_0)^{-1}$ – относительная жесткость кольца.

Непосредственно проверяется, что для $\nu>0$ и всех $\lambda>0$

$$W(P, P) \geqslant W(P, 0)$$

Следовательно, по (1.6)

$$\max_{p,q} W(p, q) = W(P, P) \tag{1.8}$$

Доказательство оптимальности круглого отверстия со стержнем постоянной толщины завершается цепочкой неравенств, следующих из (1.6)—(1.8)

$$\max_{p,q} U(p, q) \geqslant U(P, P) \geqslant W(P, P) = \max_{p,q} W(p, q),\quad 0 \leqslant p, q \leqslant P$$

2. Рассмотрим теперь под нагрузкой (1.1) пластинку, ослабленную совокупностью n неподкрепленных отверстий с границей $\Gamma = U\Gamma_i$, $i = \overline{1, n}$, свободной от внешних усилий.

В этом случае (1.2) содержит в правой части только первое слагаемое, для удобства преобразованное к виду [6]

$$U = \frac{h}{2E}\int_S\int (I_1^2 + 2(1+\nu)I_2)\,dxdy \tag{2.1}$$

здесь I_1, I_2—инварианты тензора напряжений возмущенного состояния.

Варьирование функционала (2.1) с подвижной границей, расширенного по Лагранжу за счет заданной площади каждого отверстия, приводит к условию стационарности на Γ

$$I_1+2(1+\nu)\,I_2=\mathrm{const} \tag{2.2}$$

С учетом того, что компоненты возмущенного состояния отличаются от исходного на слагаемые (1.1) и, что по условиям нагружения, на Г верно соотношение

$$\sigma_s=I_1=p+q$$

где σ_s—нормальное напряжение в направлении касательной к контуру, (2.2) приводится к условию равнопрочности

$$\sigma_s=p+q \tag{2.3}$$

Следует отметить, что условие (2.3) получается и при варьировании (2.1) с подынтегральным выражением более общего вида

$$I_1^2+aI_2 \tag{2.4}$$

лишь бы сохранялась положительная определенность (2.4) в каждой точке $(S+\Gamma)$. Так, $a=3$ отвечает интегральному критерию Мизеса [6]—энергии формоизменения возмущенного состояния. При этом уравнения Эйлера и естественные краевые условия с учетом зависимостей Бельтрами [6] сводятся к тождеству $I_1=0$ в $(S+\Gamma)$, согласованному [1] с (2.3).

Как оптимальные по этому критерию в его локальной форме, контуры (2.3) изучались ранее. В ряде случаев найдена их форма из решения краевой задачи теории функций [7, 8].

Пусть теперь параметры p, q из (1.1) принимают любые значения в промежутках $[0, P]$ и $[0, Q]$ соответственно. Докажем, что равнопрочные контуры (2.3) оптимальны и в смысле (1.4).

Результат (2.3) переписывается в виде

$$U(P, Q)\geqslant W(P, Q) \tag{2.5}$$

где $W(p,q)$—значение функционала (2.1) для равнопрочных контуров. Теперь для доказательства по схеме п. 1 необходимо установить, что

$$\max_{p,q} W(p, q)=W(P, Q) \qquad 0\leqslant p\leqslant P,\quad 0\leqslant q\leqslant Q \tag{2.6}$$

то есть, что

$$W(P, 0),\quad W(0, Q)\leqslant W(P, Q) \tag{2.7}$$

Величины, входящие в (2.7), можно вычислить по теореме Клапейрона [6] как половину работы внешних сил $A(p, q)$ на соответствующих перемещениях возмущенного состояния. Поскольку силы действуют на бесконечности, то

$$A(p, q)=h\lim_{R\to\infty} R\int_0^{2\pi}(pu\cos\theta+qv\sin\theta)d\theta \tag{2.8}$$

Здесь R—радиус достаточно большой окружности с центром в начале координат. Величины u, v в любой точке $(S+\Gamma)$ с аффиксом $t=x+iy$ находятся в виде [6]

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(t)-\overline{t\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)} \qquad 2\mu(1+\nu)=E \tag{2.9}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — потенциалы возмущенного состояния, убывающие на бесконечности. Подстановка (2.9) в (2.8) дает после несложных преобразований

$$4\mu A(p,q)=\pi h[\varkappa\alpha(p-q)-\beta(p+q)] \tag{2.10}$$

α, β — вычеты на бесконечности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно. В силу симметрии задачи по осям координат они действительны.

