

УДК 534.221

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ
 ЧЕТВЕРТЬ-ПЛОСКОСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

САФАРЯН Ю. С.

Рассматриваются задачи о соударении полубесконечных плоских тел, движущихся в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями и граничащих с упругой полуплоскостью с иными упругими постоянными, которые решаются методом интегральных преобразований, а при смешанных условиях — применением метода Винера-Хопфа и последующим приведением решения к форме Смирнова-Соболева [1].

Решение задачи о соударении прямых упругих углов в предположении, что граница тел после соударения остается свободной от напряжений, методом [1] дано в [2].

Для тел, имеющих конечную высоту, задача решена в [2]. Задача о соударении упругих прямых углов при смешанных граничных условиях на границе тел решена в [2], [4].

§ 1. Соударение упругих плоских тел, ограниченных упругой полуплоскостью, при наличии скольжения

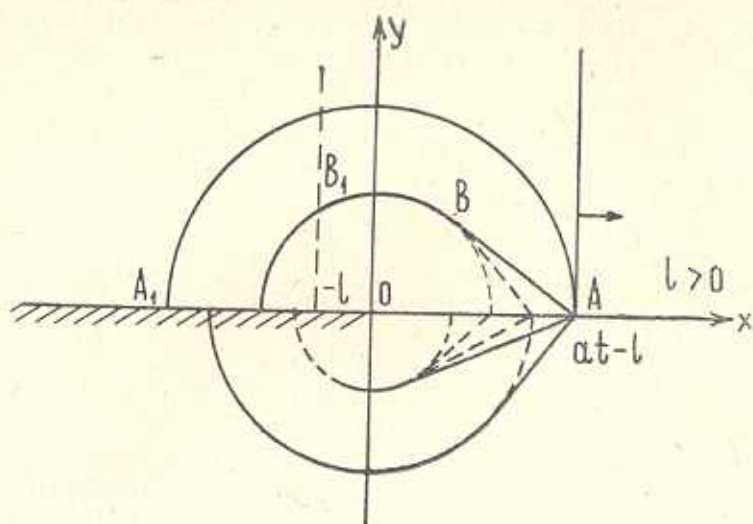
Рассмотрим формулировку граничной задачи соударения полубесконечных упругих тел, ограниченных поверхностями прямых двугранных углов, граничащих с упругим полупространством (фиг. 1). Для тел, неограниченных в обе стороны, задача одномерна по x , где ось x направлена вдоль поверхности тел параллельно скоростям их движения, и для проекций перемещений u , v на оси x, y имеет место [4]

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -v_0 \varepsilon(x-at) + v_0 \varepsilon(-x-at), \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{v_0}{a} \varepsilon(at-|x|), \quad v_0 = 0 \quad (1.1)$$

Вводя двумерные возмущения одномерных решений $U = u - u_0$, $V = v$, можно записать уравнения движения для упругих сред при $y > 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$

Уравнения движения упругих тел в полупространстве $y < 0$ имеют вид



Фиг. 1

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + b_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + (a_1^2 - b_1^2) \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = b_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + a_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + (a_1^2 - b_1^2) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

где a, b — скорости продольных и поперечных волн в соударяющихся телах, $\sigma(x)$ — единичная функция, a_1, b_1 — скорости продольных и поперечных волн в нижнем полупространстве.

При $y=0, -\infty < x < \infty$ удовлетворяются следующие граничные условия:

$$\sigma_{yy} - \rho \frac{k v_0 \sigma \left(t - \frac{|x|}{a} \right)}{a} = \sigma_{1yy}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{1xy} = 0, \quad V = V_1$$

где

$$\sigma_{yy} = \left(k \frac{\partial U}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \rho, \quad \sigma_{1yy} = \left(k_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \rho_1$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma_{1xy} = \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad k = a^2 - 2b^2$$

Решение для случая $a=b=0$ получено в [2]. Переходя к преобразованиям Лапласа $\bar{U}, \bar{V}, \bar{U}_1, \bar{V}_1$ от U, V, U_1, V_1 по t , граничные условия можно записать в виде

$$k \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} - k \frac{v_0}{a \rho} \exp(-|x| \rho / a) = \frac{\rho_1}{\rho} \left(k_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x} = 0, \quad \bar{V} = \bar{V}_1 \quad (1.4)$$

где $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа, ρ, ρ_1 — плотности соответствующих сред.

