ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 5, 1986 Механика

УДК 536.1

УРАВНЕНИЕ КОРОТКИХ ВОЛН ДЛЯ СМЕСИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БАГДОЕВ А. Г., ГУРГЕНЯН А. А.

В связи с развитием в последнее время газодинамических лазеров несомненно представляет большой практический интерес изучение нелинейных волновых процессов в окрестностях слабых ударных волн, распространяющихся в диспергирующих средах с малой диссипацией. Учет соответствующих членов с высшими производными, а также допущение о медленном изменении амплитуды, волнового числа и других величин, характеризующих волну на расстояниях и за время одного периода колебания, приводит к совершенно новым эффектам, таким как самофокусировка волновых лучей, интенсивно изучаемая в настоящее время.

Как указывается в работе [1], при работе газодинамических лазеров в потоке возможно появление жидких и твердых частиц конденсата, нарушающих гомогенность активной среды. Распространение ударных волн в таких средах имеет диссипативный и дисперсионный характер. Все эти факторы в той или иной мере влияют на мощность генерации и фазовые характеристики излучения.

Оценку этих факторов можно получить рассмотрением приближенных нелинейных уравнений движения жидкости в областях более интенсивного изменения параметров среды (области коротких волн).

Получение нелинейных уравнений коротких волн для произвольной среды дается в работах [2, 3]. Конкретизация коэффициентов этих уравнений для магнитной газодинамики, а также химически активной среды в магнитном поле как для стационарных, так и для нестационарных задач дается в [4, 5, 6].

В настоящей статье, в первой части, дается получение этих уравнений для реальной смеси с пузырьками газа и при наличии твердых сферических включений под действием внешнего магнитного поля.

Во второй части статьи выводится уравнение модуляции и интегрируется для осесимметричной задачи, что дает возможность исследования самофокусировки волновых пучков.

1. Получение уравнений коротких волн. Для произвольной недиссипативной среды эти уравнения имеют вид [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_2}\right)-u\frac{d\ln\psi}{dt}=$$

$$=-(\lambda+1)\frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\tau};\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial v_{x_2}}{H_1\partial\tau};\qquad \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{\partial v_{x_3}}{H_1\partial\tau}\tag{1.1}$$

где u—проекция на нормаль к волне возмущенной скорости частиц, t—время, H_1—нормальная скорость волны в линейном приближении, v_{x_2}, v_{x_3}—функции, смысл которых выясняется из проекций уравнения среды на направления y, z, касательные к волне, $-\tau$—время пробега волны в линейном приближении от ее положения в момент t до данной точки (эйконал), $\alpha=\alpha(\beta, \gamma)$—дисперсионное уравнение, x_2, x_3—координаты, отсчитываемые вдоль волны, ψ—лучевое решение, $(\lambda+1)u$ дает нелинейный добавок в формуле нормальной скорости волны, а также включает формально диссипативные эффекты.

Вначале рассмотрим задачу определения вида уравнения (1.1) для химически активной смеси с пузырьками газа во внешнем однородном магнитном поле с напряженностью B_0. Причем предполагаем, что происходит только одна химическая реакция.

Уравнения движения такой среды можно взять в виде [7, 8]

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho \operatorname{div} \bar{v}=0, \quad \frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p-\frac{1}{2\pi\rho}\operatorname{rot}\bar{H}\times\bar{H}+$$

$$+\frac{\eta}{\rho}\Delta\bar{v}+\frac{1}{\rho}\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}$$

$$\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}(\bar{v}\times\bar{H})=-\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot}\bar{H})$$

$$\operatorname{div}\bar{H}=0$$

$$\rho T\frac{ds}{dt}+Q\frac{dq}{dt}=k\Delta T+\sum\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+\left(\xi-\frac{2}{3}\eta\right)(\operatorname{div}\bar{v})^2+$$

$$+\frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\bar{H})^2+\rho D\Omega\operatorname{div}A+DA[-\mu\operatorname{grad}p+\operatorname{grad}(\Omega\rho+\mu\rho)] \tag{1.2}$$

$$\rho\mu\frac{dc}{dt}-Q\frac{dq}{dt}=\mu\operatorname{div}(\rho DA), \quad Tds=de+pdV-\mu dc$$

$$\rho=\rho_f(1-\beta); \quad p_g R^{3\gamma}=\text{const}, \quad \frac{p_g^{1/\gamma}\beta}{\rho_f(1-\beta)}=\text{const}$$

где p—давление в смеси, p_g—давление в газовом пузырьке, ρ—плотность смеси, ρ_f—плотность в жидкости, v—скорость, T—температура, s—энтропия, Q—средство химической реакции, μ—химический потенциал, c—концентрация, η, ξ—коэффициенты вязкости, ν_m—коэффициент магнитной вязкости.

