ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, №2, 1986 Механика

УДК 539.3:537.634

ОДНОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ГАСПАРЯН А. Е.

Нелинейные магнитоупругие волны исследовались в работах [1—4].

Здесь исследуется распространение одномерных нелинейных магнитоупругих волн в идеально проводящей среде. Введением малого параметра нелинейная задача приводится к системе нелинейных уравнений, которая имеет точное решение. Показывается, что влияние нелинейности возмущенного магнитного поля приводит к возникновению ударных магнитоупругих волн. Обнаружено, что чем больше величина вектора напряженности внешнего магнитного поля, тем слабее искажение профиля магнитоугругой волны.

Пусть идеально проводящая неограниченная среда находится во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности. Волновой процесс в этой среде будет описываться следующими уравнениями магнитоупругости [1—5]:

$$C_t^2\Delta U+(C_l^2-C_t^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,U+\frac{1}{4\pi\rho}(\mathrm{rot}\,H)\times H=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\mathrm{rot}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\times H\right) \tag{1}$$

Здесь C_t и C_l—скорости упругих поперечных и продольных волн, ρ—плотность среды, U—вектор смещения, H—возмущенное магнитное поле.

Предположено, что задача линейна относительно упругих перемещений и учитывается только нелинейность, связанная с возмущенным магнитным полем.

В дальнейшем рассматривается одномерная задача, то есть все искомые величины зависят только от координат x и t.

Представляя возмущенное магнитное поле в виде [5]

$$H=H_0+h \qquad (H_0=\mathrm{const})$$

и предполагая, что внешнее постоянное магнитное поле перпендикулярно к направлению распространения одномерной магнитоупругой волны $(H_0=H_0\hat{k})$, из системы нелинейных уравнений (1) получим:

$$C_l^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}-\frac{1}{4\pi\rho}\left(h_2\frac{\partial h_2}{\partial x}+h_3\frac{\partial h_3}{\partial x}+H_0\frac{\partial h_3}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(h_2\frac{\partial U_1}{\partial t}\right),\quad \frac{\partial h_3}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(h_3\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)-H_0\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial t}\tag{2}$$

Внешнее магнитное поле и учет нелинейности возмущенного магнитного поля не влияют на распространение поперечных упругих волн.

Таким образом, имеем систему нелинейных уравнений (2), откуда должны определить неизвестные функции U_1, h_2 и h_3.

В безразмерном виде введением обозначений

$$x^*=\frac{x}{x_0},\quad t^*=\frac{t}{t_0},\quad \frac{x_0}{t_0C_l}=1,\quad h_2^*=\frac{h_2}{H_0},\quad h_3^*=\frac{h_3}{H_0},\quad R_H=\frac{V_A^2}{C_l^2}$$

$$V_A^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho},\quad V_1^*=\frac{1}{C_l}V_1,\quad V_1=\frac{\partial U_1}{\partial t},\quad W_1^*=W_1=\frac{\partial U_1}{\partial x}$$

систему нелинейных уравнений (2) приведем к виду (где индекс * опущен)

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}-R_H\left(h_2\frac{\partial h_2}{\partial x}+h_3\frac{\partial h_3}{\partial x}+\frac{\partial h_3}{\partial x}\right)=\frac{\partial V_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(h_2V_1),\quad \frac{\partial h_3}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(h_3V_1)-\frac{\partial V_1}{\partial x},\quad \frac{\partial V_1}{\partial x}=\frac{\partial W_1}{\partial t}\tag{3}$$

Представляя решение линеаризованной системы уравнений (3) в виде плоской монохроматической волны $A\exp\{i(kx-\omega t)\}$, для определения фазовой скорости $V_p=\omega/k$ получим соотношения

$$V_p=\pm\sqrt{1+R_H}$$

Введением преобразования координат [2, 3]

$$\xi=\varepsilon(x-V_pt),\quad \tau=\varepsilon^2 t$$

где $\varepsilon=0(k)$ — малый безразмерный параметр, решение приведенной нелинейной системы представляется в виде разложения по малому параметру ε [1, 3, 6] при условии, что решение системы в нулевом приближении совпало с решением линейной задачи. В таком случае искомая нелинейная задача приводится в первом приближении к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial V_{11}}{\partial\tau}+R_Hh_{31}\frac{\partial h_{31}}{\partial\xi}=0,\quad \frac{\partial h_{31}}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\xi}(V_{11}h_{31})=0\tag{4}$$

