

УДК 539.385

КРУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ, АРМИРОВАННОГО ЧЕТЫРЕХГРАННОЙ ПРИЗМОЙ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

ГЕВОРГЯН Г. Г., ЗАРГАРЯН С. С.

В работе рассматривается решение задачи о кручении цилиндрического стержня, армированного четырехгранной призмой из другого материала.

Задача решается методом граничных интегральных уравнений. Трудности, возникающие при переходе от гладких границ к границам с угловыми точками на линии спая двух сред, заключаются в изменении функционально-аналитических свойств интегральных операторов [1]. Интегральные операторы рассматриваемого уравнения являются вполне непрерывными, если граница области поперечного сечения и линия спая сред являются гладкими замкнутыми линиями. Однако, в случае кусочно-гладких линий интегральные операторы теряют полную непрерывность.

В работе доказывается, что интегральный оператор системы интегральных уравнений рассматриваемой задачи является обобщенным оператором Фредгольма.

Решение системы интегральных уравнений проводится численно-аналитическим методом с учетом априорной информации об особенностях решения этой системы в угловых точках линии спая различных сред.

Приводятся результаты численного решения задачи для ряда материалов и для различных отношений размеров стороны квадрата к радиусу окружности поперечного сечения.

В результате решения задачи установлено, что в зависимости от отношения $\mu = G_1/G_0$ в окрестности угловой точки имеет место различное распределение напряжений. Так, в случае, когда $\mu < 1$, в окрестности угловой точки напряжения неограниченно возрастают, а в случае, когда $\mu > 1$, в окрестности угловой точки напряжения остаются ограниченными.

1. Пусть поперечное сечение стержня состоит из областей $\Omega^{(0)}$ и $\Omega^{(1)}$ (здесь $\Omega^{(1)}$ —область, занимаемая квадратом), соответствующих отдельным материалам, ограниченных кусочно-гладкими замкнутыми линиями. Обозначим через Γ_1 границу квадрата, а через Γ_0 —окружность. Тогда будем иметь: $\partial\Omega^{(0)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\partial\Omega^{(1)} = \Gamma_1$. Множество угловых точек контура обозначим через L .

Как известно [2], задача кручения такого стержня приводится к нахождению гармонических функций $\varphi^{(j)}$ ($j=0, 1$) из краевой задачи

$$\Delta\varphi^{(0)}=0 \text{ в } \Omega^{(0)}; \quad \Delta\varphi^{(1)}=0 \text{ в } \Omega^{(1)} \quad (1.1)$$

$$\varphi^{(0)}=\varphi^{(1)} \text{ на } \Gamma_1; \quad G_0 \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial n} - G_1 \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial n} = f_1 \text{ на } \Gamma_1 \setminus L \quad (1.2)$$

$$f_1 = (G_0 - G_1)[y \cos(n, \hat{x}) - x \cos(n, \hat{y})] \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial n} = g_0, \quad g_0 = y \cos(n, \hat{x}) - x \cos(n, \hat{y}) \text{ на } \Gamma_0 \quad (1.4)$$

В (1.3) и (1.4) G_j ($j=0, 1$) — модули сдвига соответствующих материалов, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega^{(0)}$.

Решение задачи (1.1) — (1.4) во всей области поперечного сечения $\Omega = \Omega^{(0)} \cup \Omega^{(1)}$ будем искать в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y) = \int_{\partial\Omega} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds = \int_{\Gamma_0} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds + \int_{\Gamma_1} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds \quad (1.5)$$

где r — расстояние между точками (x, y) и $\tau(s)$, где $\tau(s) \in \partial\Omega^{(0)}$, а s — дуговая абсцисса; $\varphi(x, y) = \varphi^{(j)}(x, y)$ в $\Omega^{(j)}$ ($j=0, 1$), $\rho(s)$ — плотность слоя.

На основании известных свойств потенциала простого слоя функция $\varphi(x, y)$ непрерывна в Ω , а на линиях спая ее нормальная производная имеет разрывы

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_t} \right)_0 = \pi\rho(t) + \int_{\partial\Omega} \rho(s) \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_t} \right)_1 = -\pi\rho(t) + \int_{\partial\Omega} \rho(s) \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds \quad (1.7)$$

Подставляя эти выражения в (1.3) и (1.4), получаем систему интегральных уравнений

$$\rho(t) + \int_{\partial\Omega} K(t, s) \rho(s) ds = f(t), \quad t \in \partial\Omega \setminus L \quad (1.8)$$

где

$$K(t, s) = \frac{G_0 - G_1}{\pi(G_0 + G_1)} \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \text{ при } t \in \Gamma_1; \quad K(t, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \text{ при } t \in \Gamma_0$$

$$f(t) = \frac{f_1(t)}{\pi(G_0 + G_1)} \text{ при } t \in \Gamma_1; \quad f(t) = \frac{1}{\pi} g_0(t) \text{ при } t \in \Gamma_0$$

Докажем разрешимость системы интегральных уравнений (1.8). В более общем предположении будем считать, что контуры Γ_0 и Γ_1 являются кусочно-гладкими.

