

УДК 539.3.01:533.6.013.422

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К ЗАДАЧЕ  
О ФЛАТТЕРЕ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ЖИНЖЕР Н. И., КАДАРМЕТОВ И. М.

Асимптотический метод [1] нашел широкое применение в задачах о собственных колебаниях и устойчивости при потенциальных внешних силах пластин и оболочек, а также в задачах динамики при широкополосных внешних воздействиях. В [2] метод применен к задаче о флаттере пластин. В данной работе асимптотический метод применяется к задаче о сверхзвуковом флаттере ортотропной цилиндрической оболочки. Показана вычислительная устойчивость уравнения стыковки и приведены результаты параметрического исследования задачи.

1. Отнесем срединную поверхность цилиндрической оболочки радиуса  $R$ , длины  $L$  и толщины  $h$  к системе координат  $x_1x_2$ , совпадающей с линиями главных кривизн. Будем считать, что главные направления упругости ортотропного материала оболочки совпадают с координатными линиями. В направлении, противоположном  $x_1$ , оболочка обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью  $V$ . Предположим, что давление внутри оболочки равно давлению в невозмущенном потоке газа. Избыточное аэродинамическое давление на колеблющуюся оболочку будем учитывать по линейному приближению поршневой теории с поправкой Крумхаара на кривизну срединной поверхности. В случаях, когда применение этой теории требует дополнительного обоснования, рассматриваемую задачу следует трактовать как модельную. Ставится задача об исследовании устойчивости невозмущенной формы равновесия оболочки. Эта задача должна формулироваться как задача с начальными данными. Для упругих систем с дискретным спектром собственных частот, как известно [3], достаточно исследовать элементарные движения оболочки в окрестности невозмущенной формы

$$\sum_{m=1}^3 L_{jm} \left( u_m + \gamma \frac{\partial u_m}{\partial t} \right) - (1 - d_1 \gamma_1^2) \left[ \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \delta_p \left( \gamma \frac{\partial u_3}{\partial t} - \beta \frac{\partial u_3}{\partial x} + \alpha_R u_3 \right) \right] = 0$$

$$(j=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Здесь  $u_j(x, \theta, t)$  — компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности и введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$x = \frac{x_1}{R}, \quad \theta = \frac{x_2}{R}, \quad \bar{t} = \Omega_0 t, \quad \beta = \frac{x p_\infty R V}{c_\infty E_1 h}, \quad \alpha_R = \frac{x p_\infty R}{2 E_1 h}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{x p_\infty R}{c_\infty h} (\rho E_1)^{-1/2}, \quad \gamma = \varepsilon + \varepsilon_0, \quad l = \frac{L}{R}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$$

$\eta, \varepsilon, \varepsilon_0$  — безразмерные параметры внутреннего, внешнего и аэродинамического демпфирования соответственно,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $\kappa$  — показатель политропы,  $p_\infty, c_\infty$  — давление и скорость звука в невозмущенном потоке. Дифференциальные операторы  $L_{lm}$  имеют вид [4]

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_3 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (\nu_1 d_1 + d_3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{13} = -L_{31} = \nu_1 d_1 \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{22} = d_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \mu^4 \left( 4d_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

$$L_{23} = -L_{32} = d_1 \frac{\partial}{\partial \theta} - \mu^4 \left[ (\nu_1 d_1 + 4d_3) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + d_1 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right]$$

$$L_{33} = -d_1 - \mu^4 \left[ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(\nu_1 d_1 + 2d_3) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + d_1 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right]$$

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12 R^2}, \quad d_1 = \frac{E_2}{E_1}, \quad d_2 = \frac{G}{E_1}, \quad d_3 = d_2 (1 - \nu_1^2)$$

$E_1, E_2, G, \nu_1$  ( $\nu_2 = E_2 \nu_1 / E_1$ ) — упругие постоянные материала оболочки.

Систему уравнений (1.1) необходимо дополнить краевыми условиями. Рассмотрим, например, случай жесткого защемления круговых кромок оболочки

$$u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (x=0, x=l) \quad (1.2)$$

Параметр скорости флаттера  $\beta_*$  оболочки является наименьшим из тех значений  $\beta$ , для которых задача (1.1), (1.2) имеет решения, соответствующие колебаниям с вещественной частотой.

