ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 4, 1986 Механика

УДК 539.3:539.55

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

МОВСИСЯН Л. А.

Как известно [1, 2], задача устойчивости термочувствительных упругих оболочек и пластин сводится к уравнениям с переменными коэффициентами, которые, вообще говоря, аналитически не интегрируемы, разве только в элементарных случаях. В [3] предложен подход к решению задач устойчивости цилиндрической оболочки и пластинки, находящихся в одномерном стационарном температурном поле, когда коэффициенты упругости и температурного расширения произвольным образом зависят от температуры. Определение критических параметров сводится к нахождению минимальных собственных значений бесконечных матриц.

В данной работе этот подход распространяется и на решение наследственно упругих задач.

1. Пусть имеется цилиндрическая оболочка, которая находится в осесимметричном стационарном температурном поле, причем толщина оболочки настолько мала, что изменением температуры по ней можно пренебречь.

Пусть свойства материала описываются соотношениями

$$\sigma_{ij}=(1-\Gamma^*)[\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij}]-(3\lambda+2\mu)\alpha T\delta_{ij} \tag{1.1}$$

Здесь коэффициенты λ, μ и α считаются произвольным образом зависящими от температуры T, но так, что коэффициент Пуассона $\nu=\lambda/2(\lambda+\mu)$ является постоянным [1], а оператор Γ^* определяется как

$$\Gamma^*u(t)=\int_0^t\Gamma(t-\tau, T)u(\tau)d\tau \tag{1.2}$$

Если предположить, что оболочка сжимается в осевом направлении усилием постоянной интенсивности P, то уравнение осесимметричных форм потери устойчивости запишется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\int_0^t\Gamma(t-\tau, T)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\tau\right]\right\}+$$

$$+\frac{Eh}{R^2}\left[w-\int_0^t\Gamma(t-\tau, T)\,w d\tau\right]+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1.3}$$

В дальнейшем, ради конкретности и простоты вычислительных работ будем иметь дело исключительно с ядрами экспоненциального типа — типичное или стандартное тело — $\Gamma(t-\tau, T) = f(T)\exp\{-[\gamma+f(T)]\times \times(t-\tau)\}$, где $1/\gamma$ — время запаздывания ($\gamma=\text{const}$). Тогда (1.3) можно привести к дифференциальному уравнению

$$L\left(E, \frac{\partial w}{\partial t}\right)+[\gamma+f(T)]L(E, w)-L(Ef, w)+$$

$$+P\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{[\gamma+f(T)]w+\frac{\partial w}{\partial t}\right\}=0 \qquad (1.4)$$

где

$$L(u, v)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{uh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]+\frac{uh}{R^2}v$$

Будем изучать только оболочку и пластинку, края которых шарнирно оперты, при заданных начальных условиях: $w=w_0(x)$ при $t=0$.

2. Характерные черты и общие выводы, связанные с вязкостью, для оболочки и пластинки одинаковые, поэтому для простоты исследований наследственно упругих задач ограничимся только пластинкой ($R\to\infty$). Тогда вместо (1.4) будем иметь (цилиндрический изгиб)

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+P\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+[\gamma+f(T)]w\right\}=0 \qquad (2.1)$$

Нас интересуют значения мгновенного и длительного критических усилий, которые определяются соответственно из уравнений

$$EJ\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}+P\overline{w}=0, \quad J=\frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (2.2)$$

$$EJ\gamma\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}+[\gamma+f(T)]P\overline{w}=0 \qquad (2.3)$$

Уравнения (2.2) и (2.3) получаются при предельных значениях $k(w=\overline{w}(x)\exp(kt))$. А вообще, уравнение (2.1) можно решить так, как и (2.2), (2.3).

Будем решать (2.3). Решение (2.2) получится как частный случай ($f(T)=0$). Представим E и $\gamma+f(T)$ в виде рядов

$$EJ=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos\lambda_k x, \quad 1+\frac{f(T)}{\gamma}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\cos\lambda_k x, \quad \lambda_k=\frac{k\pi}{l} \qquad (2.4)$$

В виде ряда, удовлетворяющего граничным условиям, будем искать также прогиб

$$\overline{w}=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin\lambda_k x \qquad (2.5)$$

Тогда подставляя (2.4) и (2.5) в (2.3) и производя некоторые процедуры, для неизвестных f_k получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$2\left[\left(a_0-\frac{1}{2}a_{2k}\right)\lambda_k^2-P\left(b_0-\frac{1}{2}b_{2k}\right)\right]f_k+\sum_{m=1}^{k-1}[(a_{k-m}-a_{k+m})\lambda_m^2-$$

$$-(b_{k-m}-b_{k+m})P]f_m+\sum_{m=k+1}^{\infty}[(a_{m-k}-a_{m+k})\lambda_m^2-(b_{m-k}-b_{m+k})P]f_m=0$$

(2.6)

Критическое усилие длительной потери устойчивости ($P^1_{\text{кр}}$) определится как наименьший корень равенства нулю детерминанта системы (2.6).

