

УДК 539.3

О КОНТАКТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ
 БЕСКОНЕЧНОГО ОРТОТРОПНОГО ДВУХСЛОЙНОГО
 ЦИЛИНДРА

ВАТУЛЯН А. О., ОВСЕПЯН В. В.

За последние годы в печати появился ряд работ, посвященных смешанным динамическим задачам для бесконечного изотропного цилиндра [1—3]. Подобные задачи для анизотропных цилиндров практически не исследованы. В работах [4, 5] нами были изучены динамические контактные задачи для анизотропного бесконечного полого и сплошного цилиндров.

Широкое применение слоистых конструкций (в частности, цилиндрических волноводов) делает актуальным рассмотрение задачи о колебаниях штампа на поверхности слоистого цилиндра из ортотропного материала, что соответствует колебаниям конструкций из композитных материалов в рамках теории эффективных модулей.

1. Рассматривается осесимметричная задача о колебаниях ортотропного бесконечного двухслойного цилиндра с радиусами a и b ($a > b$) под действием колеблющегося штампа ширины $2c$, жестко сцепленного с цилиндром.

Граничные условия зададим в форме

$$\begin{aligned}
 r=a \quad \tau_{rz}^{(2)} = \sigma_r^{(2)} = 0 & \quad |z| > c \\
 u_r^{(2)} = f_1(z) \exp(-i\omega t) & \quad |z| \leq c
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
 r=b \quad u_z^{(2)} = f_3(z) \exp(-i\omega t) \\
 u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \\
 \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Полагаем, что

1) $u_\theta^{(l)} = 0$, $u_r^{(l)}$ и $u_z^{(l)}$ не зависят от θ .

2) режим колебаний установившийся, то есть

$$u_r^{(l)} = \overset{\circ}{u}_r^{(l)}(r, z) \exp(-i\omega t), \quad u_z^{(l)} = \overset{\circ}{u}_z^{(l)}(r, z) \exp(-i\omega t), \quad l=1, 2 \tag{1.3}$$

3) $A_{11}^{(2)} = A_{22}^{(2)}$, $A_{13}^{(2)} = A_{35}^{(2)}$

$A_{ij}^{(l)}$ — упругие постоянные материалов цилиндров ($l=1, 2$). Здесь индекс 1 относится к внутреннему цилиндру, 2 — к внешнему.

Уравнения движения в амплитудах перемещений получены в работе [5]

$$A_{11}^{(l)} \left[\frac{\partial^2 \ddot{u}_r^{(l)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{u}_r^{(l)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \ddot{u}_r^{(l)} \right] + \rho^{(l)} \omega^2 \ddot{u}_r^{(l)} +$$

$$+ A_{55}^{(l)} \frac{\partial^2 \ddot{u}_r^{(l)}}{\partial z^2} + [A_{13}^{(l)} + A_{55}^{(l)}] \frac{\partial^2 \ddot{u}_z^{(l)}}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

$$A_{55}^{(l)} \left[\frac{\partial^2 \ddot{u}_z^{(l)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{u}_z^{(l)}}{\partial r} \right] + \rho^{(l)} \omega^2 \ddot{u}_z^{(l)} + A_{33}^{(l)} \frac{\partial^2 \ddot{u}_z^{(l)}}{\partial z^2} +$$

$$+ [A_{13}^{(l)} + A_{55}^{(l)}] \left[\frac{\partial^2 \ddot{u}_r^{(l)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ddot{u}_r^{(l)}}{\partial z} \right] = 0$$

Здесь $\rho^{(l)}$ ($l=1, 2$) — плотность материала внутреннего и внешнего цилиндров.

Заканчивают постановку задач об установившихся колебаниях условия излучения на бесконечности [5].

Для сведения поставленной задачи к системе интегральных уравнений рассмотрим вспомогательную задачу, которая описывается уравнениями (1.4) и граничными условиями вида

$$r=a \quad \begin{aligned} \ddot{\sigma}_r^{(2)} &= \sigma_r^*(z) \\ \ddot{\tau}_{rz}^{(2)} &= \tau_{rz}^*(z) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$r=b \quad \begin{aligned} \ddot{\sigma}_r^{(1)} &= \ddot{\sigma}_r^{(2)}, \quad \ddot{\tau}_{rz}^{(1)} = \ddot{\tau}_{rz}^{(2)} \\ \ddot{u}_r^{(1)} &= \ddot{u}_r^{(2)}, \quad \ddot{u}_z^{(1)} = \ddot{u}_z^{(2)} \end{aligned}$$

Решение вспомогательной задачи строится методом интегрального преобразования Фурье.