Использование схемы точного решения задачи (1.1), (1.2) приводит, как известно, к исследованию определителя восьмого порядка с комплексными элементами и содержащего экспоненты с отрицательными и положительными действительными частями, соответствующие частным решениям по пространственной переменной. При значительных удлинениях  $l \gg 5$  вычисление определителя становится численно неустойчивым процессом и даже может привести к исчезновению порядков или переполнению разрядной сетки. Стабилизировать процесс вычислений определителя нормировкой строк или столбцов принципиально невозможно. При таких удлинениях или существенном демпфировании колебаний задача эффективно решается с использованием концепции динамического краевого эффекта [1] и асимптотического метода, на ней основанного.

Порождающее решение системы (1.1) примем в виде

$$\begin{aligned}
 u_1^0 &= [C_1 \chi_1(i k_1) \exp(i(k_1 x - \omega t)) + C_2 \chi_2(i k_2) \exp(i(k_2 x - \omega t))] \cos n\theta \\
 u_2^0 &= [C_1 \psi_1(i k_1) \exp(i(k_1 x - \omega t)) + C_2 \psi_2(i k_2) \exp(i(k_2 x - \omega t))] \sin n\theta \\
 u_3^0 &= [C_1 \exp(i(k_1 x - \omega t)) + C_2 \exp(i(k_2 x - \omega t))] \cos n\theta
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\chi_\alpha(i k_\alpha) = D_1(i k_\alpha) / D(i k_\alpha), \quad \psi_\alpha(i k_\alpha) = D_2(i k_\alpha) / D(i k_\alpha)$$

$$\operatorname{Im} \omega = 0, \quad \operatorname{Re} k_\alpha < 0, \quad \operatorname{Im} k_\alpha > 0$$

$$D = \left[ k_\alpha^2 + \frac{(1 - d_1 \nu_1^2) \omega^2}{1 - i \gamma \omega} + d_3 n^2 \right] \left[ d_3 (1 + 4 \mu^4) k_\alpha^2 + d_1 (1 + \mu^4) n^2 + \right. \\
 \left. + \frac{(1 - d_1 \nu_1^2) \omega^2}{1 - i \gamma \omega} \right] - (\nu_1 d_1 + d_3)^2 n^2 k_\alpha^2$$

$$D_1 = d_1 \nu_1 i k_\alpha \left[ d_3 (1 + 4 \mu^4) k_\alpha^2 + d_1 n^2 (1 + \mu^4) + \frac{(1 - d_1 \nu_1^2) \omega^2}{1 - i \gamma \omega} \right] - \\
 - (\nu_1 d_1 + d_3) n i k_\alpha [k_\alpha^2 n \mu^4 (\nu_1 d_1 + 4 d_3) + n (d_1 + \mu^4 n^2 d_1)]$$

$$D_2 = \left[ k_\alpha^2 + \frac{(1 - d_1 \nu_1^2) \omega^2}{1 - i \gamma \omega} + n^2 d_3 \right] [k_\alpha^2 n \mu^4 (\nu_1 d_1 + 4 d_3) + n (d_1 + \mu^4 n^2 d_1)]$$

$$(\alpha = 1, 2; n = 1, 2, \dots)$$

Решение (1.3) представляет собой суперпозицию двух волн с неизвестными волновыми числами  $k_\alpha$  и частотой  $\omega$ , распространяющихся в направлении потока и амплитуды которых экспоненциально убывают с возрастанием  $x$ . Это решение будет удовлетворять системе (1.1), если волновые числа удовлетворяют уравнению

$$\sum_{m=0}^8 p_m (i k_\alpha)^{2-m} = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.4)$$

Явные выражения для коэффициентов  $p_m$  здесь не приводим.

2. В соответствии с основной идеей асимптотического метода [1] порождающее решение (1.3) должно быть скорректировано у каждой из кромок решениями типа динамического краевого эффекта. Скорректированные решения должны удовлетворять граничным условиям и при удалении от кромок во внутреннюю область срединной поверхности должны стремиться к порождающему решению. Будем искать решения системы (1.1) в окрестности кромок в виде

$$u_j(x, \theta, t) = U_j(x) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