Сначала рассмотрим два примера, для которых решение задач мгновенной устойчивости можно получить в замкнутой форме без вышеприведенных процедур.

а) Пусть часть пластинки ($0\leqslant x<c$) свободна от температуры, а оставшаяся часть ($c\leqslant x\leqslant l$) подогрета постоянной температурой T_1. Обозначим модули упругости соответственно E и E_1. Если решение искать обычным образом, то есть для двух интервалов постоянства изгибной жесткости, далее удовлетворять условиям на концах и в точке сопряжения $x=c$, то для определения критического усилия получим уравнение

$$k_2\operatorname{tg}k_1z+k_1\operatorname{tg}k_2(1-z)=0,\quad z=c/l \tag{2.7}$$

$$k_1^2=\frac{Pl^2}{EJ},\quad k_2^2=\frac{Pl^2}{E_1J}$$

б) Температура по длине пластинки меняется линейно

$$T=T_1+(T_2-T_1)\frac{x}{l} \tag{2.8}$$

и модуль Юнга также линейно зависит от температуры

$$E=E_0(1-\lambda\alpha_0T) \tag{2.9}$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$(1-ax)\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}+b^2\overline{w}=0,\quad b^2=\frac{P}{E_0(1-\lambda\alpha_0T_1)},\quad a=\frac{\lambda\alpha_0(T_2-T_1)}{(1-\lambda\alpha_0T_1)l} \tag{2.10}$$

решение которого выражается через бесселевы функции

$$\overline{w}=C_1y^{1/2}J_1(2dy^{1/2})+C_2y^{1/2}Y_1(2dy^{1/2}),\quad d=b/a,\quad y=1-ax \tag{2.11}$$

Для определения критического усилия имеем уравнение

$$J_1(2d)Y_1[2d(1-a)^{1/2}]-Y_1(2d)J_1[2d(1-a)^{1/2}]=0 \tag{2.12}$$

Теперь эти же задачи рассмотрим в постановке, когда критические усилия определяются из системы (2.6).

Коэффициенты a_k соответственно для первой и второй задач будут

$$a_0=[Ez+E_1(1-z)]J,\ a_k=\frac{2(E-E_1)J}{k\pi}\sin k\pi z \tag{2.13}$$

$$a_0 = E_0 J[1-0{,}5\lambda\alpha_0(T_1+T_2)], \quad a_k = \frac{2E_0 J[1-(-1)^k]}{k^2\pi^2} \tag{2.14}$$

Сравнение минимальных корней трансцендентных уравнений (2.7) и (2.12) с соответствующими, полученными из (2.6) ($b_k=0$, $k\neq 0$) при (2.13) и (2.14), даже во втором приближении (детерминант второго порядка) показывает вполне удовлетворительное совпадение. Например, для первой задачи при $E=4E_1, z=0{,}5$ минимальный корень, определенный из (2.7), есть $P_{кр}=1{,}46\,P_э(E_1)$, в то время как из (2.6) получается $P_{кр}=1{,}52P_э(E_1)$ $(P_э(E_1)=E_1 J\lambda_1^2)$.

Это показывает эффективность вышеприведенного способа определения критических сил в задачах, для которых непосредственное интегрирование невозможно.

