ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, №4, 1986 Механика

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХ ЦИЛИНДРОВ

МАРТИРОСЯН З. А.

Рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для трех соосных цилиндров, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры. Цилиндры контактируют между собой торцами. Контакт между цилиндрами предполагается гладким, то есть без сцепления, а зоны контакта считаются неизвестными. Для простоты принимается, что на боковых поверхностях цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки таким способом, что обе контактные области образуются в виде круга.

Задача решена при помощи функций Папковича-Нейбера, которые представляются в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини с неизвестными коэффициентами, для определения которых получены три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и две системы парных рядов уравнений, содержащих функции Бесселя, решение которых сводится к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью.

Подробная библиография по этому вопросу приводится в [1].

Для решения описанной задачи величины, относящиеся к верхнему, среднему и нижнему цилиндрам, будем отмечать соответственно индексами 1,2 и 3 (фиг. 1).

Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} F_i(r) & (0 \leqslant r < a_i) \\ 0 & (a_i \leqslant r < R) \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) \quad (i = 1,\ 3)$$

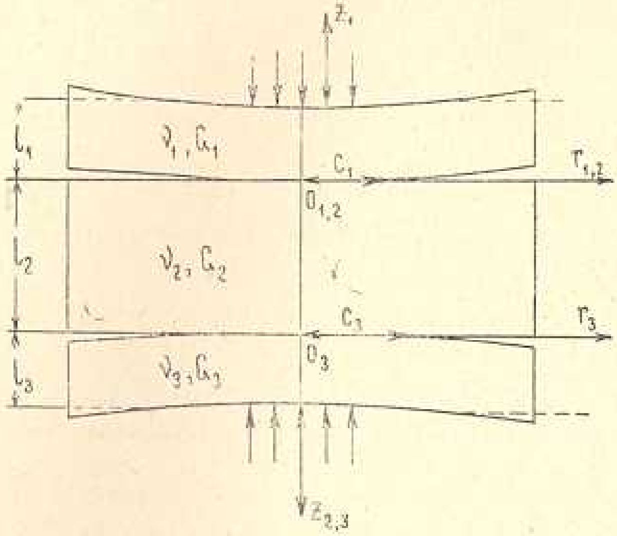
$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0), \quad \sigma_z^{(2)}(r, l_2) = \sigma_z^{(3)}(r, 0)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R, z) = 0, \quad \sigma_r^{(i)}(R, z) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) & 0 \leqslant r < c_1 \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 & c_1 < r < R \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_z^{(2)}(r, l_2) = u_z^{(3)}(r, 0) & 0 \leqslant r < c_3 \\ \sigma_z^{(3)}(r, 0) = 0 & c_3 < r < R \end{cases}$$



Фиг. 1

Здесь принято, что $F_i(r)$, $(i=1, 3)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная на заданном интервале функция и может быть представлена в виде ряда Фурье-Дини, l_i $(i=1, 2, 3)$ — длины, R — радиус цилиндров, $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода, β_k — положительные корни уравнения $J_1(\beta_k R)=0$, а c_i $(i=1, 3)$ — размеры области контакта двух цилиндров.

Решение задачи сводится к нахождению функций Папковича-Нейбера, которые удовлетворяют гармоническому уравнению [2]

$$\Delta\varphi_j^{(i)}(r, z)=0 \quad (j=1, 2); \quad \Delta\varphi_3^{(i)}(r, z)-\frac{\varphi_3^{(i)}(r, z)}{r^2}=0 \quad (i=1, 2, 3) \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа в цилиндрических координатах, и условиям (1).

Решения уравнений (1.2) ищем в виде

$$\varphi_1^{(i)}(r, z)=C_i z+B_i(r^2-2z^2)+\sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(i)}\lambda_{ki}^{-1} I_0(\lambda_{ki} r)\cos(\lambda_{ki} z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{-1}(A_k^{(i)}\operatorname{sh}\beta_k z+B_k^{(i)}\operatorname{ch}\beta_k z)J_0(\beta_k r) \qquad C_2=0$$

$$\varphi_2^{(i)}(r, z)=A_i z+\sum_{k=1}^{\infty}(C_k^{(i)}\operatorname{sh}\beta_k z+D_k^{(i)}\operatorname{ch}\beta_k z)J_0(\beta_k r) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\varphi_3^{(i)}(r, z)=\sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(i)} I_1(\lambda_{ki} r)\cos\lambda_{ki} z \tag{3}$$

где $I_n(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, а $\lambda_{ki}=\frac{k\pi}{l_i}$.