Однородная система, сопряженная к которой совпадает с (1.8), имеет вид

$$\sigma_j(t) + \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{\Gamma_0} \sigma_0(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds + \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \sigma_1(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds = 0 \quad (j=0; 1)$$

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = (G_0 - G_1)/(G_0 + G_1) = (1 - \mu)/(1 + \mu) \quad (1.9)$$

Покажем, что матричный интегральный оператор системы (1.9) является обобщенным оператором Фредгольма [3]. Для этого представим систему (1.9) в виде

$$\sigma_j(t) + \frac{\lambda_j}{\pi} \int_{\Gamma_j} \sigma_j(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds + v_j \vec{\sigma} = 0 \quad (s \in \Gamma_j, \quad j=0; 1) \quad (1.10)$$

где $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1)$ — двухкомпонентная вектор-функция, а матричный оператор

$$\vec{v}\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} v_0 \vec{\sigma} \\ v_1 \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

является вполне непрерывным. Положим

$$(A_j \vec{\sigma})(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \vec{\sigma}(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds \quad (j=0; 1)$$

и обозначим через W диагональную матрицу $\|\lambda_j A_j \delta_j / \|_{j=0}^1$

Назовем оператор $\vec{\sigma} + \begin{pmatrix} \lambda_0 A_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 A_1 \end{pmatrix} \vec{\sigma}$ главной частью системы (1.10):

$$\vec{\sigma} + T\vec{\sigma} = 0, \quad T = W + V \quad (1.11)$$

Пусть Q_j — число угловых точек $P_k, k=1, 2, \dots, Q_j$, на каждом из контуров Γ_0 и Γ_1 .

Предположим, что вектор-функция $\vec{u} = (u_0, u_1)$ является элементом пространства $C(\partial\Omega)$, непрерывных на $\partial\Omega$ функций, с нормой $\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)} = \max_j \|u_j\|_{C(\partial\Omega)}$, где u_j — функция из $C(\Gamma_j)$, заданная на Γ_j ($j=0; 1$).

Следуя И. Радону [1], введем существенную норму матричного оператора W по определению, принятому в работе [4]:

$$R = \text{ess} \|W\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} = \inf \|W - B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} \quad (1.12)$$

где $\{B\}$ множество всех линейных, матричных, вполне непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $C(\partial\Omega)$ в банахово пространство $C(\partial\Omega)$, а

$$\|W - B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} = \sup_{\vec{u}} \frac{\|(W - B)\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}}{\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}} = \sup_j \frac{\max \|[(W - B)\vec{u}]_j\|_{C(\partial\Omega)}}{\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}} \quad (1.13)$$

Здесь $[(W - B)\vec{u}]_j$ — j -ая компонента вектора $(W - B)\vec{u}$.

Для линейного ограниченного оператора T системы (1.11), действующего в банаховом пространстве $C(\partial\Omega)$, радиус Фредгольма r_T [1] определяет наибольший круг на комплексной плоскости λ с центром $\lambda=0$, внутри которого $I-\lambda T$ является обобщенным оператором Фредгольма. Этот радиус есть точная верхняя грань радиусов сходимости ряда Неймана

$$1 + \lambda(W - B) + \lambda^2(W - B)^2 + \dots \quad (1.14)$$

где верхняя грань берется по множеству $\{B\}$ всех вполне непрерывных операторов, действующих в $C(\partial\Omega)$. Ряд (1.14) сходится при $|\lambda| \leq \|W - B\|_{C(\partial\Omega)}^{-1}$, поэтому

$$r_T \geq [\inf_B \|W - B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)}]^{-1} \quad (1.15)$$

Согласно (1.12) знаменатель в (1.15) называется существенной нормой оператора T .