Ищем решение уравнений (1.2), (1.3), записанных для $\bar{U}_1, \bar{V}_1, \bar{U}, \bar{V}$, в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}_1; \bar{V}_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_1^{(n)}; \bar{V}_1^{(n)} \exp i(\bar{\alpha}x + \bar{\beta}_n y) d\bar{\alpha} \\ \bar{U}; \bar{V} &= \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}^{(n)}; \bar{V}^{(n)} \exp i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}_n y) d\bar{\alpha} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\bar{V}^{(n)} = \frac{a^2 \bar{\gamma}_1^2 - b^2 \bar{\gamma}_n^2}{(a^2 - b^2) \bar{\alpha} \bar{\gamma}_n} \bar{U}^{(n)}, \quad \bar{V}_1^{(n)} = \frac{a^2 \bar{\beta}_1^2 - b^2 \bar{\beta}_n^2}{(a^2 - b^2) \bar{\alpha} \bar{\beta}_n} \bar{U}_1^{(n)} \quad (1.6)$$

$$\bar{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad \bar{\beta}_n = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad n=1, 2, \quad c_1 = a, \quad c_{11} = a_1, \\ c_2 = b, \quad c_{12} = b_1$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и проводя обратное преобразование Фурье по x , получим

$$\begin{aligned} \frac{b^2 \bar{\gamma}}{\bar{\alpha}} \bar{U}^{(1)} - 2b^2 \bar{\alpha} \bar{U}^{(2)} - \frac{kv_0}{\pi a^2 \left(\bar{\alpha}^2 - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \bar{\alpha} i} = \frac{\rho_1}{\rho} \left(\frac{b^2 \bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}} \bar{U}_1^{(1)} - 2b^2 \bar{\alpha} \bar{U}_1^{(2)} \right) \\ 2\bar{\gamma}_1 \bar{U}^{(1)} + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_2} \bar{U}^{(2)} = 0, \quad 2\bar{\beta}_1 \bar{U}_1^{(1)} + \frac{\bar{\gamma}_1}{\rho_2} \bar{U}_1^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}} \bar{U}^{(1)} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}_2} \bar{U}^{(2)} = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}} \bar{U}_1^{(1)} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_2} \bar{U}_1^{(2)} = 0$$

где

$$\bar{\chi} = \frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 = \bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2, \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\beta}_2^2 - \bar{\alpha}^2$$

Решение системы (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(1)} = -\frac{ikv_0 \bar{\alpha} \bar{\chi}}{\pi a^2 \bar{\gamma}_1^2 R^1(\bar{\alpha})}, \quad \bar{U}^{(2)} = \frac{2ikv_0 \bar{\alpha} \bar{\gamma}_2}{\pi a^2 \bar{\gamma}_1 R^1(\bar{\alpha})} \\ \bar{U}_1^{(1)} = -\frac{ib_1^2 kv_0 \bar{\alpha} \bar{\gamma}_1}{\pi b^2 a^2 \bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_1 R^1(\bar{\alpha})}, \quad \bar{U}_1^{(2)} = \frac{2ib_1^2 kv_0 \bar{\alpha} \bar{\beta}_2}{\pi a^2 b^2 \bar{\gamma}_1 R^1(\bar{\alpha})} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $R^1(\bar{\alpha}) = b^2(\bar{\chi}^2 + 4\bar{\alpha}^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) - \frac{\rho_1}{\rho} \frac{b_1}{b^2} \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1} (\bar{\chi}_1^2 + 4\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2)$

Предполагается, что корни $R^1(\bar{\alpha})$ являются действительными. Подставляя (1.8) в (1.5), получим решение поставленной задачи, периодическое во времени.

Обратное преобразование по s , соответствующее решению нестационарной задачи, имеет вид

$$U; V; U_t; V_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{U}; \bar{V}; \bar{U}_t; \bar{V}_t \exp(st) ds \quad (1.9)$$

При применении обратного преобразования Лапласа по s введем вместо $\bar{\alpha}$ переменную α ($\bar{\alpha} = \alpha\omega$), $s = \sigma - i\tau$, $\beta = \omega\beta$, где $\sigma > 0$ и мало [3], [8], [9], [10].

При вычислении оригиналов используется контурное интегрирование и решение записывается в виде аналитической функции от переменной $\alpha = \alpha_n$, для которой выражения в экспонентах обращаются в нуль

$$f_{n_1}(\alpha_{n_1}) = f_n(\alpha_n) = 0, \quad n = 1, 2 \quad (1.10)$$

$$f_n(\alpha) = t - \alpha x - \beta_n(\alpha)y, \quad f_{n_1}(\alpha) = t - \alpha x - \gamma_n(\alpha)y$$

причем комплексно-сопряженные значения $\bar{\alpha}_n$ также удовлетворяют (1.10).