Следует отметить, что решение вспомогательной задачи позволит рассчитывать волновое поле внутри составного цилиндра. Наличие анизотропии приводит к существенному усложнению задачи по сравнению с изотропным случаем.

Перемещения \ddot{u}_r и \ddot{u}_z при $r=a$ получим в виде

$$\ddot{u}_r = \frac{\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)}}{A_{33}^{(2)} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{11}(u) \bar{\sigma}_r^* + iK_{12}(u) \bar{\tau}_{rz}^*] \exp(-iux) du$$

$$\ddot{u}_z = \frac{\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)}}{A_{33}^{(2)} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [iK_{12}(u) \bar{\sigma}_r^* + K_{22}(u) \bar{\tau}_{rz}^*] \exp(-iux) du \quad (1.6)$$

причем

где $K_{ij}(u) = [K_0(u)]^{-1} \det \bar{A}_{ij}(u)$, $\det \bar{A}_0(u) = K_0(u)$, $i, j=1, 2$

$$\bar{A}_0(u) =$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_1^{(2)} J_1(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} J_1(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \sigma_1^{(2)} Y_1(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} Y_1(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \sigma_1^{(1)} J_1(\gamma \sigma_1^{(1)}) & \sigma_2^{(1)} J_1(\gamma \sigma_2^{(1)}) \\ \varphi_1^{(2)} J_0(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} J_0(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_0(\gamma \sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_0(\gamma \sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(1)} J_0(\gamma \sigma_1^{(1)}) & \varphi_2^{(1)} J_0(\gamma \sigma_2^{(1)}) \\ \psi_1^{(2)}(\gamma, u) & \psi_2^{(2)}(\gamma, u) & P_1(\gamma, u) & P_2(\gamma, u) & T \psi_1^{(1)}(\gamma, u) & T \psi_2^{(1)}(\gamma, u) \\ \sigma_1^{(2)} \chi_1^{(2)}(\gamma, u) & \sigma_2^{(2)} \chi_2^{(2)}(\gamma, u) & \sigma_1^{(2)} Q_1(\gamma, u) & \sigma_2^{(2)} Q_2(\gamma, u) & T \sigma_1^{(1)} \chi_1^{(1)}(\gamma, u) & T \sigma_2^{(1)} \chi_2^{(1)}(\gamma, u) \\ \psi_1^{(2)}(1, u) & \psi_2^{(2)}(1, u) & P_1(1, u) & P_2(1, u) & 0 & 0 \\ \sigma_1^{(2)} \chi_1^{(2)}(1, u) & \sigma_2^{(2)} \chi_2^{(2)}(1, u) & \sigma_1^{(2)} Q_1(1, u) & \sigma_2^{(2)} Q_2(1, u) & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

Матрицы $\bar{A}_{ij}(u)$ получаются из представления матрицы $\bar{A}_0(u)$ следующим образом: $\bar{A}_{11}(u)$ и $\bar{A}_{12}(u)$ получаются заменой 5-ой и 6-ой строки матрицы $\bar{A}_0(u)$ соответственно 1-ой строкой следующей матрицы:

$$\bar{L} = \begin{vmatrix} \sigma_1^{(2)} J_1(\sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} J_1(\sigma_2^{(2)}) & \sigma_1^{(2)} Y_1(\sigma_1^{(2)}) & \sigma_2^{(2)} Y_1(\sigma_2^{(2)}) & 0 & 0 \\ \varphi_1^{(2)} J_0(\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} J_0(\sigma_2^{(2)}) & \varphi_1^{(2)} Y_0(\sigma_1^{(2)}) & \varphi_2^{(2)} Y_0(\sigma_2^{(2)}) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

а $\bar{A}_{21}(u)$ и $\bar{A}_{22}(u)$ — заменой 5-ой и 6-ой строки матрицы $\bar{A}_0(u)$ соответственно 2-ой строкой матрицы \bar{L} .