Оценим существенную норму R . Из (1.11)–(1.13) следует

$$R \leq \inf_B \cdot \sup_{\vec{u}} \frac{\max_j \|(\lambda_j A_j - B_j)u_j\|_{C(\partial\Omega(j))}}{\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}}$$

Выберем такие $B_j^{(0)}$, для которых имеет место неравенство

$$\|(\lambda_j A_j - B_j^{(0)})u_j\|_{C(\partial\Omega(j))} \leq (\lambda_j \|A_j\|_{C(\partial\Omega(j)) \rightarrow C(\partial\Omega(j))} + \varepsilon) \|u_j\|_{C(\partial\Omega(j))}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R &\leq \max_j (\lambda_j \cdot \text{ess} \|A_j\|_{C(\partial\Omega(j)) \rightarrow C(\partial\Omega(j))} + \varepsilon) \sup_{\vec{u}} \frac{\max_j \|u_j\|_{C(\partial\Omega(j))}}{\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}} = \\ &= \max_j (\lambda_j \cdot \text{ess} \|A_j\|_{C(\partial\Omega(j)) \rightarrow C(\partial\Omega(j))} + \varepsilon) \end{aligned}$$

Так как ε произвольно, то его можно положить равным нулю. Поэтому

$$R \leq \max_j (\lambda_j \cdot \text{ess} \|A_j\|_{C(\partial\Omega(j)) \rightarrow C(\partial\Omega(j))})$$

или

$$R \leq \max_j \lambda_j \cdot \max_{1 \leq k \leq Q_j} \frac{\alpha_k^{(j)}}{\pi} \quad (1.16)$$

Здесь $\alpha_k^{(j)}$ — скачок полукасательной в угловой точке P_k контура Γ_j ($j=0; 1$). Получим обратную оценку для R .

$$\begin{aligned} R &= \inf_B \|W - B\|_{C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)} = \inf_B \cdot \sup_{\vec{u}} \frac{\|(W - B)\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}}{\|\vec{u}\|_{C(\partial\Omega)}} \geq \\ &\geq \inf_B \cdot \sup_{\vec{u}} \frac{\|(\lambda_j A_j - B_j)u_j\|_{C(\partial\Omega(j))}}{\|u_j\|_{C(\partial\Omega(j))}} \end{aligned}$$

Положим

$$\vec{u}^{(1)} = (u_1, 0); \quad \vec{u}^{(2)} = (0, u_2) \quad (1.17)$$

По определению (1.17) имеем $B_j u_j \stackrel{\text{def}}{=} \vec{B} u^{(j)}$

Поэтому $R \geq \inf_{B_j} \| \lambda_j A_j - B_j \|_{C(\partial\Omega^{(j)})} \geq \lambda_j \cdot \text{ess} \| A_j \|_{C(\partial\Omega^{(j)})}$. Итак

$$R \geq \max_j \lambda_j \cdot \max_{1 \leq k \leq Q_j} \frac{\alpha_k^{(j)}}{\pi} \quad (1.18)$$

Из (1.16) и (1.18) следует, что

$$R = \max_j \cdot \max_{1 \leq k \leq Q_j} \frac{\alpha_k^{(j)}}{\pi}$$

Когда угловая точка находится на внешнем контуре Γ_0 , то $\lambda_0 = 1$ и для того, чтобы R была меньше единицы, необходимо и достаточно, чтобы $0 \leq \alpha_k^{(0)} < \pi$. Если же угловая точка находится на контуре Γ_1 , учитывая, что $\lambda_1 < 1$, получаем, что $R < 1$ даже при скачках полукасательных, равных π . Таким образом, $r_T > 1$ для всех углов на Γ_0 и Γ_1 , если углы этих контуров не имеют точек заострения.

Применяя обратный оператор $(I+W)^{-1}$, получаемый из (1.14) при $\lambda = 1$ к оператору $U = I+T$, где I — тождественный оператор, находим $(I+W)^{-1}U = (I+W)^{-1}(I+W+V) = I + (I+W)^{-1}V$, где $(I+W)^{-1}V$ — вполне непрерывный оператор.

Дословным повторением вышеизложенного приема можно проверить, что и сопряженный оператор T^* является обобщенным оператором Фредгольма в пространстве $C^*(\partial\Omega)$ функций ограниченной вариации на $\partial\Omega$ [3].

2. Следуя [5], для вывода асимптотики решения системы рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\Delta\psi^{(0)} = 0 \text{ в } \Omega^{(0)}; \Delta\psi^{(j)} = 0 \text{ в } \Omega^{(j)} \quad (j=1, 2), \quad \psi^{(0)} + \psi^{(1)} = \frac{2}{\pi} \varphi^{(0)} \text{ на } \Gamma_1$$

$$G_0 \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial n} + G_1 \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n} = \frac{1}{\pi} \left(G_0 \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial n} + G_1 \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial n} \right) \text{ на } \Gamma_1 \setminus L \quad (2.1)$$

$$\psi^{(0)} + \psi^{(2)} = \frac{2}{\pi} \varphi^{(0)} \text{ на } \Gamma_0; \quad \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial n} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial n} = \frac{1}{\pi} g_0 \text{ на } \Gamma_0$$

где $\Omega^{(2)}$ — свободное пространство с $G_2 = 0$.