Можно проверить, что система нелинейных уравнений (4) допускает решения следующего типа:

$$h_{31}=\sqrt{\frac{2}{R_H}}V_{11},\quad \frac{\partial V_{11}}{\partial\tau}+\frac{\partial V_{11}^2}{\partial\xi}=0\tag{5}$$

или

$$V_{11}=\sqrt{\frac{R_H}{2}}h_{31},\quad \frac{\partial h_{31}}{\partial\tau}+\sqrt{\frac{R_H}{2}}\frac{\partial h_{31}^2}{\partial\xi}=0\tag{6}$$

Нелинейные уравнения (5) и (6) устанавливают, что сигналы, несущие значения V_{11} и h_{31}, перемещаются, соответственно, со скоростью $2V_{11}$ и $\sqrt{2R_H}\,h_{31}$.

Здесь будем исследовать решения уравнения (5), а решение уравнения (6) получится аналогичным образом.

Нелинейное уравнение первого порядка (5) имеет точное решение, которое имеет следующий вид (в неявном виде) [7, 8]:

$$V_{11}=f(\xi-2V_{11}\tau), \quad V_{11}=V_{11}(\xi, \tau) \tag{7}$$

где f—произвольная функция и определяется начальным условием $V_{11}(\xi, 0)=f(\xi)$ (при $\tau=0$).

Таким образом, если в начальный момент времени задана форма волны, то ее искажение вследствие нелинейных эффектов в последующие моменты времени описывается выражением (7). Многозначность решения (7) устраняется введением разрывов, то есть ударных волн, которые сохраняют площадь под кривой в соответствии с формулой (9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_{11}(\xi, \tau)\,d\xi=\text{const} \tag{8}$$

Формула (8) дает закон сохранения, полученный для возмущений, исчезающих достаточно быстро при $|\xi|\to\infty$, которая получается из уравнения (5) интегрированием по всем значениям ξ.

Теперь возвращаясь к прежним безразмерным параметрам, из решения (7) получим

$$\widetilde{U}(x, t)=\Phi\{x-[\sqrt{1+R_H}+2\widetilde{U}(x, t)]t\} \tag{9}$$

где

$$\widetilde{U}(x, t)=\frac{1}{C_l}\frac{\partial U_1}{\partial t}$$

Для решения уравнения (6) получим

$$h_{31}(x, t)=\psi\{x-[\sqrt{1+R_H}+\sqrt{2R_H}\,h_{31}(x, t)]t\} \tag{10}$$

Выражения (9) и (10) показывают, что относительно неподвижной системы координат возмущение среды и возмущение магнитного поля в среде движутся, соответственно, со скоростями

$$u_1(x, t)=\sqrt{1+R_H}+2\widetilde{U}(x, t) \tag{11}$$

$$\bar{h}_3(x, t)=\sqrt{1+R_H}+\sqrt{2R_H}\,h_{31}(x, t) \tag{12}$$

Формула (11) показывает, что скорость перемещения точек профиля одномерной магнитоупругой волны неодинакова.

Исследования решения (9), аналогично исследованию работы [10], в частности, при $x=0$, $\widetilde{U}(x, t)=\widetilde{U}_0\sin\omega t$, показывают, что искажения профиля магнитоупругой волны тем сильнее, чем больше параметр $\chi_0=U_0(1+R_H)^{-1/2}$. Поэтому χ_0 (которое зависит от напряженности внешнего магнитного поля) может служить мерой нелинейности магнитоупругого волнового процесса. При известном $\widetilde{U}_0$ можно сказать, что чем больше напряженность внешнего магнитного поля, тем слабее искажение профиля магнитоупругой волны.