Предполагая, что газовая и жидкая фазы движутся с одинаковой скоростью и считая, что расстояние между пузырьками много больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между ними и пульсации пузырька описать уравнением [8]

$$p_g-p=\rho_f R_0\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+\frac{3}{2}\rho_f\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2+\frac{4}{R}\eta\frac{\partial R}{\partial t} \tag{1.3}$$

При течении релаксирующих сред различаются квазизамороженный и квазиравновесный процессы распространения возмущений и соответственно различные скорости звука a_f, a_e. Несомненный интерес представляют среды, в которых предельные скорости близки друг другу [9]. Исследуем квазиравновесный случай, остальные получаются аналогично.

В этом случае основными переменными считаются плотность ρ, давление p и химическое средство Q. Используя уравнение [9]

$$ds=\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{\rho,Q}\left[dp-a_e^2d\rho-\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}dQ\right] \tag{1.4}$$

а также (1.3), систему уравнений (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{dp_g}{dt}+\rho a_e^2\operatorname{div}\bar{v}=\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\frac{dQ}{dt}+\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{\rho,Q}^{-1}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\Delta p_g-\frac{R_0^2}{3\gamma p_{g_0}(1-\beta_0)}\nabla\frac{\partial^2 p_g}{\partial t^2}-\frac{4}{R}\nu\frac{R_0}{3\gamma p_{g_0}}\nabla\frac{\partial p_g}{\partial t}+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho}\operatorname{rot}\bar{H}\times\bar{H}+\frac{\eta}{\rho}\nabla\bar{v}+\frac{1}{\rho}\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}$$

$$\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}(\bar{v}\times\bar{H})=\nu_m\nabla^2\bar{H},\quad \operatorname{div}\bar{H}=0$$

$$\frac{ds}{dt}+\frac{Q}{\rho T}\frac{dq}{dt}=\frac{k}{\rho T}\Delta T+\frac{D\Omega}{T}\left(\Delta c+\frac{k_T}{T}\Delta T+\frac{k_p}{p}\Delta p\right)$$

$$\frac{dc}{dt}-\frac{\nu}{\rho}\frac{dq}{dt}=D\left(\Delta c+\frac{k_T}{T}\Delta T+\frac{k_p}{p}\Delta p\right)$$

где

$$A=\operatorname{grad}c+\frac{k_T}{T}\operatorname{grad}T+\frac{k_p}{p}\operatorname{grad}p,\quad \Omega=k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}-T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{p,c} \tag{1.5}$$

Переходя в уравнениях (1.5) к системе подвижных координат x_1, x_2, x_3, связанной с волной, где x_1 направлено по нормали к волне, плоскость x_1x_2 проходит через начальное магнитное поле B_0, ось x_3 перпендикулярна магнитному полю, и оставляя в правых частях величины основного порядка, можно получить уравнение нелинейных характеристик, заменяя $\frac{\partial}{\partial t}\to-\lambda\delta$, $\nabla\to\vec{n}\delta$, $\Delta\to\delta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$, где $\vec{n}$—единичный вектор по нормали к характеристической поверхности, λ—нормальная скорость распространения

$$-c_n\delta p_g+\rho a_e^2\delta u=\Phi_1,\quad -c_n\delta\vec{v}+\frac{1}{\rho}\vec{n}\,\delta\,p_g-\frac{H_n}{4\pi\rho}\delta\vec{H}+\frac{1}{8\pi\rho}\vec{n}\delta H^2=\vec{\Phi}_2 \tag{1.6}$$

$$-c_n\delta\vec{H}-H_n\delta\vec{v}+\vec{H}\delta u=\vec{\Phi}_3,\quad \delta H_n=0$$

где

$$\Phi_1=\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\frac{dQ}{dt}+\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{\rho,Q}^{-1}\frac{ds}{dt}$$

$$\vec{\Phi}_2=\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\rho}\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\vec{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{4}{R}\nu\frac{R_0}{3\gamma p_{g_0}}\lambda\vec{n}\delta^2 p_g- \tag{1.7}$$

$$-\frac{R_0^2}{3\gamma p_{g_0}(1-\beta_0)}\lambda^2\vec{n}\delta^2 p_g,\quad \vec{\Phi}_3=\nu_m\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x_1^2}$$

c_n—скорость распространения магнитозвуковой волны для недиссипативной среды.