Тогда можно доказать [5], что на $\Gamma_1 \setminus L$

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial n} - \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial n} \right) \quad (2.2)$$

Следовательно, асимптотика решения системы интегральных уравнений (1.8) может быть получена с помощью формулы (2.2), если будет известно решение вспомогательной задачи (2.1).

Предположим, что вблизи угловой точки P_j рассматриваемая область совпадает с сектором $\left\{ x = x_1 + ix_2 = re^{i\omega}; 0 < r < \delta, -\frac{3}{2}\pi < \omega < \frac{\pi}{2} \right\}$,

причем материал с модулем сдвига G_0 занимает сектор $\left\{ 0 < r < \delta; -\frac{3}{2}\pi < \omega < 0 \right\}$, а материал с модулем сдвига G_1 занимает сектор $\left\{ 0 < r < \delta; 0 < \omega < \frac{2}{\pi} \right\}$.

Тогда, как и в [5], для плотности ρ получаем асимптотику

$$\rho = \frac{\lambda}{2\pi} (\mu - 1) D r^{\lambda-1} + O(1) \text{ на } \omega = 0, \quad \rho = -\frac{\lambda}{2\pi} (\mu - 1) D r^{\lambda-1} + O(1) \text{ на } \omega = \frac{\pi}{2} \quad (2.3)$$

где $\mu = G_1/G_0$; λ — корень с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения

$$\sin^2(\lambda\pi) = \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right)^2 \sin^2\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.4)$$

3. Интегральное уравнение (1.8) будем решать методом последовательных приближений, полагая

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_n(t) \quad \text{при } \lambda = 1 \quad (3.1)$$

Подставив (3.1) в (1.8), получим

$$\rho_0(t) = f(t), \quad \rho_n(t) = - \int_{\partial\Omega} K(t, s) \rho_{n-1}(s) ds \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

Численное решение интегрального уравнения (1.8) можно реализовать алгоритмом, указанным в [6]. Разбиваем каждую сторону квадрата на n_1 , а окружность — на n_2 равных частей. Крайние сегменты, пересечением которых является угловая точка, обозначим через Δ . Множество точек T_0 , расположенных в серединах сегментов, назовем множеством основных опорных точек. Между двумя соседними точками множества T_0 , не примыкающими к угловым, поместим m дополнительных точек на равных расстояниях, а в окрестности угловых точек поместим p дополнительных точек, которые будем сгущать по мере приближения к угловой точке. Обозначим множество дополнительных опорных точек через T_1 . Пусть $T = T_0 \cup T_1$. Обозначим через T_2 множество угловых точек и точек, лежащих в серединах соседних точек множества T , не примыкающих к угловым.

Для приближенного решения системы (1.8), записанного в виде одного уравнения, заменим интеграл в (3.2) интегральной суммой

$$\int_{\partial\Omega} \rho_{n-1}(s) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds = \sum_{\substack{l=1 \\ t_k \neq \sigma_l}}^q \rho_{n-1}(\sigma_l) \frac{\partial}{\partial n_{t_k}} \left(\ln \frac{1}{r_{t_k \sigma_l}} (s_{l+1} - s_l) \right) \quad (3.3)$$

где $t_k \in T_0$, $\sigma_l \in T$, $s_l \in T_2$, q — число точек множества T .

В окрестностях угловых точек функцию $\rho_n(s)$ будем представлять, согласно (2.3), в виде

$$\rho_n^{(ac)}(s) = Ar^{\lambda-1} + B \quad (3.4)$$

где A и B — константы, r — расстояние от точки s до соответствующей угловой точки, λ — корень с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения (2.4). Согласно исследованиям [7] уравнение (2.4) имеет положительный корень, который всегда меньше единицы.

Будем полагать, что функция (3.4) определена при $s \in \left[0; \frac{3}{2}\Delta\right]$.

На остальных участках квадрата и на окружности искомую функцию $\rho_n(s)$ будем представлять в виде кубического сплайна [8].

Для гладкого сопряжения представления (3.4) со сплайном потребуем, чтобы в точках сопряжения выполнялись следующие условия:

$$\rho_n^{(ac)}(t_k) = \rho_n^{(cn)}(t_k), \quad \rho_n^{(ac)'}(t_k) = \rho_n^{(cn)'}(t_k) \quad (3.5)$$

где $t_k \in T_0$; $n=0, 1, 2, \dots$; $k=2, n_1 \pm 2, 2n_1 \pm 2, 3n_1 \pm 2, 4n_1 - 2$.