G_i $(i=1, 2, 3)$ — модули сдвига, а ν_i $(i=1, 2, 3)$ — коэффициенты Пуассона.

Введем обозначения

$$-\left[B_k^{(i)}-2(1-\nu_i)C_k^{(i)}\right]=\frac{X_k^{(i)}}{\beta_k} \quad (i=1, 3) \tag{10}$$

Тогда из соотношений (5) получим

$$\begin{aligned} &\Delta_k^{(i)}C_k^{(i)}=-\mu_{ki}\operatorname{sh}\mu_{ki}\frac{a_k^{(i)}+P^*_{ki}}{\beta_k}+\operatorname{sh}^2\mu_{ki}\frac{X_k^{(i)}}{\beta_k} \\ &\hspace{20em}(i=1, 3) \\ &\Delta_k^{(i)}D_k^{(i)}=F_k^{(i)}\frac{a_k^{(i)}+P^*_{ki}}{\beta_k}-H_k^{(i)}\frac{X_k^{(i)}}{\beta_k} \\ &\Delta_k^{(2)}C_k^{(2)}=-\mu_{k2}\operatorname{sh}\mu_{k2}\frac{X_k^{(3)}+P^*_{k2}-P_{k3}}{\beta_k}+\operatorname{sh}^2\mu_{k2}\frac{X_k^{(1)}-P_{k1}+P_{k2}}{\beta_k} \\ &\Delta_k^{(2)}D_k^{(2)}=F_k^{(2)}\frac{X_k^{(3)}+P^*_{k2}-P_{k3}}{\beta_k}-H_k^{(2)}\frac{X_k^{(1)}-P_{k1}+P_{k2}}{\beta_k} \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\Delta_k^{(i)}=\operatorname{sh}^2\mu_{ki}-\mu_{ki}^2, \quad F_k^{(i)}=\operatorname{sh}\mu_{ki}+\mu_{ki}\operatorname{ch}\mu_{ki}, \quad H_k^{(i)}=\operatorname{sh}\mu_{ki}\operatorname{ch}\mu_{ki}+\mu_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \tag{12}$$

Подставляя значения $C_k^{(i)}$, $D_k^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$ в (7), получим следующую систему парных рядов—уравнений, содержащих функции Бесселя:

$$\begin{aligned} &q_0^{*(i)}+\sum_{k=1}^{\infty}(1+M_{ki})\frac{X_k^{(i)}}{\beta_k}J_0(\beta_k r)=\sum_{k=1}^{\infty}N_k^{(i)}J_0(\beta_k r) \quad (0\leqslant r<c_i) \\ &\hspace{20em}(i=1, 3) \\ &a_0+\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(i)}J_0(\beta_k r)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{ki}J_0(\beta_k r) \quad (c_i<r<R) \end{aligned} \tag{13}$$

где введены обозначения

$$q_0^{*(i)}=\frac{C_1}{2[1-\nu_1+G(1-\nu_2)]}, \quad q_0^{*(3)}=\frac{\dfrac{I_2 a_0}{1+\nu_2}+G^*C_3}{2[1-\nu_2+G^*(1-\nu_3)]} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &M_{k1}=\alpha M_k^{(1)}+(1-\alpha)M_k^{(2)}, \quad M_{k3}=\alpha^* M_k^{(2)}+(1-\alpha^*)M_k^{(3)} \\ &\Delta_k^{(i)}M_k^{(i)}=\operatorname{sh}\mu_{ki}(\operatorname{ch}\mu_{ki}-\operatorname{sh}\mu_{ki})+\mu_{ki}(1+\mu_{ki}) \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\alpha=\frac{1-\nu_1}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)}, \quad \alpha^*=\frac{1-\nu_2}{1-\nu_2+G^*(1-\nu_3)}$$