Решая (1.6) относительно δv, можно получить

$$-c_n\delta\vec{v}+\frac{\vec{n}}{\rho c_n}(\rho a_e^2\delta v_n-\Phi_1)-\frac{H_n}{4\pi\rho}\left(-\frac{H_n}{c_n}\delta\vec{v}+\frac{\vec{H}}{c_n}\delta v_n-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c_n}\vec{\Phi}_3\right)+\frac{\vec{n}}{4\pi\rho}\left\{-\frac{H_n}{c_n}\left[\frac{H_n}{\rho c_n^2}(\rho a_e^2\delta v_n-\Phi_1)-\frac{\vec{\Phi}_2\vec{H}}{c_n}\right]+\frac{H^2}{c_n}\delta v_n-\frac{\vec{\Phi}_3\vec{H}}{c_n}\right\} \tag{1.8}$$

Проектируя это уравнение на нормаль к волне, получим

$$c_n^4-c_n^2\left(a_e^2+\frac{H^2}{4\pi\rho_0}\right)+\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}a_e^2=\frac{1}{\delta v_n}\Phi \tag{1.9}$$

где

$$\Phi=\left(\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}-\frac{c_n^2}{\rho_0}\right)\Phi_1+\frac{H_n}{4\pi\rho_0}c_n^2\Phi_{3n}+\frac{H_n c_n}{4\pi\rho_0}\vec{\Phi}_2\vec{H}-\frac{c_n^2}{4\pi\rho_0}\vec{\Phi}_3\vec{H}-\Phi_{2n}c_n^3$$

Вводя обозначения

$$\vec{v}=\vec{v}+\vec{u},\quad p=P+p',\quad \rho=\rho_0+\rho',\quad T=T_0+T'$$

$$\vec{H}=\vec{B}_0+\vec{b},\quad c_n=C_n+(\lambda+1)u_n,\quad a_e=a_{e_0}+(\alpha^0-1)\frac{p'}{\rho_0 a_0} \tag{1.10}$$

$$\alpha^0=\left(\frac{\partial\rho a}{a\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}$$

где u, ρ', p', T', b—есть малые возмущенные значения и учитывая, что $\partial/\partial x_1\gg\partial/\partial x_2\gg\partial/\partial x_3$, можно в порядке $\partial u/\partial x_1$ получить условия совместности на линейных характеристиках для недиссипативной среды в виде ($x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ и принято $B_{0z}=0$)

$$u_x=C_n\frac{p'}{\rho_0 a_0},\quad u_y=-\frac{B_{0x}}{B_{0y}C_n}(C_n^2-a_0^2)\frac{p'}{\rho_0 a_0},\quad b_y=\frac{4\pi\rho_0}{B_{0y}}(C_n^2-a_0^2)\frac{p'}{\rho_0 a_0} \tag{1.11}$$

Используя (1.11), из (1.9) можно найти

$$\lambda+1=\alpha^0\frac{C_n^2-a_1^2}{\Omega_1}+\frac{3}{2}\frac{C_n^2-a_0^2}{\Omega_1}+\frac{1}{C_n\Omega_1 u_n}\frac{\Phi}{\delta u_n},\quad \Omega_1=2C_n^2-a_0^2-a_1^2 \tag{1.12}$$

Чтобы вычислить диссипативный член Φ, допускается аналитическая зависимость q от Q [9]

$$\frac{dq}{dt}=-H(\rho,c)Q,\quad H(\rho,c)=\frac{H'}{\tau'},\quad H'\sim 1 \tag{1.13}$$

Учитывая, что для квазиравновесного процесса $L/c_n\tau' \gg 1$, где L и τ' — характерные длина и время, и $Q \ll q$, а также зависимость

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\rho, Q} \left| dp - \frac{1}{\varkappa_e} a_e^2 d\rho - \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho, T} dQ \right|; \quad \varkappa_e = \frac{C_{p,Q}}{C_{v,Q}}$$