Теперь займемся определением длительного критического усилия. Помимо a_k нам необходимо будет также b_k. Для конкретности примем, что $f(T)$ также линейная функция от температуры $f(T)=A+BT$. Тогда коэффициенты b_k соответственно для первой и второй задач будут

$$b_0=a_1 z+b_1(1-z), \quad b_k=\frac{2}{k\pi}(a_1-b_1)\sin k\pi z, \quad a_1=1+\frac{A}{\gamma}, \quad b_1=a_1+\frac{BT_1}{\gamma}$$

$$b_0=a_2+\frac{b_2 l}{2}, \quad b_k=\frac{2b_2}{k\pi}[1-(-1)^k], \quad a_2=1+\frac{1}{\gamma}(A+BT_1), \quad b_2=\frac{B}{\gamma l}(T_2-T_1) \tag{2.15}$$

На фиг. 1 и 2 приведены кривые мгновенных (1) и длительных (2) безразмерных критических усилий. По оси ординат отложено $\bar{P}_{кр}=P_{кр}/P_э$, $(P_э=EJ\lambda_1^2)$, а по оси абсцисс—в первом случае z, а во втором—безразмерное $\theta=T_1/T_2$. Было принято:

$$E=2E_1, \ a_1=2, \ b_1=3, \ \lambda\alpha_0 T_2=0{,}5, \quad a_2=a_1+\theta, \quad b_2=1-\theta$$

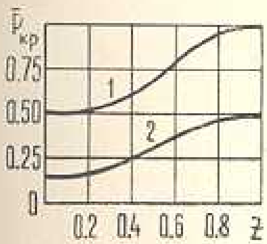
Известно, что при неучете упругих и вязких свойств материала от температуры, значение длительного критического усилия получается из выражения мгновенного усилия, если заменить мгновенный упругий модуль длительным. Но, как видно из приведенных фигур и из (2.1), это для термочувствительных систем будет иметь место только в случае, когда время релаксации $1/[\gamma+f(T)]$ не изменяется с изменением температуры. В частности, в первом примере, если при $z=1$ длительное критическое усилие равно половине эйлерового, то уже при $z=0$ (пластина постоянно подогрета) оно равно одной трети эйлерового с новым мгновенным модулем упругости.

Между прочим, первую задачу можно рассмотреть и в упругопластической постановке в предположении, что нагретая часть пластинки находится в пластическом состоянии. Если предположить, что материал пластинки подчиняется линейному упрочнению и E_k —касательный модуль, то выражение мгновенного критического усилия определится из (2.6) ($b_k=0$, $k\neq 0$) с a_k из (2.13), в которых E_1 должно быть заменено на E_k.

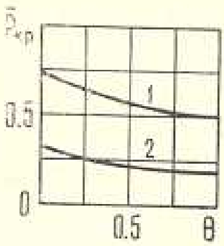
3. В предыдущих задачах влияние температуры входило только через упругие и наследственные коэффициенты. Теперь рассмотрим пример, когда сжимающая сила также зависит от температуры. Таковым будет, например, случай, когда края пластинки защемлены в продольном направлении (начальное состояние). Если предположить, что пластинка неравномерно нагрета и внешние силы отсутствуют, то выражение сжимающего усилия будет

$$P=h\int_0^l \alpha T dx \Big/ (1-\nu)\int_0^l \frac{dx}{E} \tag{3.1}$$

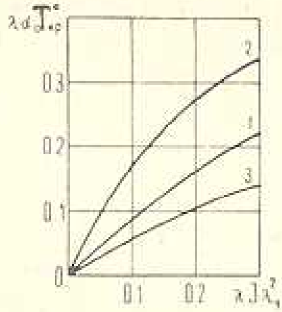
Формула сжимающего усилия для наследственно-упругой пластинки при неравномерном нагреве получается слишком длинной и получить аналитическое выражение для критического усилия невозможно.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 3. приведены кривые критической температуры $\lambda\alpha_0 T^0_{кр}$ в зависимости от безразмерного параметра $\lambda J\lambda_1^2$ для трех случаев:

$$1)\ T^0=T_1=T_2,\quad 2)\ T_1=0,\quad T_2=T^0,\quad 3)\ T_2=2T_1=2T^0$$

Температура по длине пластинки изменяется по закону (2.8), а модуль Юнга и коэффициент температурного расширения также линейные функции от температуры $E=E_0(1-\lambda\alpha_0 T)$, $\alpha=\alpha_0(1+\lambda\alpha_0 T)$.

Если предположить, что пластинка обладает наследственным свойством и подогрета постоянной температурой T^0, то критические усилия соответственно для мгновенной и длительной устойчивости определяются формулами

$$\alpha_0 T^0(1+\lambda\alpha_0 T^0)=J\lambda_1^2,\quad \alpha_0 T^0(1+\lambda\alpha_0 T^0)=J\lambda_1^2\left[1+\frac{f(T^0)}{\gamma}\right] \tag{3.2}$$

Из приведенных формул видно, что длительная критическая температура может быть больше или меньше мгновенной (причем мгновенная критическая температура при учете зависимости коэффицента температурного расширения от температуры получается меньшей, чем без учета этой зависимости), смотря по тому как зависят коэффициент температурного расширения и время релаксации от температуры.