После подстановки решения (2.1) в (1.1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $U_j(x)$ . Частными решениями этой системы являются  $\{\chi_m(r_m) \exp(r_m x), \psi_m(r_m) \exp(r_m x), \exp(r_m x)\}$  ( $m = 1, 2, \dots, 8$ ), где  $r_m$  — корни характеристического уравнения

$$\sum_{m=0}^6 p_m r^{6-m} = 0 \quad (2.2)$$

Это уравнение, как следует из (1.4), имеет два корня  $r_1 = ik_1$ ,  $r_2 = ik_2$ , соответствующие порождающему решению (1.3). Поэтому полином левой части (2.2) должен нацело делиться на квадратный трехчлен  $r^2 - i(k_1 + k_2)r - k_1 k_2$ . Условие обращения в нуль остатка от деления дает два уравнения

$$F_1(k_1, k_2, \omega, \beta) \equiv p_7 + i(k_1 + k_2)q_6 + k_1 k_2 q_5 = 0 \quad (2.3)$$

$$F_2(k_1, k_2, \omega, \beta) \equiv p_8 + k_1 k_2 q_6 = 0 \quad (2.4)$$

Здесь зависимость от других параметров задачи явно не подчеркивается. Приравняв нулю частное, получим уравнение

$$\sum_{m=0}^6 q_m r^{6-m} = 0 \quad (2.5)$$

$$q_0 = p_0, \quad q_1 = i(k_1 + k_2)p_0$$

$$q_m = p_m + i(k_1 + k_2)q_{m-1} + k_1 k_2 q_{m-2} \quad (m = 2, 3, \dots, 6) \quad (2.6)$$

корни которого соответствуют решениям типа динамического краевого эффекта. При однородных граничных условиях динамический краевой эффект будет невырожденным, если три корня уравнения (2.5) расположены левее корней  $ik_2$ , а три корня лежат в правой полуплоскости. Установим невырождение динамических краевых эффектов для состояний, соответствующих неосесимметричному флаттеру ( $\omega \neq 0$ ,  $n \geq 1$ ). Малый параметр  $\mu^4 = h^2/(12R^2)$  входит в качестве множителя в коэффициент  $p_0$ , а следовательно, и в  $q_0$ . Выясним асимптотику при  $\mu \rightarrow 0$  корней уравнения (2.5). Для этого умножим обе части этого уравнения на  $\mu^2$  и выполним замену переменной  $r = z\mu^{-1}$ . Величина  $\beta$  имеет порядок, не меньший, чем  $\beta = O(\mu^{1+\epsilon_1})$ ,  $\epsilon_1 > 0$ . Тогда уравнение нулевого приближения относительно  $z$  имеет двукратный нулевой корень и четыре ненулевых. Последним соответствует следующее уравнение относительно  $r$ :

$$d_3 \left[ \mu^4 r^4 + d_1(1 - d_1 v_1^2) - (1 - d_1 v_1^2) \frac{i\gamma(\omega - \alpha_R + \omega^2)}{1 - i\gamma\omega} \right] = 0 \quad (2.7)$$

Корни этого уравнения близки к так называемым „большим корням“ в задачах статики оболочек, если параметр частоты флаттера  $\omega$  мал. Обозначим через  $r_3, r_4$  корни уравнения (2.7), лежащие в левой полуплоскости, а через  $r_7, r_8$  — в правой. Асимптотику при  $\mu \rightarrow 0$  других корней уравнения (2.5) можно получить из соотношения

$$(d_3 \mu^4 r^4 + q_4)(r^2 + a_1 r + a_2) \equiv q_0 r^6 + \dots + q_5 r + q_6$$

Приравняв коэффициенты в обеих частях при одинаковых степенях  $r$ , найдем с точностью до  $O(\mu^4)$  выражения для  $a_1$  и  $a_2$ . Окончательное суждение о невырождении динамического краевого эффекта связано с расположением корней уравнения

$$r^2 + i(k_1 + k_2)r - n^2 \left[ 2\nu_1 d_1 + 4d_3 + \frac{d_1}{d_3} + d_3 - \left( \nu_1 \frac{d_1}{d_3} + 1 \right)^2 d_3 \right] + \frac{1+d_3}{d_2} \frac{\omega^2}{1-i\gamma\omega} - k_1^2 - k_2^2 - k_1 k_2 = 0. \quad (2.8)$$

Пусть  $r_5$  — корень уравнения (2.8), расположенный в левой полуплоскости, а  $r_2$  — в правой.