нетрудно получить условия совместности для c, T, Q, q

$$c' = \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{Q,s} p', \quad T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{Q,\rho}\left(1 - \frac{1}{\varkappa_e}\right) p', \quad Q = \frac{C_n}{H_1}\frac{\partial q}{\partial x_1}$$

$$q' = \frac{\rho_0}{\nu}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{Q,s}\frac{1}{a_e^2} p', \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{C_n^2}{H_1}\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \tag{1.14}$$

и диссипативный член Φ в виде

$$\Phi = A\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + A^* \frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3} \tag{1.15}$$

где

$$A = \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0^2} - \frac{C_n^2}{\rho_0}\right) A_1 - \frac{1}{4\pi\rho_0} A_2 + A_3$$

$$A_1 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{\rho,Q}^{-1} \left\{ \frac{k}{\rho_0 T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\rho,Q}\left(1 - \frac{1}{\varkappa_e}\right) + \frac{L\Omega}{T_0}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{Q,s}\frac{1}{a_0^2} + \frac{k_p}{p} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_T}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{Q,\rho}\left(1 - \frac{1}{\varkappa_e}\right)\right]\right\} - \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\frac{C_n^2}{H_1}\frac{\rho_0}{\nu}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{s,Q}\frac{1}{a_{e0}^2}$$

$$A_2 = 4\pi\nu_m \frac{C_n^2(C_n^2 - a_0^2)}{a_0^2}$$

$$A_3 = \left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0} - C_n{}^2\right)\left[\frac{1}{\rho_0}\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{C_n^2}{\rho_0 a_n^2} + \frac{4}{3}\frac{\nu\lambda C_n}{\gamma p_{g*}} - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_n^2 - a_0^2}{\rho_0 a_0^2}\right], \quad A^* = -\frac{R_0^2\lambda^2 C_n}{3\gamma p_{g0}(1-\beta_0)}\left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0} - C_n^2\right)$$

Нелинейное уравнение коротких волн (1.1) окончательно принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}\frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}\frac{\partial v_{x3}}{\partial x_3} + 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}\frac{\partial v_{x2}}{\partial x_3}\right) - u\frac{d\ln\psi}{dt} =$$

$$= \Pi_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \Pi_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Pi_3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}; \quad \frac{\partial v_{x2}}{H_1\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v_{x3}}{H_1 \partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x_3} \tag{1.16}$$

где обозначено

$$\Pi_1 = -\alpha^0\frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1} - \frac{3}{2}\frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1}; \quad \Pi_2 = -\frac{A}{C_n^2\Omega_1}\rho_0 a_0^2, \quad \Pi_3 = -\frac{A^*}{C_n^2\Omega_1}\rho_0 a_0^2$$

Дифференцируя уравнение (1.16) по x_1, где $x_1 = H_1\tau$, можно записать его в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \right) -$$

$$- \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{d \ln \psi}{dt} = \Pi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \Pi_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \Pi_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \tag{1.17}$$

Как видно из (1.17), влияние пузырьков в жидкости добавляет в уравнение коротких волн (1.1) третью производную неизвестной функции по x_1 с коэффициентом Π_3.

Коэффициенты $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}$ вычисляются аналогично [4] при помощи уравнений характеристик для линейной недиссипативной среды и имеют вид

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = -C_n + a_0^2 a_1^2 \frac{B^2 - 2B_x^2 - B_z^2}{B^2 C_n \Omega_1} + a_0^4 a_1^4 \frac{B_x^2 (B^2 - B_x^2 - B_z^2)(6C_n^2 - a_0^2 - a_1^2)}{4C_n^2 \Omega_1^3}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = -C_n + a_0^2 a_1^2 \frac{B^2 - 2B_x^2 - B_y^2}{B^2 C_n \Omega_1} + a_0^4 a_1^4 \frac{B_x^2 (B^2 - B_x^2 - B_y^2)(6C_n^2 - a_0^2 - a_1^2)}{4C_n^2 \Omega_1^3}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = C_n a_0^2 a_1^2 \frac{B_z B_y}{B^2} \frac{3a_0^2 + 3a_1^2 - 2C_n^2}{\Omega_1^3} \tag{1.18}$$

Лучевое решение ψ, входящее в уравнение (1.17), как показано в [3], можно получить из уравнения сохранения адиабатического инварианта [10]

$$\rho_0 \Sigma v^2 \frac{H_1^2}{C_n} = \text{const}$$

где Σ есть площадь фронта волны внутри лучевой трубки, v—возмущенное значение скорости частицы.