Определяя коэффициенты представления (3.4) и сплайна сначала для известной в (3.2) функции $\rho_0(t) = f(t)$ в основных опорных точках, в дополнительных точках T_1 значение этой функции будем определять из этого представления и сплайна. Подставив эти значения $\rho_0(s)$ в (3.3), определим значения $\rho_1(t)$ по (3.2) в основных опорных точках. Продолжая таким образом последовательные приближения, придем к искомому численному решению (3.1).

Компоненты тензора напряжений выражаются через функцию кручения $\varphi(x, y)$ с помощью следующих формул:

$$X_z = \tau G_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad Y_z = \tau G_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (j=0; 1) \quad (3.6)$$

(остальные компоненты тензора напряжений равны нулю).

Здесь τ — степень кручения; $\tau = M/D$, где M — крутящий момент, D — жесткость при кручении.

Жесткость D определяется по формуле [2]:

$$D = G_0 R^4 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{G_1 - G_0}{6G_0} \left(\frac{b}{R} \right)^4 - \frac{1}{2R^4} \left(\int_{r_0} \varphi dr^2 + \frac{G_0 + G_1}{G_0} \int_{r_1} \varphi dr^2 \right) \right\} \quad (3.7)$$

где R — радиус круга, b — сторона квадрата.

4. Для численного решения задачи на ЭВМ приняты следующие параметры разбиения контура: $n_1 = 20$; $n_2 = 100$; $m = 2$; $p = 8$. В качестве $\mu = G_1/G_0$ приняты значения $\mu = 0; 0,07; 0,33; 0,55; 0,85; 1,25; 3; 5; 10; 100$, причем для большинства случаев рассмотрены четыре варианта отношений R/b

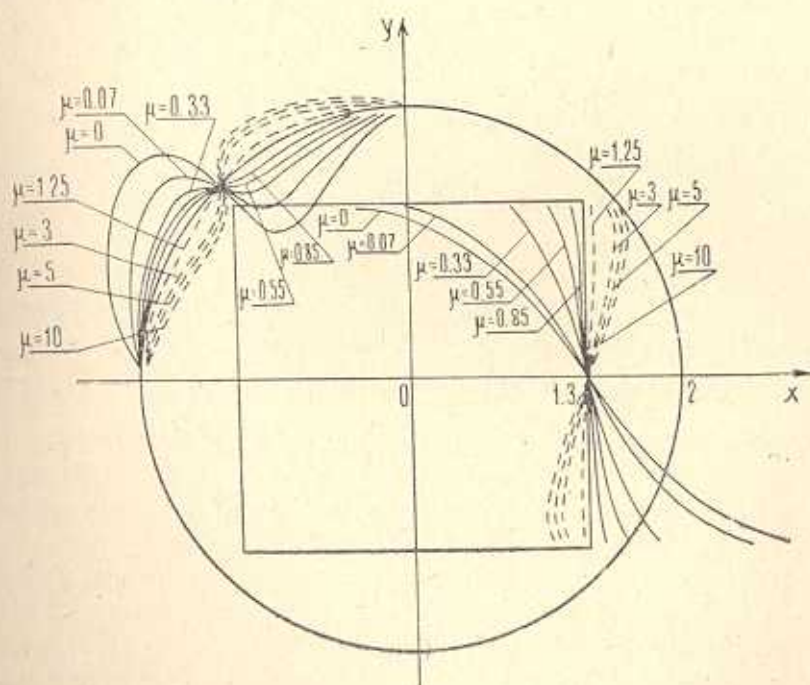
$$R/b = 1,25; 1; 0,77; 0,7$$

Во всех случаях, кроме случая $\mu = 100$, последовательные приближения сходятся довольно быстро.

В табл. 1 приведено число необходимых итераций для достижения точности 10^{-5} при решении системы интегральных уравнений. Из этой таблицы можно заключить, что при сближении границ точность решения ухудшается и достижение высокой точности требует увеличения числа итераций. Кроме того, при увеличении отношения μ от нуля до единицы необходимое число итераций для достижения точности 10^{-5} уменьшается. При дальнейшем увеличении отношения μ с единицы и выше, необходимое число итераций для достижения указанной точности увеличивается.