3. Рассмотрим кромку  $x=0$  и построим скорректированное решение у этой кромки в виде

$$\begin{aligned} u_1(x|0; \theta, t) &= [C_1 \chi_1(ik_1) \exp(ik_1 x) + C_2 \chi_2(ik_2) \exp(ik_2 x) + \\ &+ \sum_{m=3}^5 C_m \chi_m(r_m) \exp(r_m x)] \exp(-i\omega t) \cos n\theta \\ u_2(x|0; \theta, t) &= [C_1 \psi_1(ik_1) \exp(ik_1 x) + C_2 \psi_2(ik_2) \exp(ik_2 x) + \\ &+ \sum_{m=3}^5 C_m \psi_m(r_m) \exp(r_m x)] \exp(-i\omega t) \sin n\theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$u_3(x|0; \theta, t) = [C_1 \exp(ik_1 x) + C_2 \exp(ik_2 x) + \sum_{m=3}^5 C_m \exp(r_m x)] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

где  $\text{Re} r_m < 0$  ( $m=3, 4, 5$ ). Удовлетворяя граничным условиям (1.2), получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_2 + C_3 + C_4 + C_5 &= -C_1 \\ ik_2 C_2 + r_3 C_3 + r_4 C_4 + r_5 C_5 &= -ik_1 C_1 \\ \chi_2 C_2 + \chi_3 C_3 + \chi_4 C_4 + \chi_5 C_5 &= -\chi_1 C_1 \\ \psi_2 C_2 + \psi_3 C_3 + \psi_4 C_4 + \psi_5 C_5 &= -\psi_1 C_1 \end{aligned}$$

Из этой системы находим

$$C_2 = \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} C_1, \quad C_3 = \frac{\Delta_3^{(0)}}{\Delta^{(0)}} C_1, \quad \dots, \quad C_5 = \frac{\Delta_5^{(0)}}{\Delta^{(0)}} C_1 \quad (3.2)$$

$$\Delta^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ \chi_2 & \chi_3 & \chi_4 & \chi_5 \\ \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(0)} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_1 & r_3 & r_4 & r_5 \\ \chi_1 & \chi_3 & \chi_4 & \chi_5 \\ \psi_1 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (3.3)$$

Тогда выражения (3.1) принимают вид

$$\begin{aligned} u_1(x|0; \theta, t) &= C_1 \left[ \chi_1 \exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \chi_2 \exp(ik_2 x) + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=3}^5 \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \chi_m \exp(r_m x) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta \\ u_2(x|0; \theta, t) &= C_1 \left[ \psi_1 \exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \psi_2 \exp(ik_2 x) + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=3}^5 \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \psi_m \exp(r_m x) \right] \exp(-i\omega t) \sin n\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$u_3(x|0; \theta, t) = C_1 \left[ \exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \exp(ik_2 x) + \sum_{m=3}^5 \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \exp(r_m x) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

Итак, скорректированное решение у кромки  $x=0$  удовлетворяет граничным условиям и стремится к порождающему решению (3.1) при  $x \rightarrow \infty$ . Таким же путем построенное решение у кромки  $x=l$  будет иметь вид

$$u_1(x|l; \theta, t) = C_1 \left[ \gamma_1 \exp(ik_1 x) + \gamma_2 \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) \exp(ik_2 x) + \sum_{m=6}^8 \frac{\Delta_m^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \gamma_m \exp(r_m(x-l)) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

$$u_2(x|l; \theta, t) = C_1 \left[ \psi_1 \exp(ik_1 x) + \psi_2 \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) \exp(ik_2 x) + \sum_{m=6}^8 \frac{\Delta_m^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \psi_m \exp(r_m(x-l)) \right] \exp(-i\omega t) \sin n\theta \quad (3.5)$$

$$u_3(x|l; \theta, t) = C_1 \left[ \exp(ik_1 x) + \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) \exp(ik_2 x) + \sum_{m=6}^8 \frac{\Delta_m^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(r_m(x-l)) \right] \exp(-i\omega t) \cos n\theta$$

$$\Delta^{(l)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_2 & r_6 & r_7 & r_8 \\ \gamma_2 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 \\ \psi_2 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(l)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_1 & r_6 & r_7 & r_8 \\ \gamma_1 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 \\ \psi_1 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 \end{vmatrix}, \dots \quad (3.6)$$

Решения (3.4) и (3.5), построенные у противоположных кромок, «стыкуем» во внутренней области. Для этого приравняем одноименные компоненты решений с точностью до слагаемых, соответствующих динамическим краевым эффектам. В результате получаем уравнение стыковки

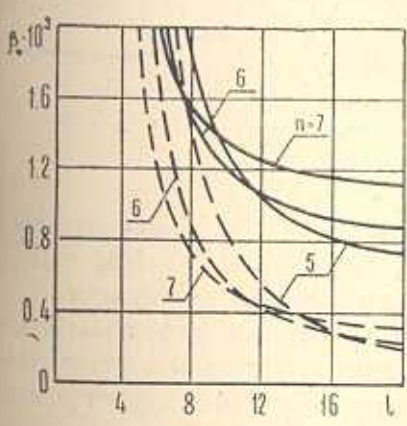
$$F_3(k_1, k_2, \omega, \beta) \equiv \frac{\Delta_2^{(0)}}{\Delta^{(0)}} - \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \exp(i(k_1 - k_2)l) = 0 \quad (3.7)$$