Рассмотрим как повлияет на вид уравнений коротких волн появление в смеси твердых частиц.

Шарик совершает движение, уравнение которого по направлению нормали к волне можно записать в виде [12, 13]

$$\frac{du_l}{dt} + \xi_1 \left(\frac{du_l}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + \eta_1 (u_l - u) = 0$$
$$\xi_1 = \frac{\rho}{\rho_L} \frac{2 + k^2 R_1^2}{4 + k^4 R_1^4}, \quad \eta_1 = \frac{\rho}{\rho_L} \frac{k^3 R_1^3 \sigma}{4 + k^4 R_1^4} \tag{1.19}$$

где u_l—скорость центра шарика по нормали к волне, u—скорость жидкости, ρ—плотность смеси, ρ_L—плотность шарика, R_1—радиус шарика, намного меньший, чем длина волны, k—волновое число падающей волны, σ—частота колебаний шарика. При появлении шариков в уравнениях движения (1.5) (в правой части второго уравнения) нужно добавить $-\beta_1 \rho_L \frac{du_l}{dt} \cdot \vec{n}$ и ρ заменить на $\rho(1-\beta_1)$, где β_1—концентрация твердых частиц в смеси.

Учитывая, что $kR_1 \ll 1$, из (1.19) можно получить условие совместности на волне в виде

$$\delta u_l = (K_1 + K_2)\delta u + K_3 u, \quad K_1 = \frac{\frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}}$$

$$K_2 = \frac{\rho}{\rho_L}\frac{k^2R_1^2}{(4 + k^4R_1^4)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}\right)^2}, \quad K_3 = \frac{-\gamma_1}{C_n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_L}\right)^2} \tag{1.20}$$

Так как K_1 — немалая величина, то первый член $K_1\delta u$ в (1.20) войдет в левую часть условия совместности (1.6), а остальные слагаемые добавятся в диссипативный член Φ_2.

Вследствие этого в уравнении (1.9) для скорости волны a_l нужно заменить на $a_l/(1-b)(1-\beta_1)$, а Φ — на $\Phi/(1-b)$, где $b = \rho_L\beta_1K_1/\rho(1-\beta_1)$.

Окончательно диссипативный член с учетом твердых шарообразных частиц запишется в виде

$$\Phi = A\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + A^*\frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3} + B\frac{\partial p}{\partial x_1} + Cp \tag{1.21}$$

где A и A^* определяются по (1.15), а B и C имеют следующий вид:

$$B = -\frac{\rho_L\beta_1K_1}{\rho_0(1-\beta_1)}\frac{C_n^3}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0(1-\beta_1)} - C_n^2\right)$$

$$C = \frac{\rho_L\beta_1K_3}{\rho_0(1-\beta_1)}\frac{C_n^3}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0(1-\beta_1)} - C_n^2\right) \tag{1.22}$$

Уравнение коротких волн (1.17) в этом случае запишется

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_1} - \frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}\right) -$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{d\ln\psi}{dt} = \Pi_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \Pi_2\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \Pi_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} +$$

$$+\Pi_4\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Pi_5\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \Pi_1 = -\alpha^0\frac{C_n^2 - a_1^2}{\Omega_1} - \frac{3}{2}\frac{C_n^2 - a_0^2}{\Omega_1} \tag{1.23}$$

$$\Pi_2 = -\frac{A}{C_n\Omega_1(1-b)}, \quad \Pi_3 = -\frac{A^*}{C_n\Omega_1(1-b)}, \quad \Pi_4 = -\frac{B}{C_n\Omega_1(1-b)}$$

$$\Pi_5 = -\frac{C}{C_n\Omega_1(1-b)}$$

2. *Нелинейное уравнение модуляции.* Общий подход получения уравнений для модулированных колебаний в нелинейной слабо диссипативной диспергирующей среде дается в [3, 10, 11].

Здесь рассматривается задача о получении нелинейного уравнения модуляций для уравнений коротких волн (1.23) прямым путем, полагая

$$u = U_0 + U_1 \exp(i\tau - \alpha t) + U_1^* \exp(-i\tau - \alpha t) + U_2 \exp(2i\tau - 2\alpha t) + \ldots \tag{2.1}$$

где $u_j(r, t)$ есть медленно меняющаяся функция от аргументов, что эквивалентно с точки зрения порядков (как принято в геометрической оптике) предположению о больших значениях ω (частота линейной задачи), τ—невозмущенный эйконал, U_j^*—комплексно сопряжена U_j.