$$N_k^{(1)}=\frac{1}{\beta_k}\left[\alpha\frac{F_k^{(1)}(a_k^{(1)}+P^*_{k1})}{\Delta_k^{(1)}}+(1-\alpha)\frac{(X_k^{(3)}+P^*_{k2}-P_{k3})F_k^{(2)}}{\Delta_k^{(2)}}-\frac{H_k^{(2)}(P_{k2}-P_{k1})}{\Delta_k^{(2)}}\right]$$

$$N_k^{(2)}=\frac{1}{\beta_k}\left[\alpha\frac{F_k^{(2)}(X_k^{(1)}-P_{k1}+P_{k2})}{\Delta_k^{(2)}}-\alpha^*\frac{H_k^{(2)}(P_{k2}^*-P_{k3})}{\Delta_k^{(2)}}+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha^*)\frac{F_k^{(3)}(a_k^{(3)}+P_{k3}^*)}{\Delta_k^{(3)}}\right]$$

Представляя $X_k^{(i)}$ $(i=1,\ 3)$ в виде

$$X_k^{(i)}=\frac{1}{(\beta_k c_i)^{1/2}J_0^2(\beta_k R)}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(i)}J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)+P_{ki}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\quad \beta_0=0 \tag{16}$$

и применяя известные методы решения парных рядов-уравнений [1, 3, 4], решение уравнений (13) сведем к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$b_s^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{sn}^{(1)}b_n^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{sn}^{(3)}b_n^{(3)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{sn}^{(1)}Y_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{sn}^{(2)}Y_n^{(2)}+d_s^{(1)} \tag{17}$$

$$(s=1,\ 2\ldots)$$

$$b_s^{(3)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{sn}^{(3)}b_n^{(3)}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{sn}^{(1)}b_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}d_{sn}^{(2)}Y_n^{(2)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{sn}^{(3)}Y_n^{(3)}+d_s^{(3)}$$

где

$$a_{sn}^{(i)}=-2(4s+1)\left[\frac{(-1)^{n+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k_1(y)}{yI_1(y)}I_{2n+1/2}\left(\frac{c_iy}{R}\right)I_{2s+1/2}\left(\frac{c_iy}{R}\right)dy+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_{ki}J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)J_{2s+1/2}(\beta_k c_i)}{\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)}\right]\quad(i=1,\ 3)$$

$$c_{sn}^{(i)}=-\frac{8(4s+1)\sqrt{c_i}}{R^3}\gamma^{(i)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{1/2}[(-1)^nF_k^{(i)}-H_k^{(i)}]\lambda_{ni}}{\Delta_k^{(i)}J_0(\beta_k R)(\lambda_{ni}^2+\beta_k^2)^2}J_{2s+1/2}(\beta_k c_i)\quad(i=1,\ 2,\ 3)$$

$$c_2=c_1$$

$$b_{sn}^{(1)}=\frac{2(4s+1)\sqrt{c_3}}{R^2\sqrt{c_1}}\alpha^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(2)}J_{2n+1/2}(\beta_k c_1)J_{2s+1/2}(\beta_k c_3)}{\Delta_k^{(2)}\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)} \tag{18}$$

$$b_{sn}^{(3)}=\frac{2(4s+1)\sqrt{c_1}}{R^2\sqrt{c_3}}(1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(2)}J_{2n+1/2}(\beta_k c_3)J_{2s+1/2}(\beta_k c_1)}{\Delta_k^{(2)}\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)}$$

$$d_{sn}^{(2)}=-\frac{8(4s+1)\sqrt{c_3}}{R^3}\alpha^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{1/2}[F_k^{(2)}-(-1)^nH_k^{(2)}]\lambda_{n2}}{\Delta_k^{(2)}J_0(\beta_k R)(\lambda_{n2}^2+\beta_k^2)^2}J_{2s+1/2}(\beta_k c_3)$$

$$d_s^{(i)}=\frac{2(4s+1)\sqrt{c_i}}{R^2}\gamma^{(i)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(i)}a_k^{(i)}}{\Delta_k^{(i)}\beta_k^{3/2}}J_{2s+1/2}(\beta_k c_i)\quad(i=1,\ 3)$$

$$b_0^{(i)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0,\quad \gamma^{(1)}=\alpha,\quad \gamma^{(2)}=1-\alpha,\quad \gamma^{(3)}=1-\alpha^*$$