Здесь введены следующие обозначения:

$$x^2 = x^{(2)^2} = \rho^{(2)} A_{33}^{(1)} x^{(1)} / \rho^{(1)} A_{33}^{(2)}$$

$$x^{(l)^2} = \rho^{(l)} \omega^2 a^2 / A_{33}^{(l)}, \quad \gamma_1^{(l)} = A_{11}^{(l)} / A_{33}^{(l)}, \quad \gamma_2^{(l)} = A_{55}^{(l)} / A_{33}^{(l)}$$

$$\gamma_3^{(l)} = A_{13}^{(l)} / A_{33}^{(l)}, \quad \gamma_4^{(l)} = A_{12}^{(l)} / A_{33}^{(l)}, \quad \gamma = b/a, \quad x = z/a$$

$$\sigma_i^{(l)^2} = \lambda_i^{(l)^2} a^2, \quad u^2 = x^2 a^2, \quad i = 1, 2$$

$$T = \gamma_{12}(\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)}) / (\gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)}), \quad \gamma_{12} = -A_{33}^{(1)} / A_{33}^{(2)}$$

$$\phi_k^{(l)}(\mu, u) = R(\sigma_k^{(l)}, u) J_0(\mu \sigma_k^{(l)}) + \frac{\gamma_2^{(l)} + \gamma_3^{(l)}}{\mu} (\gamma_4^{(l)} - \gamma_1^{(l)}) \sigma_k^{(l)} J_1(\mu \sigma_k^{(l)})$$

$$P_k(\mu, u) = R(\sigma_k^{(l)}, u) Y_0(\mu \sigma_k^{(l)}) + \frac{\gamma_2^{(l)} + \gamma_3^{(l)}}{\mu} (\gamma_4^{(l)} - \gamma_1^{(l)}) \sigma_k^{(l)} Y_1(\mu \sigma_k^{(l)}) \quad (1.8)$$

$$\chi_k^{(l)}(\mu, u) = E(\sigma_k^{(l)}, u) J_1(\mu \sigma_k^{(l)}), \quad \mu = 1, \gamma$$

$$Q_k(\mu, u) = E(\sigma_k^{(l)}, u) Y_1(\mu \sigma_k^{(l)}), \quad l, k = 1, 2$$

$$\varphi_k^{(l)} = [\sigma_k^{(l)^2} \gamma_1^{(l)} - x^{(l)^2} + \gamma_2^{(l)} u^2] / [\gamma_2^{(l)} + \gamma_3^{(l)}]^{-1}$$

$$R(\sigma_k^{(l)}, u) = \gamma_1^{(l)} \gamma_2^{(l)} \sigma_k^{(l)^2 + \gamma_3^{(l)} (x^{(l)^2} - \gamma_2^{(l)} u^2)$$

$$E(\sigma_k^{(l)}, u) = \gamma_1^{(l)} \gamma_2^{(l)} \sigma_k^{(l)^2 - \gamma_2^{(l)} (x^{(l)^2} + \gamma_3^{(l)} u^2)$$

$J_k(t)$ и $Y_k(t)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, α — параметр интегрального преобразования Фурье, а $\sigma_k^{(l)}$, $\text{Im} \sigma_k^{(l)} \geq 0$, ($k, l = 1, 2$) являются корнями следующего характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(0)} \gamma_2^{(0)} \sigma^{(0)*} - [x^{(0)*} (\gamma_1^{(0)} + \gamma_2^{(0)}) + u^2 (\gamma_3^{(0)*} + 2\gamma_3^{(0)} \gamma_3^{(0)} - \\ - \gamma_1^{(0)})] \sigma^{(0)*} + (x^{(0)*} - \gamma_2^{(0)} u^2) (x^{(0)*} - u^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя решения вспомогательной задачи, сведем исходную задачу к системе интегральных уравнений

$$\int_{-d}^d \bar{k}(\xi - x) \underline{q}(\xi) d\xi = 2\pi \underline{f}(x), \quad |x| \leq d \quad (1.10)$$

где
$$\bar{k}(t) = \int \bar{K}(u) \exp(iut) du \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}(u) = \begin{vmatrix} K_{11}(u) & iK_{12}(u) \\ -iK_{12}(u) & K_{22}(u) \end{vmatrix}, \quad \underline{f} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix}, \quad d = \frac{c}{a} \\ \underline{q} = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix}, \quad q_1 = \frac{\gamma_3^{(2)} + \gamma_3^{(2)*}}{A_{33}^{(2)}} \sigma^*, \quad q_2 = \frac{\gamma_2^{(2)} + \gamma_2^{(2)*}}{A_{33}^{(2)}} \tau_{rz}^* \end{aligned}$$

Здесь контур σ выбирается, как указано в [6]. Общая теория систем уравнений вида (1.10) подробно освещена в [6].