Можно записать на основании (1.5), (1.9)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}^{(n)}(\bar{\alpha}) \exp(sf_n(\alpha)) d\bar{\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}^{(n)}(\bar{\alpha}) \exp(sf_n(\alpha)) d\bar{\alpha}$$

где $f_n(\alpha)$ даются (1.10).

Из решения (1.8) видно, что

$$\bar{U}^{(n)}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{\omega^3} \bar{U}^{(n)}(\alpha), \quad \bar{V}^{(n)}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{\omega^3} \bar{V}^{(n)}(\alpha)$$

где в $\bar{U}^{(n)}(\alpha)$, $\bar{V}^{(n)}(\alpha)$ положено $\omega = 1$.

При этом можно записать следующие решения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}^{(n)}(\alpha) \operatorname{sgn} \omega \exp(sf_n(\alpha)) d\alpha$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}^{(n)}(\alpha) \operatorname{sgn} \omega \exp(sf_n(\alpha)) d\alpha$$

в которых сделан переход к α и формулы для $\bar{U}^{(n)}(\alpha)$, $\bar{V}^{(n)}(\alpha)$ получаются путем сокращения на ω , причем в множителе при экспоненте в подынтегральной функции всюду положено $\omega = 1$, что дает новые формулы для $\bar{U}^{(n)}$, $\bar{V}^{(n)}$.

В силу малости σ можно условно контуры по α проводить по

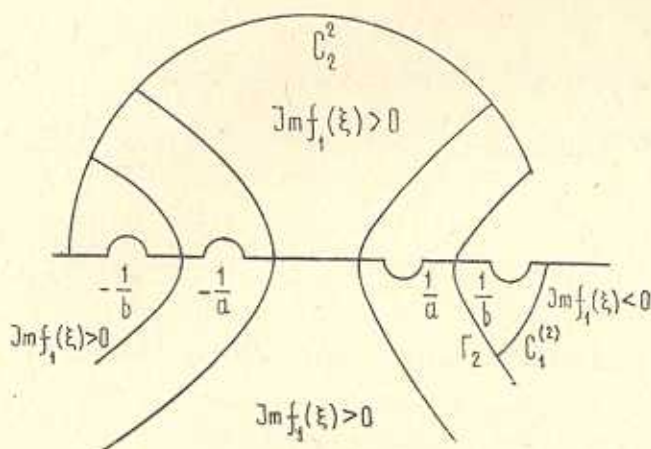
вещественной оси x с обходом особых точек в верхней и соответственно нижней полуплоскостях [4].

Пусть $\omega > 0$. Заменяем контур интегрирования $-\infty < x < \infty$ на контур Γ , проходящий через указанные точки a_n, \bar{a}_n в направлениях $\text{Im} f_n(x) = 0$. Для этого нужно найти области постоянных знаков $\text{Im} f_n(x)$. Обозначив $f_n(x) = B$, где величина B вещественная, $x = \xi + i\eta$, можно убедиться, что в плоскости (ξ, η) линии $f_n(x) = B$ состоят из ветвей гипербол

$$c_n^2 \frac{r^2}{x^2} \xi^2 - c_n^2 \frac{r^2}{y^2} \eta^2 = 1, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

а также из отрезков вещественной оси $|\xi| < \frac{1}{c_n}$, $c_1 = a$, $c_2 = b$. Пусть $x > 0$, $y > 0$.

Тогда, полагая, что на положительной мнимой полуоси $\sqrt{\frac{1}{c_n^2} - a^2} > 0$, можно показать, что $\text{Im} f_n(x) < 0$ в областях фиг. 2,



Фиг. 2

где проходят дуги окружности c_1^n и c_2^n . Тогда при $\omega > 0$ можно заменить интегралы по вещественной оси x на интегралы по Γ_n^\pm . При $\omega < 0$ вместо c_1^n , c_2^n берутся их дополнения до верхней и нижней полуокружностей, на которых $\text{Im} f_n(x) > 0$. Тогда интегралы по вещественной оси x заменяются на интегралы по Γ_n в обратных предыдущим направлениях. Все внутренние интегралы поменяют знаки на обратные, а решение будет таким же, как при $\omega > 0$. Для $x < 0$ точки a_n, \bar{a}_n находятся на левых ветвях гипербол (фиг. 2). Контур c_1^n, c_2^n заменяются симметричными относительно оси ξ и решение не изменяется. Итак, при любых ω, x, y получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \int_{-\infty}^{t-r/c_n} \bar{U}^{(n)}(x) \exp(sf_n(x)) \frac{dB}{f'_n(x)} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \int_{-\infty}^{t-r/c_n} \bar{U}^{(n)}(\bar{x}) \exp(sf_n(\bar{x})) \frac{dB}{f'_n(\bar{x})}$$