Подставляя (2.1) в (1.23) и учитывая, что производные от экспоненциального множителя по порядку превосходят производные от функций U_j, а также соотношение $\omega = -\partial\tau/\partial t$, $k = \partial\tau/\partial x_1$, можно получить в основном порядке уравнение для слагаемых при $\exp(i\tau)$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U_1}{\partial t} ik - U_1(i\omega+\alpha)ik + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial t} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(i\omega+\alpha) - \\
-\frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \\
-\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{d \ln \psi}{dt} + \Pi_1 (k^2 U_0 U_1 + U_1^* U_2 k^2 \exp(-2\alpha t)) - \\
-\Pi_2 \left(3ik \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - 3k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - ik^3 U_1 \right) - \Pi_3 \left(U_1 k^4 - 6ik^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - \right. \\
\left. -4ik^3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - \Pi_4 \left(2ik \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - k^2 U_1 + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \right) - \Pi_5 \left(ikU_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Приравнивая коэффициенты при U_1 в (2.2), найдем дисперсионные соотношения для линейной задачи

$$\omega = \Pi_3 k^3 - \Pi_4 k, \quad \alpha = \Pi_2 k^2 - \Pi_5 \tag{2.3}$$

В порядке $\exp(2i\tau)$ найдем из (1.23)

$$U_2 = (D_1 + iD_2) U_1^2 \tag{2.4}$$

где

$$\begin{gathered}
D_1 = -\frac{1}{2} \frac{\Pi_1 k(\omega - 2k^3\Pi_3 + k\Pi_4)}{(\omega - 2k^2\Pi_3 + k\Pi_4)^2 + \left(k^2\Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2}\Pi_5\right)^2} \\
D_2 = \frac{1}{2} \frac{\Pi_1 k \left(k^2\Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2}\Pi_5\right)}{(\omega - 2k^2\Pi_3 + k\Pi_4)^2 + \left(k^2\Pi_2 - \alpha - \frac{1}{2}\Pi_5\right)^2}
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Подставляя в (2.2), учитывая, что для дифракционных задач можно считать $U_0 = 0$ и отбрасывая несущественные вторые производные по x_1, можно получить нелинейное уравнение модуляции

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(-i\omega-\alpha+3k^2\Pi_2+4ik^3\Pi_3-2ik\Pi_4-\Pi_5)+ik\frac{\partial U_1}{\partial t}-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2\partial x_3}\right)+k^2\Pi_1(D_1+iD_2)U_1^*U_1^2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.6}$$

Если перейти в (2.6) к новым переменным $x_1=x-H_1t$, для которых имеет место

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x_1=\mathrm{const}}=\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x=\mathrm{const}}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{dX_1}{dt} \tag{2.7}$$

и положить $\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{x=\mathrm{const}}=0$, то уравнение модуляции для стационарных задач принимает вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}(C_1+iC_2)-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2\partial x_3}\right)+\Pi_1k^2(D_1+iD_2)U_1^*U_1^2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.8}$$

где

$$C_1=-\alpha+3k^2\Pi_2-\Pi_5,\quad C_2=-\omega+kH_1+4k^3\Pi_3-2k\Pi_4 \tag{2.9}$$

Рассмотрим осесимметричную задачу в случае, когда начальное магнитное поле направлено по оси x, то есть $H_0=B_{0x}$, $B_y=B_z=0$.

В этом случае коэффициенты в уравнении модуляции (2.8) упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}=0,\quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}=-\frac{C_n^2}{\Omega_1},\quad \Omega_1=2C_n^2-a_0^2-a_1^2 \tag{2.10}$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}$, уравнение (2.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(C_1+iC_2)-\frac{1}{2}H_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)+$$

$$+\Pi_1(D_1+iD_2)k^2U_1^*U_1^2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.11}$$

Представляя U_1 в виде $U_1=a\exp(i\varphi)$, учитывая что $C_1\ll C_2$, $D_1\gg D_2$ и отделяя действительные и мнимые части (2.11), получим

$$-C_2a\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}H_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial r^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r}\right)-a^3D_1\exp(-2\alpha t)=0$$

$$C_2\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{1}{2}H_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(2\frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{a}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-a^3D_2\exp(-2\alpha t)=0 \tag{2.12}$$

Система уравнений (2.12) полностью определяет эволюцию огибающей волны, характеризующейся величинами a и φ. Эти уравнения следуют также из общей теории Витема [10].