4. Случай цилиндрической оболочки при мгновенной устойчивости получим из (1.4) и бесконечная система, аналогичная (2.6), будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{q-1}(c_{q-n}-c_{q+n})w_n+(2c_0-c_{2q}-P\lambda_q^2)w_q+\sum_{n=q+1}(c_{n-q}-c_{n+q})w_n=0 \quad (4.1)$$

$$c_{q\pm n}=\left(\frac{h^3\lambda_q^2\lambda_n^2}{24(1-\nu^2)}+\frac{h}{2R^2}\right)a_{q\pm n}$$

Выражение мгновенного критического усилия для достаточно длинной оболочки при (2.8) и (2.9) во втором приближении имеет вид

$$P_{\text{кр}}=0{,}605\,E_0\frac{h^2}{R}\left\{1-\lambda a_0\left[\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}(T_2-T_1)\right]\right\}$$

5. Здесь будем рассматривать цилиндрическую оболочку под равномерным давлением. Если предположить, что температура по длине оболочки меняется так, что имеет место $\frac{\partial^2(E\Phi)}{\partial x^2}\ll E\frac{\partial^2\Phi}{R^2\partial\beta^2}$, то для потенциальной функции Φ можноо получить уравнение, аналогичное (1.4), которое для мгновенной задачи примет вид

$$\frac{\partial^4(E\Phi)}{\partial x^4}+\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)R^6}\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8}+\frac{q}{hR^3}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\beta^6}=0$$

Если представить $E(x)$ в виде (2.4) и искать Φ следующим образом:

$$\Phi=\cos m\beta\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\lambda_n x$$

то бесконечная система будет иметь вид (4.1) с коэффициентами

$$c_{q\pm n}=\left(\frac{h^2m^8}{24(1-\nu^2)R^6}+\frac{1}{2}\lambda_n^4\right)a_{q\pm n}$$

а $P\lambda_q^2$ необходимо заменить на $Q=qm^6/hR^3$.

Определение критического давления в случае, когда E линейно зависит от температуры, а последняя по длине меняется как $T=T_1\cos\lambda_1 x$, ($T_1=\text{const}$), сводится к нахождению минимального корня цепной дроби

$$U_1-\cfrac{1}{U_2-\cfrac{1}{U_3-\dots}}=0,\quad U_n=\frac{2c_0-Q}{c_1}$$

Для оболочки с данными $12(1-\nu^2)R^2/h^2=10^6$, $\pi R/l=10$ при $\lambda a_0T_1=0{,}75$ получается, что значения критического давления в первых трех приближениях соответственно равны 1; 0,825 и 0,796 от значения классического критического давления (без учета зависимости свойства материала от температуры).

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՋԵՐՄԱԶԳԱՅՈՒՆ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է գլանային թաղանթի և սալի կայունությունը միաչափ ստացիոնար ջերմային դաշտում առաձգական և առաձգամածուցիկ դրվածքներում, երբ այդ հատկությունները հանդիսանում են կամայական ֆունկցիաներ ջերմությունից։ Ակնթարթային և երկարատև կրիտիկական ուժերի որոշումը ազատ հենված համակարգերի համար բերվում է անվերջ մատրիցների ամենափոքր սեփական արժեքների գտնելուն։ Դիտարկված է մի շարք խնդիրներ։

ON THE STABILITY OF ELASTIC AND VISCOELASTIC THERMOSENSIBLE PLATES AND SHELLS

L. A. MOVSISIAN

Summary

The stability of cylindric shell and plate in the one-dimensional steady thermal field in elastic and viscoelastic state is investigated, when these properties are arbitrary functions from temperature. For free supported systems the determination of instantaneous and long-term critical forces is reduced to finding of the minimal eigenvalues of infinite matrices. A series of problems have been considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1968. 520 с.
2. *Ambartsumian S. A., Bagdasarian G. E., Durgarian S. M. and Gnuny V. Ts.* Some Problems of Vibration and Stability of Shells and Plates.—IJSS, 1966, vol. 2, p. 59—81.
3. *Мовсисян Л. А.* Об устойчивости термочувствительных цилиндрических оболочек и пластин.—Механика. Межвуз. сб. научн. тр. Изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 75—80.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию 12.III. 1984.