где учтено, что на контуре Γ^+ величина B меняется от $-\infty$ до $t-r/c_n$. Поскольку $U^{(n)}(x)$ содержит множитель i слагаемые сопряжены и можно написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2\text{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \int_{-\infty}^{t-r/c_n} \bar{U}^{(n)}(x) \exp(sf_n(x)) \frac{dB}{f'_n(x)}$$

Используя формулу обращения интеграла Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2\text{Re} \int_{-\infty}^{t-r/c_n} \bar{U}^{(n)}(x) \delta(f_n(x)) \frac{dB}{f'_n(x)}$$

Вычисляя полученный интеграл, можно найти

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2\text{Re} \sum_1^2 \frac{\bar{U}^{(n)}(z_n)}{f'_n(z_n)}, \quad \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial t^2} = -2\text{Re} \sum_1^2 \frac{\bar{U}_1^{(n)}(z_{1n})}{f'_{1n}(z_{1n})}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -2\text{Re} \sum_1^2 \frac{\bar{V}^{(n)}(z_n)}{f'_n(z_n)}, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = -2\text{Re} \sum_1^2 \frac{\bar{V}_1^{(n)}(z_{1n})}{f'_{1n}(z_{1n})}$$
(1.11)

где z_n, z_{1n} находятся из уравнения (1.10) и имеют вид

$$r^2 z_n = tx + yi\sqrt{t^2 - r^2/c_n^2}$$

$$r^2 z_{1n} = tx - yi\sqrt{t^2 - r^2/c_{1n}^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Здесь $\bar{U}^{(n)}, \bar{V}^{(n)}, \bar{U}_1^{(n)}, \bar{V}_1^{(n)}$ дается (1.8) при $\omega = 1$.

Из (1.11) можно получить значения для двумерных возмущений напряжений и перемещений при $y=0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma_{yy}}{\rho} = \text{Re} i \frac{kv_0 b^2}{\pi a^2 x} \frac{(x^2 + 4x^2 \gamma_1 \gamma_2)}{\gamma_1^2(x) R^1(x)}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2\text{Re} \sum_{n=1}^2 \frac{\bar{U}^{(n)}(x)}{x}, \quad \alpha = \frac{t}{x}$$
(1.12)

а при $x=0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma_{yy}}{\rho} = \text{Re} \left[\frac{b^2 kv_0 \lambda^2 (i\alpha_1)}{\pi a^2 \gamma_{11}(i\alpha_1) R'(i\alpha_1) \alpha_{1y}} - \frac{4b^2 kv_0 \alpha_2 \gamma_2^2 (i\alpha_2)}{\pi a^2 \gamma_{11}(i\alpha_2) R'(i\alpha_2) y} \right]$$

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\bar{t}^2}{y^2} - \frac{1}{c_n^2}}, \quad n=1, 2$$

и подобные формулы для нижней полуплоскости.

Чтобы выяснить характер напряжения важно знать значения σ_{xx} при $x=0$

$$\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\rho} = a^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + k \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}$$

которые после использования значений \bar{U}, \bar{V} примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\rho} = & \frac{k v_0}{\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega^2 - 2b^2 \bar{\gamma}_1^2)}{R^2(\alpha) \bar{\gamma}_1^2} \exp i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}_1 y) d\bar{\alpha} - \\ & - \frac{4k v_0 b^2}{\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}^2 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 R^2(\alpha)} \exp i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}_2 y) d\bar{\alpha} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Обозначая соответственно $\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\alpha}^2} = \bar{\gamma}_1$, $\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{\alpha}^2} = \bar{\gamma}_2$ в первых и вторых интегралах, а затем перейдя к переменной $\xi = \frac{1}{a\bar{\gamma}_1} = \frac{t}{y}$, можно получить после выделения вещественной части выражение

$$\begin{aligned} -A \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial \xi} = & \frac{b^2}{a^2} \frac{(1 - 2b^2/a^2 \xi^2)(a^2/b^2 - 2 + 2/\xi^2)}{R_1^2 \xi \sqrt{1/\xi^2 - 1}} \sigma(1 - \xi) + \\ & + \frac{b^4}{a^4} \frac{\sqrt{1/\xi^2 - a^2/b^2}}{R_2^2 \xi^4 \sqrt{1 - a^2/b^2 + 1/\xi^2}} \sigma\left(\frac{b}{a} - \xi\right), \quad A = \frac{\pi a}{\rho k v_0} \end{aligned} \quad (1.14)$$

которое имеет удобный вид для численных расчетов.