Стыковка производных любого порядка  $\partial u_j^n / \partial x^m$  от компонент скорректированных решений приводит к тому же уравнению. Определители в (3.7) имеют вид (3.3) и (3.6). Их элементы не содержат экспонент. Кроме того, относительная длина оболочки  $l$  входит только в показатель экспоненциального множителя в уравнении (3.7). И умножается она на разность волновых чисел порождающего решения. Для других типов закрепления кромок оболочки определители (3.3) и (3.6) будут содержать другие степени корней. Для отыскания неизвестных параметров скорости  $\beta_*$ , частоты  $\omega_*$  флаттера и комплексных волновых чисел  $k_1, k_2$  получена система трех уравнений (2.3), (2.4) и (3.7), рав-

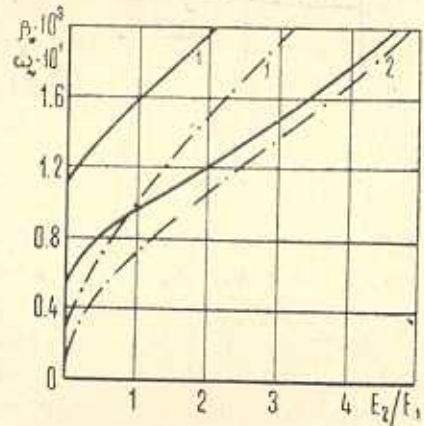
носившая система шести вещественных уравнений. При этом из уравнений (2.7) и (2.8) имеем явные выражения для корней  $\tau_m$  ( $m = 3, 4, \dots, 8$ ).

Отметим еще следующий факт. Левая часть уравнения (3.7) имеет предел при  $l \rightarrow \infty$ , только если  $ik_1 = ik_2$ . В этом случае значение предела левой части равно нулю и (3.7) превращается в тождество. Поэтому критические значения параметров скорости и частоты флаттера для полубесконечной оболочки при наличии задней кромки определяются из условия существования кратных корней уравнения (2.2). Подобный вывод справедлив и для пластин [2].

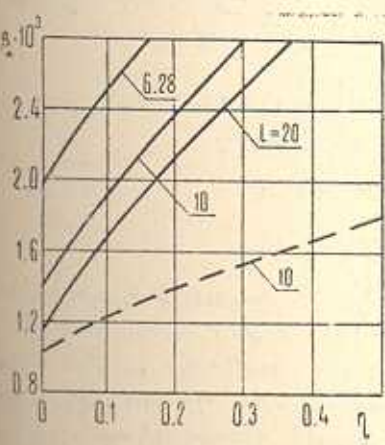
4. Ниже приводятся результаты вычислений для заземленной оболочки с параметрами  $R/h = 150$ ,  $\nu_1 = 0,3$ ,  $\chi p_0 / E_1 = 0,82 \cdot 10^{-6}$  и  $\gamma = 1,8 \cdot 10^{-3}$ . При этом корни характеристического уравнения (2.2) находились численным методом, а параметры скорости  $\beta_*$  и частоты  $\omega_*$  флаттера получались из уравнения стыковки (3.7), равносильного двум вещественным уравнениям. Искомые параметры должны доставлять нулевой минимум абсолютной величине левой части (3.7). Минимизация осуществлялась численным методом Нелдера-Мида.