Величины $W(P,0)$, $W(0,Q)$ и $W(P,Q)$ подсчитываются явно. Для этого силовое граничное условие, при произвольных p,q имеющее вид [6]

$$\varphi(t)+\overline{t\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=-\frac{p+q}{2}t-\frac{q-p}{2}\bar{t}$$

интегрируется порознь по $d\bar{t}$ и dt вдоль L

$$\int\limits_L\varphi(t)\,d\bar{t}+\int\limits_L\overline{t\varphi'(t)}d\bar{t}+\int\limits_L\overline{\psi(t)}d\bar{t}=-\frac{p+q}{2}\int\limits_L t\,d\bar{t}-\frac{q-p}{2}\int\limits_L\bar{t}\,d\bar{t} \tag{2.11}$$

$$\int\limits_L\varphi(t)dt+\int\limits_L\overline{t\varphi'(t)}dt+\int\limits_L\overline{\psi(t)}dt=-\frac{p+q}{2}\int\limits_L t\,dt-\frac{q-p}{2}\int\limits_L\bar{t}dt \tag{2.12}$$

Неравные нулю слагаемые в правых частях (2.11)—(2.12) по известной формуле [9] пропорциональны площади D всех отверстий. Первый интеграл в левой части (2.11) и аналогичные находятся с помощью конформного отображения области S на стандартную область Z переменного ξ — внешность n разрезов, параллельных оси X.

$$t=\omega(\xi),\ d\bar{t}=\overline{\omega'(\xi)}d\bar{\xi},\ d\bar{\xi}=d\xi$$

На оптимальной границе верно соотношение [7]

$$-2\psi_0\omega'(\xi)=(P+Q)\,\overline{\omega'(\xi)}$$

$\psi_0(\xi)$ голоморфна в Z, при $\xi\to\infty$, $2\psi_0(\xi)=(Q-P)+0(1)$, следовательно

$$d\bar{t}=-2\psi_0(\xi)\frac{\omega'(\xi)}{P+Q}d\xi \tag{2.13}$$

Подстановка (2.13) в (2.11), (2.12) после несложных преобразований приводит к линейной алгебраической системе относительно α и β

$$\begin{gathered}2m\alpha+\beta=-\frac{p+q}{2\pi}D;\quad m=\frac{Q-P}{Q+P}\\ (1+m^2)\alpha+m\beta=-\frac{q-p}{2\pi}D\end{gathered} \tag{2.14}$$

Полагая в (2.14) поочередно $p=P$, $q=0$ и $p=0$, $q=Q$, получаем соответственно:

$$\alpha_1=\frac{PD(1+m)}{2\pi(1-m^2)};\quad \beta_1=-\frac{PD(1+m)^2}{2\pi(1-m^2)}$$

$$\alpha_2=\frac{QD(m-1)}{2\pi(1-m^2)};\ \beta_2=-\frac{QD(1-m)^2}{2\pi(1-m^2)} \tag{2.15}$$

Вычеты не зависят явно от связности n области. В частном случае $n=1$ выражения (2.15) можно найти из решения [6] прямой задачи для эллиптического отверстия. Из (2.10), (2.15) следует, что

$$W(P,\,0)=\frac{\pi hP}{8\mu}(\varkappa\alpha_1-\beta_1)=\frac{P^2Dh(1+m)(\varkappa+m+1)}{16\mu(1-m^2)}$$

$$W(0,\,Q)=-\frac{\pi hQ}{8\mu}(\varkappa\alpha_2+\beta_2)=\frac{Q^2Dh(1-m)(\varkappa-m+1)}{16\mu(1-m^2)}$$

$$W(P,\,Q)=-\frac{\pi(P+Q)h(\beta_1+\beta_2)}{8\mu}=\frac{(P+Q)^2Dh}{16\mu}$$

В последней формуле учтено, что $Q\alpha_1+P\alpha_2=0$.