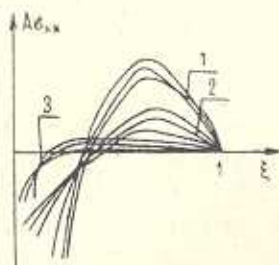
Сначала рассматриваем тот случай, когда верхние соударяющиеся тела более жесткие, чем нижняя полуплоскость. Расчеты проделаны для двух вариантов и кривые 1; 2 показаны на графиках фиг. 3 соответственно для

- 1) $\frac{a}{a_1} = 2, \frac{a}{b_1} = 4, \frac{a}{b} = 2, \frac{\rho_1}{\rho} = 0,1; 0,3; 0,5$
- 2) $\frac{a}{a_1} = 2, \frac{a}{b_1} = 4, \frac{a}{b} = 2, \frac{\rho_1}{\rho} = 0,01; 0,03; 0,05$

Для случая, когда нижняя полуплоскость более жесткая, выбраны следующие значения:

- 3) $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2}; \frac{a}{b_1} = 1, \frac{a}{b} = 2; \frac{\rho_1}{\rho} = 10; 30; 50$

и графики приведены на фиг. 3.



Фиг. 3

Как видно из графиков, двумерное слагаемое в σ_{xx} вблизи фронта продольной волны положительное. Затем двумерное возмущение напряжения становится сжимающим, что имеет место до $\xi=0$. Тем не менее суммарное напряжение $\sigma_{xx}-\rho a v_0$ остается всегда сжимающим. Вблизи границы контакта сред двумерные возмущения больше одномерных. Из численных расчетов видно, что напряжение вблизи фронта продольной волны в случае, когда соударяющиеся тела более жесткие, значительно больше напряжения, когда за более жесткую принимается нижняя полуплоскость.

§ 2. Решение смешанной задачи соударения упругих плоских тел, ограниченных упругой полуплоскостью, при наличии скольжения.

Можно рассматривать подобную задачу при наличии жесткой опоры $y=0, x < 0$.

Сначала рассмотрим тот случай, когда соударение происходит на опоре. Обозначим $x=-l$ ($l \geq 0$) координату точки соударения (фиг. 1), которая находится на жесткой опоре, причем граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} k \frac{\partial U}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial U_0}{\partial x} &= \frac{\rho_1}{\rho} \left(k_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right), \quad x > 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < \infty \\ V = V_1 &\text{ при } x > 0; \quad V = V_1 = 0 \text{ при } x < 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Снова переходя к преобразованиям Лапласа, выбирая решение в виде (1.5) и используя функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях $\bar{\alpha}$

$$\Omega^+ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-i\bar{\alpha}x) \left[\bar{\sigma}_{1yy} - k \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} \rho - \bar{\sigma}_{yy} \right]_{y=0} dx \quad (2.2)$$

$$V^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\bar{V}_1)_{y=0} \exp(-i\bar{\alpha}x) dx$$

где

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = -\frac{v_0}{a\rho} \exp\left(-\frac{x'\rho}{a}\right), \quad x' = x + l$$

подставляя (1.5) в (2.1) и проводя обратное преобразование Фурье по x , найдем систему уравнений

$$\frac{ib^2 \bar{\chi} \bar{U}^{(1)}}{\alpha} - 2ib^2 \bar{\alpha} \bar{U}^{(2)} + k \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \frac{\rho_1}{\rho} \left(\frac{ib^2 \bar{\chi}_1 \bar{U}_1^{(1)}}{\alpha} - 2ib^2 \bar{\alpha} \bar{U}_1^{(2)} \right) + \frac{\Omega^+}{\rho} \quad (2.3)$$

$$2i\bar{\gamma}_1 \bar{U}^{(1)} + \frac{i\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_2} \bar{U}^{(2)} = 0, \quad 2i\bar{\beta}_1 \bar{U}_1^{(1)} + \frac{i\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_2} \bar{U}_1^{(2)} = 0$$

$$V^- = \frac{\bar{\gamma}_1}{\alpha} \bar{U}^{(1)} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}_2} \bar{U}^{(2)} = \frac{\bar{\beta}_1}{\alpha} \bar{U}_1^{(1)} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_2} \bar{U}_1^{(2)}$$