Решение системы (1.10) строится методом фиктивного поглощения путем преобразования исходной системы уравнений к операторной системе с матрицей-символом, вырождающейся в функционально-коммутативную на бесконечности [5, 7]. Следует отметить, что исследование элементов $K_{ij}(u)$ в задачах с анизотропией является существенно более сложной задачей.

2. Элементы $K_{ij}(u)$ представляют отношение двух детерминантов шестого порядка и являются сложными мероморфными функциями, имеющими одинаковые полюсы на вещественной оси. Проведено детальное численное и аналитическое исследование функции $K_{11}(u)$, соответствующей задаче о радиальных колебаниях гладкого банджа на поверхности слоистого ортотропного цилиндра. В этом случае крайняя задача сводится к одному интегральному уравнению вида (1.10), а в представлении ядра (1.11) вместо матрицы $\bar{K}(u)$ достаточно подставить $K_{11}(u)$

$$\int_{-d}^d k(\xi - x) q_1(\xi) d\xi = 2\pi f_1(x); \quad k(t) = \int K_{11}(u) \exp(iut) du \quad (2.1)$$

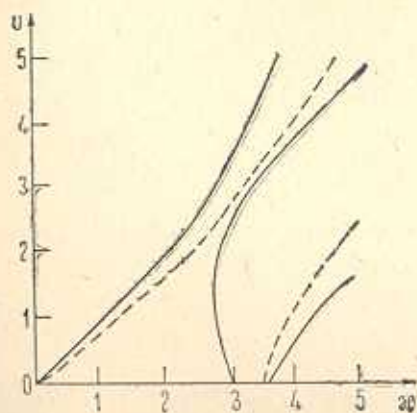
Установлено, что число бегущих волн в слое существенным образом зависит от соотношения механических параметров, а также от того какой из двух выбранных материалов заполняет внутренний цилиндр, а какой — внешний.

В настоящей работе для численных результатов применяются два материала со следующими упругими постоянными: керамика из титаната бария (материал 1)

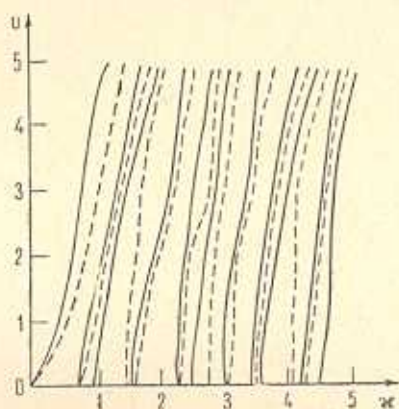
$$\begin{aligned} A_{11} = 16,8, \quad A_{12} = 7,1, \quad A_{22} = 18,9, \quad A_{33} = 5,46, \quad A_{12} = 7,82 \quad (10^{10} \text{Н/м}^2) \\ \text{и олова (материал 2)} \\ A_{11} = 7,35, \quad A_{12} = 2,8, \quad A_{22} = 8,7, \quad A_{33} = 2,2, \quad A_{12} = 2,34, \quad A_{33} = 2,265 (10^{10} \text{Н/м}^2) \quad [8]. \end{aligned}$$

Результаты численного анализа показали, что в случае, когда упругие постоянные материалов отличаются незначительно ($\delta = \max A_{jj}^{(1)}/A_{jj}^{(2)} = 0,95 \div 1,05$), то дисперсионная картина меняется мало при замене материалов местами.