При распространении одномерных нелинейных магнитоупругих волн возникает ударная волна, профиль которой описывается уравнениями

$$x-[\sqrt{1+R_H}+2\widetilde{U}(x,\, t)]t=\text{const}$$

$$x-[\sqrt{1+R_H}+\sqrt{2R_H}\,h_{31}(x,\, t)]t=\text{const}$$

Расстояние, откуда начинается возникновение ударной магнитоупругой волны для решения (9), определяется следующей формулой:

$$\widetilde{x}=\frac{1+R_H}{2\omega U_0}=\frac{\lambda}{4\pi}\chi^{-1} \tag{13}$$

где

$$\chi=\frac{\widetilde{U}(x,\, \eta)}{\sqrt{1+R_H}}, \quad \eta=t-\frac{x}{\sqrt{1+R_H}}$$

Отсюда следует, что на длине $\widetilde{x}$ укладывается $(2\pi\chi)^{-1}$ длин волн. Амплитуда разрыва определяется из формулы

$$\frac{\widetilde{U}_p(\theta)}{\widetilde{U}_0}=\pi[1+\theta(x)]^{-1}, \quad \theta(x)=\frac{2\omega\widetilde{U}_0}{\sqrt{1+R_H}}x$$

Аналогично формулам (13) и (14) можно искать и формулы для решения (10)

$$\widetilde{x}=\frac{1+R_H}{\sqrt{2R_H}\,\omega\widetilde{h}_0}=\frac{\lambda}{\sqrt{8R_H}\,\pi}\chi^{-1}, \quad \chi=\frac{\widetilde{h}_0(x,\, \eta)}{\sqrt{1+R_H}}$$

$$\frac{\widetilde{h}_p(\theta)}{\widetilde{h}_0}=\pi[1+\theta(x)]^{-1}, \quad \theta(x)=\frac{\sqrt{2R_H}\,\omega h_0}{1+R_H}x$$

ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՄԻԱՉԱՓ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ

Հ. Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է միաչափ ոչ գծային մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը իդեալական հաղորդիչ տարածությունում լայնական մագնիսական դաշտի հաշվառումով։ Ցույց է տրվում, որ միայն դրգռված մագնիսական դաշտի ոչ գծայնության հաշվառումը բերում է հարվածային ալիքների առաջացման։ Ստացվել է, որ ինչքան մեծ է մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորը, այնքան ավելի թույլ է մագնիսաառաձգական ալիքի ճակատի աղավաղումը։

ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR MAGNETOELASTIC WAVES IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

A. E. GASPARIAN

S u m m a r y

In the paper the motion of one-dimensional nonlinear magnetoelastic waves of a perfect conducting medium in a transverse magnetic field is considered.

It has been shown that the nonlinearity of a perturbation magnetic field brings to the rise magnetoelastic shock waves.

It has been revealed that the more the value of the external magnetic field strength vector the less is the shape distortion of the magnetoelastic wave.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поспелов Л. А.* Нелинейные магнитоупругие волны.—ПММ, 1963, вып. 5, с. 939—941.
2. *Donato A.* The Burger's Eguation in Magnetothermo-elastisity with one-dimensional Deformation.—ZAMP, 27, 2, p. 281—284.
3. *Гаспарян А. Е.* Об одной задаче распространения магнитоупругой нелинейной волны.—Уч. записки ЕГУ, Ереван, 1983, № 3, с. 42—46.
4. *Селезов И. Т., Петров В. Н.* Решение задачи о неустановившихся волнах в электропроводящем упругом полупространстве.—В кн.: Численно-аналитические методы решения задач теплопроводности и электродинамики (Ин-т математики АН УССР).—Киев: Изд-во Наукова думка, 1979, с. 155—158.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.:Наука, 1977. 272 с.
6. *Найфе А.* Методы возмущения. М.: Мир, 1976. 546 с.
7. *Курант Г., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны М.: ИЛ, 1960. 426 с.
8. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.
9. Нелинейные волны, под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Изд-во Мир, 1977. 320 с.
10. *Руденко О. В.,Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
6.XII.1984