Таблица 1

μ	Число итераций		
	$R/b=1,25$	$R/b=1$	$R/b=0,77$
0	24	24	25
0,07	17	19	21
0,33	8	8	11
0,55	6	7	9
0,85	5	6	7
1,25	5	6	7
3	8	9	10
5	9	9	11
10	11	15	19



Фиг. 1

На фиг. 1 приведены графики функции $\rho(s)$ для некоторых значений μ для случая $R/b=0,77$ после 25-и итераций. Сплошными линиями обозначены графики функции $\rho(s)$ для случаев $\mu < 1$, а пунктирными линиями—для случаев $\mu > 1$. Ввиду симметрии графики показаны только для четверти контура. На остальных частях квадрата значения функции $\rho(s)$ могут быть продолжены по циклической симметрии с поворотом на угол $k\pi/2$, $k=0;2;3$. На окружности график функции $\rho(s)$ антисимметричен относительно точек пересечения биссектрис координатных углов и координатных осей с окружностью.

Как показывают расчеты, в угловых точках контура решение интегрального уравнения $\rho(s)$ неограниченно возрастает для случаев $\mu < 1$ и остается ограниченным при $\mu > 1$.

Для других значений отношений R/b графики функции $\rho(s)$ имеют подобный вид.

После нахождения плотности $\rho(s)$ вычисляем касательные напряжения X_2 и Y_2 по формулам (3.6) и проверяем краевое условие $\sigma_0 = \sigma_1$ на Γ_1 , где

$$\sigma_j = [X_2 \cos(n, \hat{x}) + Y_2 \cos(n, \hat{y})]_j \quad (j=0;1) \quad (4.1)$$

Здесь n —нормаль, внешняя по отношению к $\Omega^{(0)}$. Индекс j указывает, что выражение, заключенное в квадратные скобки, вычисляется для материала, находящегося в области $\Omega^{(j)}$.

Во всех упомянутых случаях (кроме случая $\mu=100$) граничное условие (4.1) удовлетворяется с большой точностью. Для дополнительных точек T_1 наибольшая относительная погрешность составляет 4,5%:

$$\left| \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_1} \right| \cdot 100 \% \leq 4,5 \%$$

В табл. 2 приведены некоторые численные результаты для случаев $\mu < 1$. В таблице приняты следующие обозначения: λ —корень трансцендентного уравнения (2.4); D —жесткость, которая вычисляется по формуле (3.7); A и B —коэффициенты представления (3.4) для плотности $\rho(s)$; A_1 и A_2 —коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности угловой точки в следующем виде:

$$A_1 = r^{1-\lambda} X_2, \quad A_2 = r^{1-\lambda} Y_2$$

Коэффициенты A и B имеют противоположные знаки, что согласуется с асимптотикой решения интегрального уравнения. На правой стороне угла (если из угловой точки смотреть во внутрь области) коэффициент A имеет знак плюс, а на левой стороне—минус.

Коэффициенты A_1 и A_2 вычислены для точек интервала (0,0045 в; 0,05 в). В этом интервале они изменяются монотонно, поэтому в таблице 2 приведены интервалы их изменения.

В последнем столбце таблицы 2 приведены значения жесткости $D/G_0 R^4$.

Как показывают расчеты, при $\mu > 1$ коэффициент A в представ-

ления (3.4) стремится к нулю. Поэтому, для повышения точности вычислений в представлении (3.4) принято, что $A=0$ и взят следующий член асимптотики $A_2 r^{\lambda_2}$, где λ_2 — второй по величине корень трансцендентного уравнения (2.4).

На фиг. 2 показаны графики касательных напряжений на биссектрисе координатного угла, на линии спая различных сред и на окружности для случаев $\mu < 1$ и $R=b$. Для других значений отношения R/b графики имеют подобный вид. На стороне квадрата показаны графики полного касательного напряжения