Исключая из (2.3) $\bar{U}_1^{(1)}$, $\bar{U}_1^{(2)}$, $\bar{U}^{(1)}$, $\bar{U}^{(2)}$, можно получить уравнения Винера-Хопфа

$$2\bar{\gamma}_2 F(\bar{\alpha}) D V^- + k \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \frac{\Omega^+}{\rho}$$

где

$$F(\bar{\alpha}) = \frac{b^4(\bar{\gamma}_2^2 + 4\bar{\alpha}^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) - \rho_1/\rho \cdot b^4/\beta_1 \bar{\gamma}_1(\bar{\gamma}_2^2 + 4\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2)}{2\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \omega^2 D} \quad (2.4)$$

$$D = \left[\frac{(a^2 - b^2)b^2}{a^2} - \frac{\rho_1}{\rho} \frac{b^2}{a_1^2} (a_1^2 - b_1^2) \right]$$

и при $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ $F(\bar{\alpha}) = 1 + \frac{\text{const}}{\bar{\alpha}^2} + \dots$

Проводится факторизация [6]

$$\ln F(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\ln F(\xi)}{\xi - \bar{\alpha}} d\xi = \ln F^+(\bar{\alpha}) + \ln F^-(\bar{\alpha})$$

$F(\bar{\alpha}) = F^+(\bar{\alpha}) F^-(\bar{\alpha})$, где

$$\ln F^+(\bar{\alpha}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{\ln F(\xi)}{\xi - \bar{\alpha}} d\xi, \quad \ln F^-(\bar{\alpha}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{\ln F(\xi)}{\xi - \bar{\alpha}} d\xi$$

где контуры c_1 , c_2 выбраны, как в [6].

Подставляя значения $F(\bar{\alpha})$ в (2.4), получим

$$2\omega^2 D \frac{i\bar{\gamma}_2}{\omega^2} F^-(\bar{\alpha}) V^- + \frac{k}{\bar{\gamma}_2^+ F^+(\bar{\alpha})} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \frac{\Omega^+}{\rho F^+(\bar{\alpha}) \bar{\gamma}_2^+}$$

$$\text{где } \bar{\gamma}_2^+(\bar{\alpha}) = \sqrt{\frac{\omega}{b} + \bar{\alpha}}, \quad \bar{\gamma}_2^-(\bar{\alpha}) = \sqrt{\frac{\omega}{b} - \bar{\alpha}} \quad (2.5)$$

$$F^+(\bar{\alpha}) = \frac{\omega/c_R + \bar{\alpha}}{\sqrt{\omega/a + \bar{\alpha}} \sqrt{\omega/b + \bar{\alpha}}} \exp \int_{-\omega/b_1}^{-\omega/b} \ln \frac{R(\xi)}{R(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - \bar{\alpha}} = F^-(\bar{\alpha})$$

Здесь $R(\bar{\alpha}) = F(\bar{\alpha}) D$.

При условии $1/a < 1/b < 1/a_1 < 1/b_1$ можно получить решение уравнения (2.5) в виде

$$V^- = \bar{V}_1 = id_2(\bar{\alpha}) \exp(i\omega l/a)$$

$$\bar{U}_1 = i \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_1} d_2(\bar{\alpha}) \exp(i\omega l/a)$$

$$d_2(\bar{x}) = \frac{v_0 k}{4\pi a \gamma_2^- F^-(\bar{x}) D \omega \left(\frac{\omega}{a} - \bar{x}\right) \gamma_2^+ \left(\frac{\omega}{a}\right) F^+ \left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

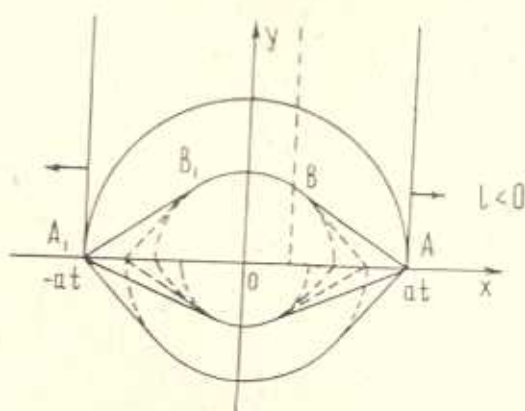
Откуда можно получить значение коэффициента интенсивности напряжения

$$\frac{\sigma_{yy}}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{-x}} \frac{v_0 k \sqrt{t-l/a} \sigma(t-l/a)}{\pi D_1 a \gamma_2^+ \left(\frac{1}{a}\right) F^+ \left(\frac{1}{a}\right)}, \quad y=0$$