Анализ полученных выражений показывает, что неравенство (2.7) при $\varkappa\leqslant 2$ $(3\nu\geqslant 1)$ справедливо для любых значений P и Q, а при $2<\varkappa\leqslant 3$ $(0\leqslant 3\nu<1)$—лишь для P, Q, удовлетворяющих дополнительному соотношению

$$\left|\frac{P-Q}{P+Q}\right|\leqslant\frac{\varkappa-\sqrt{\varkappa^2+4\varkappa-12}}{2}$$

С учетом этого ограничения оптимальность равнопрочных контуров в смысле (1.4) следует из (2.5), (2.6)

$$\max_{p,q} U(p,\,q)\geqslant U(P,\,Q)\geqslant W(P,\,Q)=\max_{p,q} W(p,\,q)$$

$$0\leqslant p\leqslant P,\quad 0\leqslant q\leqslant Q$$

ՁԳՎՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԱՆՑՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՈՒԺԵՂԱՑՈՒՄԸ ԲԵՌԵՐԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ

Ս. Բ. ՎԻԳԴԵՐԳԱՈՒԶ

Ամփոփում

Դիտարկված է փոփոխական կտրվածքով անմոմենտ ձողով (առաձգական թելով) ուժեղացված կամայական անցքով սալ։ Սալի անվերջում ձգող հաստատուն նշանով, ճիգերը ճշգրիտ հայտնի չեն և միայն հաստատունով սահմանափակ են վերևից։ Փնտրվում է անցքի ձևը և ձողի կոշտության փոփոխման օրենքը, որը օպտիմալացնում է սալի լարվածային վիճակը ամբողջությամբ վերցրած բեռների բոլոր դասերի համար։

Օպտիմալության կրիտերիա հանդիսանում է սալի դեֆորմացիայի լրացուցիչ պոտենցիալ էներգիայի մինիմումը։ Հաստատված է, որ օպտիմալ հան-

դիսանում է հաստատուն կոշտությամբ ձողով ուժեղացած կլոր անցքը։ Դիտարկված է նաև որոշ ուժեղացած անցքերով սալ։ Այդ դեպքերում օպտիմալ են հանդիսանում հավասարամուռ անցքերը։

OPTIMUM REINFORCEMENT AROUND A HOLE IN A STRETCHED PLANE FOR A CERTAIN RANGE OF LOADS

S. B. VIGDERGAUZ

S u m m a r y

An infinite plate with arbitrary hole stiffened with an absolutely flexibile rod (an elastic thread) of variable section is considered. The fixed-sign forces stretching the plate at infinity have only upper estimation with a given constant rather than being exactly determined. The form of hole and the law of variation of rod rigidity optimizating the strained state of the plate for the range of loads as a whole are explored. The minimum of additional (due to the hole and reinforcement) potential energy of plate deformation is chosen as a criterion of optimality. The round hole with the rod of constant rigidity has been found to be optimum. The plate with several free holes is also considered. In this case the so-called equal-strong holes have been demonstrated to provide the optimum.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
2. *Баничук Н. В.* Оптимальное проектирование в одномерных задачах изгиба для фиксированных и подвижных нагрузок.—Изв. АН СССР. МТТ, 1974, №5, с. 113—123.
3. *Баничук Н. В.* Об одной игровой задаче оптимизации упругих тел.—Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3, с. 497—499.
4. *Михайловский Е. И., Чаунин М. П.* Рациональное подкрепление кругового отверстия в растягиваемой плоской пластине.—Проблемы прочности, 1978, № 1, с. 37—39.
5. *Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.* К задаче о подкреплении контура отверстия в пластинке безмоментным упругим стержнем.—ПММ, 1980, т. *44*, вып. 5, с. 905—915.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
7. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости.—ПММ, 1974, т. *38*, вып. 6, с. 963—979.
8. *Вигдергауз С. Б.* Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости.—ПММ, 1976, т. *40*, вып. 3, с. 566—569.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1972. 556 с.

НИИЛПЭО «Электросила»
им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию
9.I.1984