На фиг. 1,2 приведено распределение нулей и полюсов функции $K_{11}(u)$ при $\gamma = 0,7$, причем сплошными линиями обозначены линии действительных полюсов, прерывистыми—действительных нулей. Фиг. 1 отвечает случаю, когда внешний цилиндр изготовлен из материала 1, а внутренний изготовлен из материала 2. Этот случай далее будем обозначать I (жесткий-внешний цилиндр, мягкий-внутренний, в данном случае $\delta = 2,48$). Фиг. 2 соответствует противоположному расположению материалов—внешний цилиндр изготовлен из материала 2, а внутренний—из материала 1. Этот случай далее будем обозначать II (мягкий-внешний цилиндр, жесткий-внутренний, в этом случае $\delta = 0,46$).



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует отметить, что полюсы функции $K_{11}(u)$ отвечают бегущим плоским волнам по поверхности цилиндра. Фиг. 1 и 2 позволяют указать их количество в зависимости от безразмерной частоты x . Так, например, в случае I при $x=2$ имеется всего одна бегущая поверхностная волна, а в случае II таких волн уже будет 4.

Аналогичные расчеты проведены для различных значений γ . Можно сделать следующий вывод: в случае I число бегущих волн с ростом γ (тонкое покрытие) не возрастает, а в случае II число бегущих волн с ростом γ не убывает. Это, видимо, связано в случае II с переотражением волн от поверхности внутреннего более жесткого цилиндра.

Проведем асимптотическое исследование функции $K_{11}(u)$ при $|u| \rightarrow \infty$

$$K_{11}(0, x) = \left\{ \sqrt{\gamma_1^{(1)}} \left[Y_1 \left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) J_1 \left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) - J_1 \left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times Y_1 \left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) \right] B^{(2)}(\gamma, J) + \sqrt{\gamma_1^{(2)}} J_1 \left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}} \right) \left[Y_1 \left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} \right) \times \right. \right. \quad (2.2)$$

$$\times B^{(2)}(\gamma, J) - J_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) B^{(2)}(\gamma, Y) \Big] D_2(0, x) [D_0(0, x)]^{-1}$$

Здесь

$$D_0(0, x) = D_1(0, x) D_2(0, x)$$

$$D_1(0, x) = \gamma_1^{(2)} J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) [B^{(2)}(\gamma, J) B^{(2)}(1, Y) + B^{(2)}(\gamma, Y) \times \\ \times B^{(2)}(1, J)] - \sqrt{\gamma_1^{(1)} \gamma_1^{(2)}} B^{(1)}(\gamma, J) \left[J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) B^{(2)}(1, Y) - Y_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}}\right) B^{(2)}(1, J) \right] \quad (2.3)$$

$$D_2(0, x) = \left\{ \gamma_2^{(2)} J_0\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) \left[J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) Y_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) - Y_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) J_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{\gamma_2^{(1)} \gamma_2^{(2)}} J_1\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) \left[Y_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) J_0\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) - J_1\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) Y_0\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}}\right) \right] \right\}$$

$$B^{(k)}(\mu, J) = x J_0\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right) + \frac{\gamma_1^{(k)} - \gamma_1^{(k)}}{\mu \sqrt{\gamma_1^{(k)}}} J_1\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right), \quad \mu = 1, \gamma$$

$$B^{(k)}(\mu, Y) = x Y_0\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right) + \frac{\gamma_1^{(k)} - \gamma_1^{(k)}}{\mu \sqrt{\gamma_1^{(k)}}} Y_1\left(\frac{\mu x}{\sqrt{\gamma_1^{(k)}}}\right), \quad k = 1, 2$$

Из уравнения $D_0(0, x) = 0$ выделяются два семейства частот запираания, которые определяются из уравнений

$$D_1(0, x) = 0, \quad D_2(0, x) = 0 \quad (2.4)$$

что соответствует стоячим волнам.

Используя асимптотические представления для функций Бесселя, получим из системы (2.4), что частоты запираания с большими номерами в слоистом цилиндре удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma x_n^{(1)}}{\sqrt{\gamma_1^{(1)}}} - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\frac{x_n^{(1)} \varepsilon}{\sqrt{\gamma_1^{(2)}}} + \sqrt{\frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_1^{(2)}}} = 0 \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma x_n^{(2)}}{\sqrt{\gamma_2^{(1)}}} - \frac{3\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\frac{x_n^{(2)} \varepsilon}{\sqrt{\gamma_2^{(2)}}} + \sqrt{\frac{\gamma_2^{(1)}}{\gamma_2^{(2)}}} = 0 \quad (2.5)$$

Для решения интегрального уравнения (2.1) используется метод фиктивного поглощения [7].