$$T = X_z \cos(t, \hat{x}) + Y_z \cos(t, \hat{y})$$

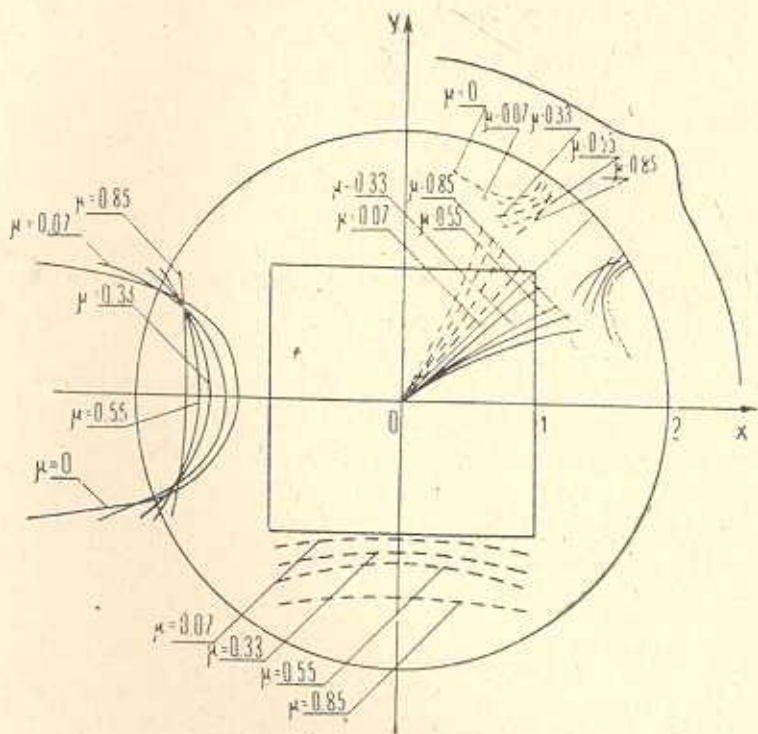
где t — касательная к линии спая. Эти напряжения, вычисленные на стороне квадрата со стороны области $\Omega^{(0)}$, показаны сплошными симметричными относительно оси x линиями, а со стороны области $\Omega^{(1)}$ — пунктирными, симметричными относительно оси y линиями. Эти графики показывают, что при $\mu < 1$ в угловых точках контура напряжения неограниченно возрастают по-разному в зависимости от отношения модулей сдвигов материалов.

Таблица 2

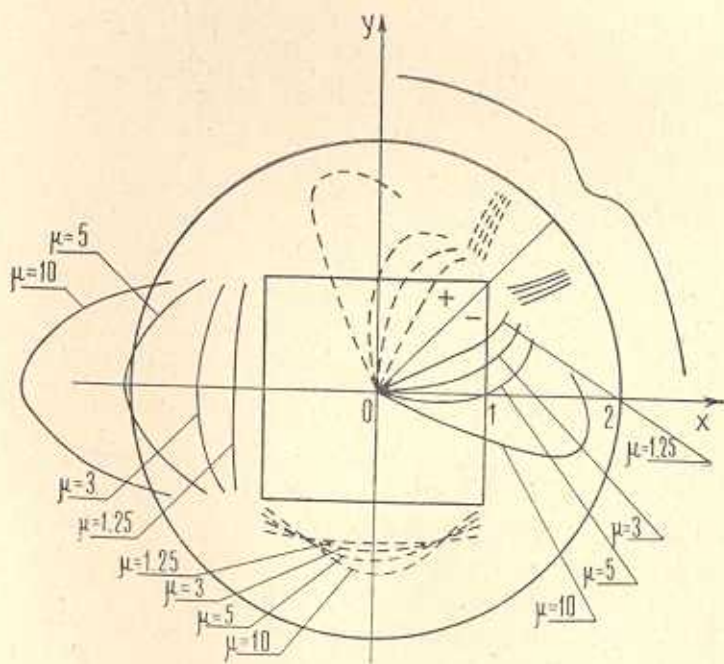
R/b	μ	λ	A	B	A_1		A_2		$D/G_0 R^4$
					$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(0)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(0)}$	
1,25	0	0,75	$\pm 0,206$	$\pm 0,079$	0	0,025—0,001	0	4,395—1,346	1,49
	0,07	0,937	$\pm 0,238$	$\pm 0,131$	0,338—0,131	0,347—0,131	0,242—0,088	3,464—1,261	1,50
	0,33	0,875	$\pm 0,209$	$\pm 0,136$	0,768—0,416	0,740—0,416	0,622—0,346	1,885—1,049	1,52
	0,55	0,75	$\pm 0,183$	$\pm 0,140$	0,828—0,442	0,788—0,442	0,727—0,506	1,323—0,938	1,54
1	0	0,75	$\pm 0,281$	$\pm 0,006$	0	0,033—0,001	0	6,001—1,832	1,38
	0,07	0,937	$\pm 0,318$	$\pm 0,164$	0,434—0,176	0,591—0,180	0,317—0,117	4,526—1,669	1,40
	0,33	0,875	$\pm 0,265$	$\pm 0,170$	0,952—0,536	1,011—0,542	0,786—0,444	2,384—1,344	1,45
	0,55	0,75	$\pm 0,232$	$\pm 0,175$	1,015—0,868	1,042—0,693	0,907—0,651	1,649—1,184	1,49
0,77	0	0,75	$\pm 0,485$	$\pm 0,176$	0	0,081—0,001	0	10,36—2,918	1,04
	0,07	0,937	$\pm 0,523$	$\pm 0,259$	0,737—0,285	0,742—0,285	0,527—0,178	7,524—2,552	1,08
	0,33	0,875	$\pm 0,387$	$\pm 0,241$	1,441—0,780	1,384—0,780	1,165—0,623	3,529—1,889	1,23
	0,55	0,75	$\pm 0,318$	$\pm 0,236$	1,449—0,948	1,396—0,948	1,271—0,881	2,311—1,603	1,35
	0,85	0,984	$\pm 0,242$	$\pm 0,218$	1,347—1,058	1,326—1,068	1,300—1,170	0,530—1,377	1,50