и для нижней полуплоскости

$$\frac{\sigma_{1yy}}{\rho_1} = \frac{2v_0 k_1 \sqrt{t-l/a_1} \sigma(t-l/a_1)}{\sqrt{-x} \pi D_{11} \gamma_2^+ \left(\frac{1}{a}\right) F^+ \left(\frac{1}{a}\right)}, \quad D_1 = 2Da^2 b^2 / a^2 - b^2$$

$$D_{11} = 2D_{11} a_1^2 b_1^2 / a_1^2 - b_1^2$$



Фиг. 4

Для случая, когда соударение происходит вне опоры ($l < 0$) (фиг. 4), следует в формуле (2.5) заменить значение $\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}$ при $l > 0$ значением

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = -\frac{v_0 \exp(i\bar{x}l)}{as(s^2/a^2 + \bar{x}^2)} + \frac{v_0 \exp(ls/a)}{as(s/a - i\bar{x})}, \quad l < 0$$

Решение имеет вид

$$\Omega^+ = \gamma F^+(\bar{x}) \gamma_2^+ G^+(\bar{x}) + \frac{\rho k v_0 \exp(ls/a)}{i \omega a (\omega/a + \bar{x})}$$

$$V^- = -G^-(\bar{x}) / 2D i \gamma_2^- F^-(\bar{x})$$

где

$$G^+(\bar{x}) = \frac{\omega D k v_0}{\pi a i} \int_{-b_1}^{-a_1} \frac{F^-(\xi) \gamma_2^-(\xi) \gamma_2^+(i\xi) \exp(i\xi l) 2k e R(\xi) d\xi}{|R(\xi)|^2 (\xi - \omega/a) (\xi - \bar{x}) \sqrt{-\xi - \omega/a}} +$$

$$+ \frac{\omega D k v_0}{\pi a i} \int_{-\infty}^{-b^{-1}} \frac{2F^-(\xi) \gamma_1^-(\xi) \gamma_2^-(\xi) \exp(i\xi l) d\xi}{(\xi - \omega/a) |R(\xi)| (\xi - \bar{a}) \sqrt{-\xi - \omega/a}}$$

При этом решение уравнения (2.3) примет вид $\bar{V}_1 = \bar{V} = V^-$, $\bar{U}_1 = \frac{\bar{a}}{\beta_1} V^-$

Остальные величины можно найти, как и выше.

§3. Соударение упругих плоских тел, ограниченных упругой полуплоскостью, при наличии сцепления

Рассматриваемую задачу можно решать при наличии сцепления вдоль границы, условие для которой имеет вид

$$k \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + k \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = \left(k_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial y} \right) \rho$$

$$\rho b^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) = \rho_1 b_1^2 \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x} \right)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_1, \quad \bar{V} = \bar{V}_1$$

Повторяя метод решения задачи 1, можно найти решения задачи в виде

$$\bar{U}(0) = \frac{i k v_0 \bar{a}}{\pi a^2 \gamma_1^2 R(\bar{a})} \left\{ \frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2} \left[\bar{a}^2 (\bar{\gamma}_1 - 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) + \frac{\omega^2}{b_1^2} \bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_2 \right] - \bar{\chi} (\bar{a}^2 + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) \right\}$$

$$\bar{U}(\infty) = \frac{i k v_0 \bar{a} \bar{\gamma}_2}{\pi a^2 \gamma_1^2 R(\bar{a})} \left[2\bar{\gamma}_1 (\bar{a}^2 + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) - \frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2} \left(2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_1 \frac{\omega^2}{b_1^2} \right) \right]$$

$$\bar{U}_1^{(1)} = \frac{i k_1 v_0 \bar{a}}{\pi a_1^2 \gamma_1^2 R(\bar{a})} \left[\frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2} \bar{\gamma}_1 (\bar{a}^2 + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) + 2\bar{\chi}^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 - \bar{a}^2 \bar{\chi} - \frac{\omega^2}{b^2} \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1 \right]$$

$$U_1^{(2)} = \frac{i k_1 v_0 \bar{a}}{\pi a_1^2 \gamma_1^2 R(\bar{a})} \left[\frac{\omega^2 \bar{\gamma}_1}{b^2} + 2\bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 - \bar{\chi} \bar{\beta}_1 - 2\bar{\beta}_1 \frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2} (\bar{a}^2 + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) \right]$$

$$R(\bar{a}) = b^2 (\bar{a}^2 + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) (\bar{\chi}^2 + 4\bar{\chi}^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) + \frac{b_1^4}{b^2} \frac{\rho_1}{\rho^2} (\bar{a}^2 + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) \times$$

$$\times (\bar{\chi}_1^2 + 4\bar{\chi}_1^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) - \frac{\rho_1 b_1^2}{\rho b^2} \left[2b^2 \bar{a}^2 (\bar{\chi}_1 - 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) (\bar{\chi} - 2\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2) + \frac{\omega^4}{b_1^2} (\bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1) \right]$$