Функция $K_{11}(u)$ удовлетворяет всем условиям, позволяющим применить этот метод, а именно: она является четной мероморфной функцией, имеющей конечное число нулей z_s ($s=1, 2, \dots, n_1$) и полюсов p_l ($l=1, 2, \dots, n_2$) $n_2 \geq n_1$ на вещественной оси и убывающая на бесконечности

$$K_{11}(u) = C_1 |u|^{-1} (1 + O(u^{-1})) \quad |u| \rightarrow \infty$$

Аппроксимируем функцию $K_{11}(u)$ функцией

$$K_*(u) = (u^2 + b_*^2)^{-1/2} H(u), \quad H(u) = C_1 \prod_{k=1}^n (u^2 - z_k^2)(u^2 - p_k^2)^{-1}, \quad b_* > 0 \quad (2.6)$$

z_k ($k = n - n_1, \dots, n$), p_k ($k = n - n_2, \dots, n$) — соответственно комплексные нули и полюсы $H(u)$, которые находятся в процессе аппроксимации функции полиномами Лагранжа.

Приближенное решение уравнения (2.1) при $f_1(x) = \exp(i\eta x)$, $\text{Im}\eta = 0$ имеет вид [5]

$$q_1(x) = \frac{\exp(-i\eta x)}{K_{II}(\eta)} + \frac{\sqrt{b_* - i\eta}}{2\pi i} \exp(-i\eta d) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{b_* + iu}}{H(u)(u - \eta)} \exp(i(d-x)u) du -$$

$$- \frac{\sqrt{b_* + i\eta}}{2\pi i} \exp(i\eta d) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{b_* - iu}}{H(u)(u - \eta)} \exp(-i(d+x)u) du - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} c_k \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{b_* - iu}}{H(u)} [F(u, x_k) \exp(-i(d+x)u) + F(u, -x_k) \exp(-i(d-x)u)] du$$

где

$$F(u, x_k) = \sum_{m=1}^n \frac{D_m \exp(i(d+x_k)p_m)}{\sqrt{b_* - ip_m} (p_m - d)}, \quad D_m = \text{Res}_{u=p_m} H(u)$$

$x_k = \pm y_k$, y_k — точки, делящие интервал $(0, d)$ на равные отрезки, а c_k есть решение линейной алгебраической системы [7]

$$\sum_{k=1}^{2n} A_{lk}^{\pm} c_k = B_l^{\pm}, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

причем интегралы в (2.7) легко вычисляются по теории вычетов.

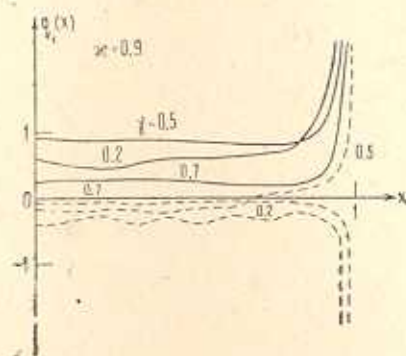
В решении (2.7) первое слагаемое есть вырожденное решение, соответствующее бесконечному штампу, второй и третий интегралы описывают влияние краев штампов и имеют характерную корневую особенность.

Последний интеграл представляет собой осциллирующую составляющую контактных напряжений под штампом.

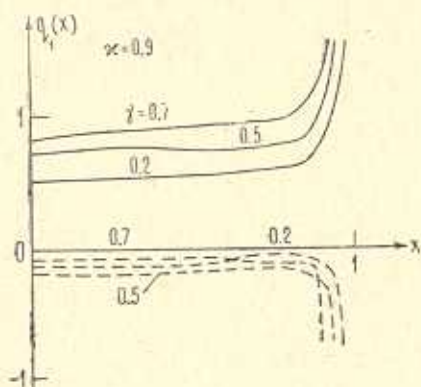
3. Численный пример. Получено распределение контактных напряжений под штампом в задачах о контакте без трения для случаев I, II при различных параметрах. Например, при $\kappa = 0,9$ функция $K_{II}(u)$ имеет и в случае I и в случае II один нуль и один полюс, так что качественная картина напряженного состояния одинакова (фиг. 3 и 4). Этот же вывод можно сделать, анализируя фиг. 1 и 2 при малых частотах (что соответствует малым κ). При более высоких частотах качественная картина напряженного состояния различна в случаях I и II (фиг. 5). На этих фигурах сплошными линиями обозначены $\text{Re}q_1(x)$, а прерывистыми линиями — $\text{Im}q_1(x)$.