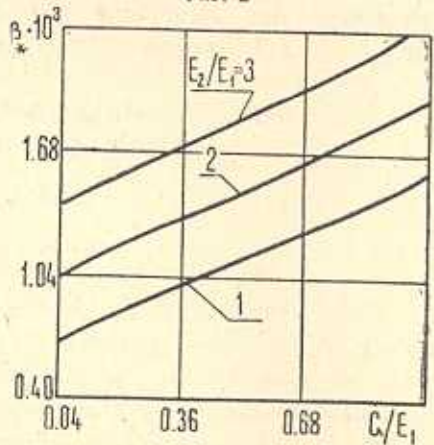
Фиг. 1



Фиг. 2

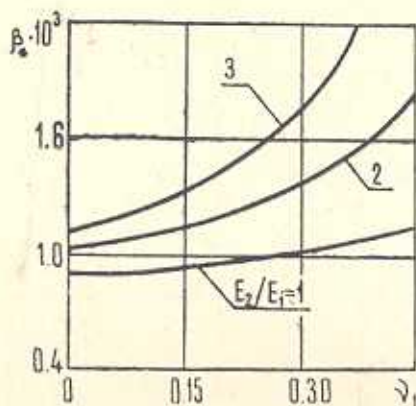


Фиг. 3

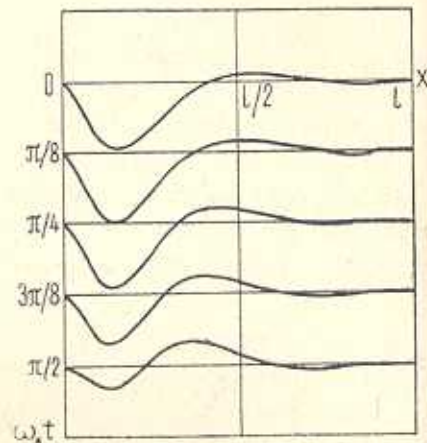


Фиг. 4

На фиг. 1 показаны зависимости параметра скорости флаттера от длины оболочки  $l$  для различных значений  $n$  числа волн в окружном направлении ( $\eta=0$ ,  $G/E_1=0,38$ ). Сплошные линии соответствуют  $E_2/E_1=2$ , штриховые —  $E_2/E_1=0,02$ . С увеличением длины оболочки уменьшается число волн в окружном направлении, соответствующих границе области флаттера. На фиг. 2 представлено влияние параметра  $E_2/E_1$  на величины  $\beta_*$  (сплошные линии) и  $\omega_*$  (штрих-пунктирные линии). Кривые 1 отвечают случаю  $n=7$ ,  $l=6,28$ , кривые 2 —  $n=6$ ,  $l=10$  ( $G/E_1=0,38$ ). Влияние параметра внутреннего демпфирования



Фиг. 5



Фиг. 6

$\eta$  на величину параметра скорости флаттера при различных значениях  $l$  показано на фиг. 3 для  $n=7$ ,  $E_2/E_1=2$ ,  $G/E_1=0,38$ . Штриховая кривая соответствует изотропной оболочке. Зависимости  $\beta_*$  от параметров  $G/E_1$  и  $\gamma_1$  при различных значениях  $E_2/E_1$  показаны на фиг. 4 и 5 ( $l=10$ ,  $n=7$ ,  $\eta=0$ ). На фиг. 6 показаны сечения плоскостью  $\theta=0$  „формы“ движения оболочки на границе области устойчивости для нормального прогиба  $u_3(x, \theta, t) = \text{Re}\{U_3(x)\exp(-i\omega t)\}\cos n\theta$  при различных значениях  $\omega_* t$  при  $l=10$ ,  $\eta=0,26$ ,  $n=7$ ,  $E_2/E_1=2$ ,  $G/E_1=0,38$ . Движение имеет характер бегущей волны.

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳՎԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՅԱՏՏԵՐԻ ԽՆԴՐՈՒՄ  
ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱԹՈՒՄԸ

Կ. Բ. ԺԻԾԵՐ, Ի. Մ. ԿԱԳԱՐՄԵՏՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ասիմպտոտիկ մեթոդի հիման վրա տրվում է շրջանային դաշնային թաղանթի գերձայնային ֆլատերի խնդրի լուծումը: Յուրջ է տրվում մեծ երկարությամբ թաղանթների դեպքում կցման հավասարումների հաշվելի կայունությունը: Հետադրուված է ֆլատերի արագությունը և հաճախականության վրա նյութի անիզոտրոպիայի պարամետրերի և ներքին դեֆորմացիայի ազդեցությունը:



# AN ASYMPTOTIC METHOD APPLIED TO FLUTTER OF AN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

N. I. ZHINZHER, I. M. KADARMETOV

## S u m m a r y

In the paper the solution of supersonic flutter problems of a circular cylindrical shell is given on the basis of Bolotin's dynamic edge effect method. The influence of anisotropic parameters, internal damping and length of the shell on the value of velocity and frequency of the flutter has been investigated.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек.—ПММ, 1960, т. 24, № 5.
2. Жинжер Н. И. Динамические краевые эффекты при аэроупругих колебаниях пластин. В кн.: V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике, Алма-Ата, 1981. Аннот. докладов.—Алма-Ата: Наука, 1981.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
28.III.1983