$K_n(x)$—функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

Подставляя значения $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ в (6) и учитывая (16), получим

$$Y_k^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(i)} b_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}^{(i)} Y_n^{(i)}+d_k^{(i)} \quad (i=1,\ 3)$$

$$Y_k^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(2)} b_n^{(1)}-\sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}^{(2)} b_n^{(3)}+\sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)} Y_n^{(2)} \tag{19}$$

где

$$a_{kn}^{(i)}=\frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i\varphi_{ki}c_i^{1/2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^{1/2}\left[H_p^{(i)}-(-1)^k F_p^{(i)}\right]}{\Delta_p^{(i)} J_0(\beta_p R)(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2} J_{2n+1/2}(\beta_p c_i) \quad (i=1,\ 2,\ 3) \quad c_2=c_1$$

$$c_{kn}^{(i)}=\frac{16\lambda_{ki}^2}{l_i\varphi_{ki}R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^3\{[(-1)^k F_p^{(i)}-H_p^{(i)}]+(-1)^n[F_p^{(i)}-(-1)^k H_p^{(i)}]\}}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}\lambda_{ni} \tag{20}$$

$$b_{kn}^{(2)}=\frac{4\lambda_{k2}^2}{l_2\varphi_{k2}c_3^{1/2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^{1/2}\left[(-1)^k H_p^{(2)}-F_p^{(2)}\right]}{\Delta_p^{(2)} J_0(\beta_p R)(\lambda_{k2}^2+\beta_p^2)^2} J_{2n+1/2}(\beta_p c_3)$$

$$d_k^{(i)}=\frac{4\lambda_{ki}^2}{l_i\varphi_{ki}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p J_0(\beta_p R)\left[(-1)^k H_p^{(i)}-F_p^{(i)}\right]}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2} a_p^{(i)} \quad (i=1,\ 3)$$

Докажем, что бесконечные системы (17) и (19) квазивполне регулярны. Для этого оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных, когда $s\to\infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{sn}^{(i)}|=\frac{2(4s+1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{k_1(y)}{yI_1(y)}I_{2s+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right)I_{2n+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right)dy+$$

$$+\frac{2(4s+1)}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_{ki}|J_{2s+1/2}(\beta_k c_i)J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)|}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} \tag{21}$$

Для первого члена (21) получим оценку

$$\frac{2(4s+1)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k_1(y)}{yI_1(y)}I_{2s+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right)\left|\sum_{n=0}^{\infty}I_{2n+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right)\right|dy<$$

$$<\frac{2(4s+1)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k_1(y)}{yI_1(y)}I_{2s+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right)\sum_{n=0}^{\infty}I_{2n-1}\left(\frac{c_i y}{R}\right)dy=$$

$$=\frac{2(4s+1)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k_1(y)}{yI_1(y)}I_{2s+1/2}\left(\frac{c_i y}{R}\right)\left[I_{-1}\left(\frac{c_i y}{R}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{c_i y}{R}\right]dy \tag{22}$$

Интеграл (22) сходится абсолютно и равномерно по параметру s и, следовательно, выражение (22) является ограниченной функцией от s.

Для больших значений s имеем

$$I_{2s+1/2}(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1/2}}{\Gamma(2s+1/2)} \tag{23}$$

следовательно, интеграл, входящий в (22), при возрастании s стремится к нулю.