На окружности график касательного напряжения T показан лишь для случая $\mu = 0$, так как для других значений μ их величины отличаются незначительно. Из этого графика видно, что в окрестности точки пересечения биссектрисы угла с окружностью при $\mu < 1$ наблюдается концентрация напряжений.

На фиг. 2 графики напряжений X_z и Y_z показаны по разные стороны от биссектрисы. Сплошными линиями обозначены графики напряжения X_z , а пунктирными линиями — графики напряжения Y_z . Для биссектрис остальных координатных углов между напряжениями X_z и Y_z имеют место следующие соотношения:



Фиг. 2



Фиг. 3

$$X_2^1 = X_2^2 = Y_2^2; \quad X_2^3 = -Y_2^3 = Y_2^1; \quad X_2^4 = Y_2^4 = Y_2^1$$

где верхний индекс указывает номер координатного угла. Как видно из этих графиков, вблизи угловых точек напряжения неограниченно возрастают разными путями, зависящими от значения μ .

На фиг. 3 приведены те же графики, что и на фиг. 2, только для случаев $\mu > 1$ и $R = b$. Здесь напряжения на линии спая стремятся к нулю вблизи угловых точек контура также разными путями в зависимости от значения μ .

На окружности график напряжения T показан лишь для случая $\mu = 10$, так как для других значений μ их величины отличаются незначительно. Из этого графика видно, что в окрестности точки пересечения биссектрисы угла с окружностью напряжения резко уменьшаются.

Из графиков напряжений X_2 и Y_2 на биссектрисе видно, что вблизи угловых точек контура они стремятся к нулю разными путями, зависящими от значения μ .

ՔԱՌԱՆԻՍ ՊՐԻՉՄԱՅՈՎ ԱՄՐԱՆԱՎՈՐՎԱՆ ԳԱՆԱՅԻՆ ՉՈՂԻ ՈՐՈՐԻՄԸ ԱՅԼ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ս. Ս. ՉԱՐԳԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է ալլ նյութից քառանիստ պրիզմայով ամրանավորված գլանային ձողի ուղորման խնդիրը:

Խնդիրը լուծվում է եզրային ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով: Ապացուցվում է, որ դիտարկվող խնդրի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի ինտեգրալային օպերատորը հանդիսանում է Ֆրեդհոլմի ընդհանրացված օպերատոր:

Ինտեգրալ հավասարումների համակարգը լուծվում է թվային-անալիտիկ մեթոդով:

Իերվում են խնդրի թվային լուծման արդյունքները:

THE TORSION OF A CYLINDRICAL ROD REINFORCED BY A TETRAHEDRAL PRISM FROM ANOTHER MATERIAL

G. G. GEVORGIAN, S. S. ZARGARIAN

S u m m a r y

In this paper the problem of torsion of a cylindrical rod reinforced by a tetrahedral prism is considered.

The problem is solved by the method of boundary integral equations. It has been proved that the operator of the system of integral equations of the considered problem is the generalized Fredholm operator.

The solution leads to the numerical analytic method.

The results of the numerical solution are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радон И. О краевых задачах для логарифмического потенциала.—Успехи математических наук, 1946, т. 1, вып. 3—4, с. 96—124.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975. 295 с.
4. Кресин Г. И., Мазья В. Г. О существенной норме оператора типа потенциала двойного слоя в пространстве S_m .—Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 2, с. 272—275.
5. Заргарян С. С. Кручение стержней, составленных из композитов, имеющих ребра на поверхностях слая различных сред.—Механика композитных материалов. Рига, 1984, № 2, с. 320—327.
6. Арсенян В. А., Заргарян С. С. Численное решение плоских задач теории упругости для областей с углами.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 1, с. 47—55.
7. Чобанян К. С. Явление малонапряженности окрестности края поверхности контакта нагруженного составного тела. Диплом на открытие № 102.—Открытия. Изобретения. Пром. образцы. Товарн. знаки, 1971, № 36, с. 3.
8. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
10.IV. 1985