Ищем решение этих уравнений в виде

$$a=\frac{a_0}{f(x)}\exp\left(-r^2/2r_0^2f^2\right),\quad \varphi=\sigma(x)+\frac{r^2}{2R(x)} \tag{2.13}$$

где $f(x)$ задает профиль волны, kR—радиус кривизны.

Вычисляя производные и подставляя в (2.12), можно для R, f получить уравнения

$$\frac{1}{R}=-\left(\frac{f'}{f}+\exp(-2\alpha t)\frac{a_0^2}{f^2}\frac{D_2}{C_2}\right)\frac{C_2}{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}};\quad f''-\varkappa\frac{1}{f^3}=0 \tag{2.14}$$

где

$$\varkappa=\frac{1}{C_2^2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\right)^2\frac{1}{r_0^1}-2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{a_0^2\Pi_1k^2}{r_0^2}\frac{D_1}{C_2^2}\exp(-2\alpha t)-a_0^4\frac{D_2^2}{C_2^2}\exp(-4\alpha t)\Pi_1k^4$$

Интегрируя второе уравнение (2.14) при условии: $f_0=1$ при $x=0$, получим

$$x=-\frac{\sqrt{f^2(f_0'^2+\varkappa)-\varkappa}+f_0'}{f_0'^2+\varkappa} \tag{2.15}$$

Отсюда определяется $x_f=-\dfrac{\sqrt{-\varkappa}+f_0'}{f_0'^2+\varkappa}$, то есть фокусное расстояние действительно при $\varkappa<0$, а это означает, что $D_2/C_2<0$

$$2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{a_0^2}{r_0^2}\frac{D_1}{C_2^2}\exp(-2\alpha t)>\frac{1}{C_2^2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\right)^2$$

Итак, получим, что если $a_0^2>\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\dfrac{1}{D_1}r_0^2\exp(2\alpha t)$, $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}>0$, то исходная волна может распадаться на ряд пучков, которые неограниченно сжимаются на расстоянии, определяемом по формуле $x=x_f$. Все эти эффекты наблюдаются в оптике при прохождении интенсивных лазерных пучков через среды.

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԽԱՌՆՈՒՐԴԻ ՀԱՄԱՐ ԿԱՐՃ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է ալիքների տարածման խնդիրը խառնուրդում (գազ-հեղուկ, կարծր մասնիկներ)։

Արտածված է կարճ ալիքների հավասարումը և կվազիմոնոխրոմատիկ ալիքների համար ստացված է մոդուլյացիայի հավասարումը։

Առանցքասիմետրիկ գաուսյան փնջերի համար դիսիպատիվ միջավայրում ստացված է լուծումը, գտնված է նաև ֆոկուսային հեռավորությունը։

THE EQUATION OF SHORT WAVES FOR MIXTURE IN THE MAGNETIC FIELD

A. G. BAGDOEV, A. A. GOURGENIAN

S u m m a r y

The problem of propagation of waves in a mixture of gas-fluid and rigid particles is investigated. The equation of short waves is derived and for quasimonochromatic waves an equation of modulation has been obtained. A solution has been recieved for axial symmetrical Gaussian narrow bundles of dissipative medium. The focus distance has been also found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лосев С. А.* Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977. 335 с.
2. *Багдоев А. Г. и Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.—Ж. вычис. матем. и физики, 1972, т. *12*, №6, с. 1512—1529.
3. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах. Ереван: 1982. 307 с.
4. *Bagdoev A. G., Gurgenian A. A.* On the definition of simplified nonlinear equation. Institute di mecanica applicate del politecnico di Torino, nota tecnica, 113, 1976, p. 1—18.
5. *Bagdoev A. G., Petrosian L. G.* The propagation of quasimonocromatic nonlinear modulation waves in micropolar electroconducting gas-fluid mixture.—Modelling Simulation control, A AMSE Press, 1984, v. 1, №. 184, p. 1—20.
6. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых ударных волн в химически активной среде в нелинейной постановке.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. *26*, № 6, с. 3—17.
7. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
8. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.— В сб: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
9. Рыжов О. С. О нелинейной акустике химически активных сред.—ПММ, 1971, т. *35*, вып. 6, с. 1023—1037.
10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
12. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
13. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27.VII. 1984