Имея в виду, что по n $\sum_{n=1}^{\infty}|J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)|$ сходится и его сумма имеет порядок $\beta_p^{-1/2}$ и учитывая, что M_{ki} и $F_k^{(2)}/\Delta_k^{(2)}$—ограниченные величины и при возрастании индекса стремятся к нулю, получим

$$\lim_{s\to\infty}\frac{2(4s+1)}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_{ki}|J_{2s+1/2}(\beta_k c_i)J_{2n+1/2}(\beta_k c_i)|}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)}=0$$

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|b_{sn}^{(i)}|=0,\quad \lim_{s\to\infty}d_s^{(i)}=0\quad (i=1,3) \tag{24}$$

$\lim\limits_{s\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_{sn}^{(i)}|=\lim\limits_{s\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|d_{sn}^{(i)}|=0$, как показано в работе [1].

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{kn}^{(i)}|\to 0(k^{-1/2})\quad (i=1,2,3),\quad \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|b_{kn}^{(2)}|\to 0(k^{-1/2})$$

Для суммы модулей коэффициентов при неизвестных $Y_n^{(i)}$ системы (19) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{kn}^{(i)}|\leqslant\frac{16\lambda_{ki}^2}{l_i|\varphi_{ki}|R}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\beta_p^3F_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}+\right.\quad i=1,2,3)$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^3H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}[1+(-1)^n(-1)^k]}{(\lambda_{ni}^2+\beta_k^2)^2}\right\} \tag{25}$$

Первая двойная сумма в (25) при k стремящемся к бесконечности стремится к нулю, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+\beta_p^2)^2}$ имеет порядок $\frac{1}{2\beta_p^2}$, $\frac{F_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}}\to 0(pe^{-p})$, а $\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi_{ki}|=1$.

Вторую двойную сумму в (25) можно написать в следующем виде:

$$\frac{16\lambda_{ki}^2}{Rl_i|\varphi_{ki}|}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^3H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}[1+(-1)^n(-1)^k]}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{32\lambda_{ki}^2}{Rl_i|\varphi_{ki}|}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{H_p^{(i)}\beta_p^3}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}\\[2ex] \dfrac{32\lambda_{ki}^2}{Rl_i|\varphi_{ki}|}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^3H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}(\lambda_{ki}^2+\beta_p^2)^2}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2}\end{cases} \tag{26}$$

При этом в формуле (26) верхняя строка в правой части соответствует четным значениям k, а нижняя—нечетным значениям k.

Для второго ряда верхней строки (26) получим оценку

$$\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2+\beta_p^2)^2} = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{n\pi/l_i}{\left(\frac{n^2\pi^2}{l_i^2}+\beta_p^2\right)^2} = \frac{l_i^3}{\pi^3} \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2+\frac{l_i^2\beta_p^2}{\pi^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{l_i^3}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{\left[(2m)^2+\frac{l_i^2\beta_p^2}{\pi^2}\right]^2} = \frac{l_i^3}{8\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+\frac{l_i^2\beta_p^2}{4\pi^2}\right)^2} \approx$$

$$\approx \frac{l_i^3}{8\pi^3} \frac{4\pi^2}{2l_i^2\beta_p^2} = \frac{l_i}{4\pi\beta_p^2}$$

Если представим $\frac{H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}}$ в виде $\frac{H_p^{(i)}}{\Delta_p^{(i)}} = 1+Q_p^{(i)}$, где $Q_p^{(i)} \to 0\ (e^{-2r})$, то для больших значений k получим следующую оценку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}^{(i)}| \leqslant \frac{4}{\pi^2}$$

Таким образом, сумма модулей коэффициентов бесконечных систем (17) и (19) при больших значениях s стремится к нулю или остается меньше единицы. Следовательно, эти системы квазивполне регулярны.

После решения бесконечных систем (17) и (19) из первого уравнения (13) при фиксированном r определяются $q_0^{*(i)}$, а из уравнения (14) находится c_i $(i=1, 3)$.

Подставив значение $X_k^{(i)}$ $(i=1,3)$ из формулы (16) во второй ряд (13), для контактного нормального напряжения получим следующее выражение [1]:

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) = \frac{R^2(c_1^2-r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}\, c_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \frac{n!F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_1^2)}{\Gamma(n+1/2)} \quad 0 \leqslant r < c_1$$

$$\sigma_z^{(2)}(r, l_2) = \sigma_z^{(3)}(r, 0) = \frac{R^2(c_3^2-r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}\, c_3} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(3)} \frac{n!F(-n, n+1/2, 1, r^2/c_3^2)}{\Gamma(n+1/2)} \quad 0 \leqslant r < c_3 \qquad (27)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрический ряд.