Предположено, что функция $R(\bar{a})$ имеет вещественный корень [7]. Решение задачи дается в виде (1.9), (1.11). Для краткости рассматриваем только напряжение σ_{xx} при $x=0$, которое после вышеуказанных вычислений можно получить из уравнения

$$-A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} = \frac{(1 - 2b^2/a^2\xi^2)}{R_1} \frac{b^4}{a^4} \left\{ \frac{b_1^2 \beta_1}{b^2 \rho} \left[\left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \left(\frac{a^2}{b_1^2} - 2 + \frac{2}{\xi^2} \right) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}+\frac{a^2}{b_1^2}\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{1}{\xi^2}} \\
& -\left(\frac{a^2}{b^2}-2+\frac{2}{\xi^2}\right)\left|1-\frac{1}{\xi^2}+\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-1+\frac{1}{\xi^2}}\right|\left|\frac{\sigma(1-\xi)}{\xi\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}}+\right. \\
& \left.+\frac{2}{\xi^4}\frac{b^6}{a^5}R_2\sqrt{\frac{1-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}{1-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}}\right|2\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{\xi^2}+\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}\right) \\
& -\frac{b_1^2\rho_1}{b^2\rho}\left|\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}-\left(\frac{a^2}{b_1^2}-\frac{2a^2}{b^2}+\frac{2}{\xi^2}\right)\right|+ \\
& \left.+\frac{a^2}{b_1^2}\sqrt{\frac{\frac{a^2}{a_1^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}{1-\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{\xi^2}}}\right|\sigma\left(\frac{b}{a}-\xi\right) \\
& R_1=R(x_1, \xi), \quad R_2=R(x_2, \xi) \\
& \sigma_1=\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\gamma^2}, \quad \sigma_2=\sqrt{\frac{1}{b^2}-\gamma^2}, \quad \xi=\frac{1}{a\gamma}
\end{aligned}$$

Фиг. 5

Результаты расчетов приведены на графиках фиг. 5 соответственно для случаев более жесткой верхней и более жесткой нижней полуплоскостей.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные советы.

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՄԲ ՍԱՀՄԱՆԱՓՈՒԿՎԱԾ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՔԱՌՈՐԴ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱԽՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ

ՅՈՒ. Ս. ՍԱՆԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է կիսաանվերջ հարթ մարմինների բախումը, որոնք շարժվում են իրար հանդեպ հավասար արագությանը ու սահմանակցված են այլ առաձգական հաստատություններով առաձգական կիսահարթությանը: Տեղափոխման և լարման բաղադրիչները որոշվում են ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, իսկ խառը ջրային պայմանների դեպքում՝ վիճեր-Հոֆի մեթոդի կիրառմամբ, լուծումը բերվում է Սմիթնով-Սոբոլևի տեսքի: Կանտակտի վրա բերված է նորմալ լարման գրաֆիկը:

SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF IMPACT ELASTIC QUARTER-PLANES, LIMITED SEMIPLANES

J. S. SAFARIAN

Summary

The problem of impact of semiinfinite plane bodies moving in opposite directions with same velocities bounded by elastic halfplane with other elastic constants are considered. The component of displacements and stress are found by the method of integral transforms and for mixed conditions by the method of Vinner-Hopf and the solution is brought to the form of Smirnov-Sobolev. The graphs of normal stresses on contact are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М.: ОНТИ, 1937, 998 с.
2. Малков М. А. Двумерная задача об упругом соударении стержней.—Докл. АН СССР, 1965, т. 148, № 4, с. 782—785.
3. Багдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 13—23.
4. Мартиросян А. Н., Сафарян Ю. С. Линейные и нелинейные задачи соударения упругих тел конечной высоты. Проблемы взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1984, с. 203—208.
5. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—МТТ, 1976, № 1, с. 100—110.
6. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 279 с.
7. Гоголадзе В. Г. Дисперсия волн Релея в слое.—Тр. сейсмолог. ин-та АН СССР, 1947, 119, с. 27—38.
8. Cagniard L. Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives (These). Paris: 1939.
9. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. North-Holland: Publ. Co, 1973. 427 p.
10. Петрашень Г. И. и др. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. Л.: Наука, 1982. 288 с.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
10.1.1985