В этих расчетах эффективное приближение функции $K_{II}(u)$ для различных частот колебания κ получено при аппроксимации полино-

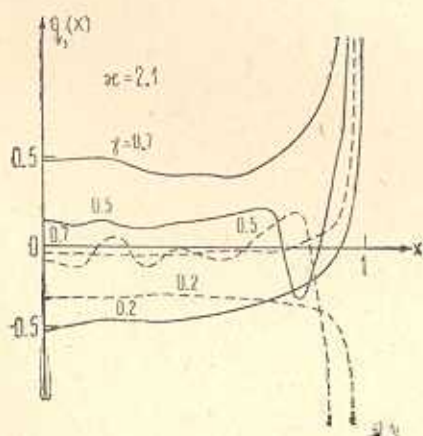
мами Лагранжа порядка 6, 8. Погрешность аппроксимации не превышает 8—15%. Например, при $\kappa=0,9$, $\gamma=0,7$ порядок полинома Лагранжа в случаях I и II берется соответственно 6 и 8, а для $\kappa=2,1$ берется 8 и 8.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Проведено численное исследование при малых γ ($\gamma \sim 0,01 \div 0,1$). Получено, что дисперсионная картина и распределение контактных напряжений практически не отличаются от соответствующих кривых для аналогичной задачи сплошного цилиндра, изготовленного из материала внешнего цилиндра для широкого диапазона частот $\kappa \in [0,5]$.

Авторы благодарят В. А. Бабешко за постановку задачи и обсуждение результатов.

ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԱՆՎԵՐՁ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԴԻՆԱՄԻԿ
ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ Ա. Հ., ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ Վ. Վ.

Ա մ ֆ ո ֆ ո ռ մ

Դիտարկվում է առաձգական երկշերտ օրթոտրոպ անվերջ գլանի մակերև-
վույթի վրա շտամպի տատանման կոնտակտային խնդիր: Ընդհանուր դեպքում
խնդիրը բերվում է կոնտակտային լարումների նկատմամբ առաջին սերի ին-
տեգրալ հավասարումների սխեմեի: Առաջարկվում է խնդրի լուծման մեթոդ:
Բերվում է թվային օրինակ:

A CONTACT DYNAMICAL PROBLEM FOR AN INFINITE
ORTHOTROPIC TWO-LAYERED CYLINDER

A. O. VATULIAN, V. V. HOVSEPIAN

S u m m a r y

A contact problem of vibration of the stamp on the surface of an
infinite orthotropic two-layered elastic cylinder is considered. In the ge-
neral case the problem is reduced to the system of the first type of
integral equations relative to the contact stresses. A method for the
solution of the problem is proposed. A numerical example has been
presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Берштейн П. Я. Динамическое кручение бесконечного цилиндра, заключенного в упругую полубесконечную обойму.—Гидроаэромех. и теор. упругости, Межвуз. науч. сб., 1976, вып. 20, с. 82—86.
2. Калинин В. В. Об одной динамической задаче для бесконечного цилиндра.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 555—559.
3. Дубинин В. В. Смешанная динамическая стационарная упругая задача для полого толстостенного цилиндра.—Изв. вузов. Машиностр., 1981, № 4, с. 5—10.
4. Ватульян А. О., Овсепян В. В. О некоторых динамических контактных задачах для полого ортотропного цилиндра.—Школа-семинар «Теория упругости и вязкоупругости»: Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1982, с. 81.
5. Ватульян А. О., Овсепян В. В., Пряхина О. Д. Контактная динамическая задача для ортотропного бесконечного цилиндра.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 4, с. 47—55.
6. Воронич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979, 320 с.
7. Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления.—ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 725—733.
8. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов.—УФМ, 1961, 74, вып. 2, с. 303—352, вып. 3, с. 461—520.

Ростовский госуниверситет

Поступила в редакцию
14.V. 1984