Коэффициент при особенности $(c_i^2-r^2)^{-1/2}$ в формуле (27) в окрестности $r=c_i$ имеет вид [1]

$$\frac{R^2}{\sqrt{2\pi}\, c_i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i)} \quad (i=1, 3)$$

Неизвестные величины c_i $(i=1,3)$ можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i)} = 0 \quad (i=1, 3) \qquad (28)$$

Численные примеры. В частности, рассмотрим три цилиндра, имеющих одинаковые диаметры, изготовленных из различных материалов, которые контактированы между собой торцами. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки (фиг. 1.).

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i)=\begin{cases} -P & \text{при } \; 0\leqslant r<a \\ 0 & \text{при } \; a<r<R \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) \quad (i=1,3)$$

где

$$a_0=-\frac{a^2}{R^2}P, \qquad a_k=-\frac{2aJ_1(\beta_k a)}{R^2\beta_k J_0^2(\beta_k R)}P$$

Вычисления проведены для значений $a=0{,}2R$, $0{,}7R$; $\nu_1=0{,}1$, $\nu_2=0{,}2$, $\nu_3=0{,}3$, $G_1=G_2=G_3$; $l_1=l_3=0{,}5l_2=0{,}2R$.

Для этого частного случая при $a=0{,}2R$ получается $c_1=0{,}36R$, $c_3=0{,}341R$, а при $a=0{,}7R$ $c_1=0{,}806\,R$, $c_3=0{,}794\,R$.

При решении системы уравнений (17) и (19) сначала были подобраны значения c_1 и c_3 (примерные их значения известны из [5]), по ним решались бесконечные системы алгебраических уравнений и полученные значения неизвестных были подставлены в (28). Этот процесс многократно повторялся до тех пор, пока в левой части (28) не получались числа с разными знаками, но близкие к нулю (с точностью 0,01).

ԵՐԵՔ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ձ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում են ճակատներով հպված, տարբեր առաձգական հատկություններ, միևնույն տրամագծեր և վերջավոր երկարություններ ունեցող երեք շրջանային գլանների առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիր։ Նորմալ և շոշափող լարումները գլանային մակերևույթների վրա բացակայում են։ Գլանների կոնտակտների տիրույթները համարվում են անհայտ։ Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինիի շարքերի միջոցով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում են գծային հավասարումների անվերջ համակարգեր և Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ շարք-հավասարումներ, որոնց լուծումները հանգեցված են քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի լուծմանը։ Բերված են թվային օրինակներ։

THE AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR THREE CYLINDERS

Y. A. MARTIROSSIAN

Summary

The exisymmetric contact problem of the elasticity theory for three cylinders of finite lengths and equal diameters is considered. The cylinders are contacted with each other by the faces. The contact between the cylinders is assumed smooth and the contact zones are assumed to be unknown.

The normal and shear stresses are equal to zero on the side surfaces of the cylinders. The symmetrically disposed compressing loads are applied on the free faces of the cylinders in this way: both contact regions are shoped in the form of a circle. The problem is solved using the Papkovich-Neuber functions, which are presented as the sum of Fourier and Fourier-Dini series with unknown coefficients for the determination of which are obtained three infinite systems of linear algebraic equations and two systems of dual series—eqations containing Bessel functions, the solution of which are reduced to a quasi-quite-regular infinite system of linear equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартиросян З. А.* Осесимметричная контактная задача для двух цилиндров.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 14—25.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. *Cooke J. C., Tranter C. J.* Dual Fouries—Bessels Series.—Guart J. Mech. and Appl. Math., 1959, v. 12, pt. 3.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1969, т. 22, № 5, с. 3—15.
5. *Мартиросян З. А., Тоноян В. С.* О контактном взаимодействии трех соосных упругих цилиндров конечных длин.—МТТ, 1981, № 6, с. 94—102.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
26.XII. 1983.