

УДК 539.383

ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА В ПРЕДНАПРЯЖЕННЫЙ
 ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ

ПОРОШИН В. С.

Рассматривается несжимаемая упругая среда, когда взаимно однозначная связь между напряжениями и деформациями имеет нелинейный характер [1]. Ставится контактная задача для физически нелинейного упругого слоя, преднапряженного сжимающими (растягивающими) равномерно распределенными на бесконечности усилиями p_1 и p_2 , направленными параллельно границе слоя. Проанализировано влияние преднапряжения на основные характеристики контактной задачи, когда величины p_1 и p_2 мало отличаются одна от другой.

1. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, начало которой расположим на верхней грани слоя конечной толщины h , а ось z направим вниз. Допустим, что слой, лежащий без трения на жестком основании, нагружен равномерно распределенными на бесконечности сжимающими (растягивающими) усилиями $\sigma_x^0 = -p_1$ и $\sigma_y^0 = -p_2$. Затем в слой P вдавливается абсолютно жесткий штамп. Будем считать, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, определяемого соотношениями

$$\begin{aligned} u^0 &= A_1^0 x, & v^0 &= A_2^0 y, & w^0 &= -(A_1 + A_2)z \\ \sigma_x^0 &= -p_1, & \sigma_y^0 &= -p_2, & \sigma_z^0 &= \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Связь между постоянными A_1^0 , A_2^0 и p_1 , p_2 может быть найдена из уравнений нелинейно упругого тела [1], которые представим в форме (массовые силы отсутствуют)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \psi(\sigma_x - \sigma), & \epsilon_y &= \psi(\sigma_y - \sigma), & \epsilon_z &= \psi(\sigma_z - \sigma) \\ \gamma_{xy} &= 2\psi\tau_{xy}, & \gamma_{xz} &= 2\psi\tau_{xz}, & \gamma_{yz} &= 2\psi\tau_{yz}, & \epsilon = 0 \\ \epsilon &= 1/3(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z), & \sigma &= 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), & \psi &= \psi(\tau) \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \\ \partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z &= 0, \dots \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

а именно: $A_1^0 = 1/3 \psi(\tau_0) (p_2 - 2p_1)$, $A_2^0 = 1/3 \psi(\tau_0) (p_1 - 2p_2)$, где $\tau_0 = [1/3(p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2)]^{1/2}$.

Отметим, что предположение о несжимаемости материала слоя неприципиально и принято в целях упрощения выкладок.

Обозначая малые возмущения напряжений, деформаций и перемещений через $\sigma_x^*, \dots; \varepsilon_x^*, \dots; u^*, v^*, w^*$ и разыскивая решение уравнений (1.2) в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^*, \dots; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \varepsilon_x^*, \dots \\ u &= u^0 + u^*, \quad v = v^0 + v^*, \quad w = w^0 + w^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

в результате линеаризации указанных уравнений относительно возмущений, будем иметь [2]

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \frac{6lD^2 + m(A^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_x^* - \frac{mAB}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_y^* - \frac{mBC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_z^* + \sigma^* \\ \sigma_y^* &= -\frac{mAB}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_x^* + \frac{6lD^2 + m(B^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_y^* - \frac{mAC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_z^* + \sigma^* \\ \sigma_z^* &= -\frac{mBC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_x^* - \frac{mAC}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_y^* + \frac{6lD^2 + m(A^2 + B^2)}{6l(l+m)D^2} \varepsilon_z^* + \sigma^* \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy}^*/2l, \quad \tau_{xz}^* = \tau_{xz}^*/2l, \quad \tau_{yz}^* = \tau_{yz}^*/2l, \quad \varepsilon^* = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Сюда еще нужно добавить уравнения равновесия и уравнения связи между деформациями и перемещениями Коши, записанные со звездочками. В (1.4) обозначено

$$\begin{aligned} l &= \psi(\tau_0) > 0, \quad m = \tau_0 \psi'(\tau_0) \geq 0 \\ A &= p_1 - 2p_2, \quad B = p_2 - 2p_1, \quad C = p_1 + p_2, \quad D^2 = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в уравнения равновесия и затем выражая деформации через перемещения, получим аналог уравнений Ламе

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + x_0 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) + x_2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y} + x_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} &= 0 \\ x_0 \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} \right) + x_4 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + x_2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + x_5 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} &= 0 \\ x_0 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) + x_6 \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} + x_3 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z} + x_5 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial z} &= 0 \\ x_0 &= \frac{1}{2l}, \quad x_1 = \frac{6lD^2 + m(A^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2}, \quad x_2 = \frac{3lD^2 + m(3D^2 - AB)}{6l(l+m)D^2} \\ x_3 &= \frac{3lD^2 + m(3D^2 - BC)}{6l(l+m)D^2}, \quad x_4 = \frac{6lD^2 + m(B^2 + C^2)}{6l(l+m)D^2} \\ x_5 &= \frac{3lD^2 + m(3D^2 - AC)}{6l(l+m)D^2}, \quad x_6 = \frac{6lD^2 + m(A^2 + B^2)}{6l(l+m)D^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Добавляя к (1.6) условие несжимаемости

$$\partial u^* / \partial x + \partial v^* / \partial y + \partial w^* / \partial z = 0 \quad (1.7)$$

будем иметь систему четырех уравнений для определения u^* , v^* , w^* и σ^* .

Решение системы уравнений (1.6), (1.7) для слоя в предположении затухания величин u^* , v^* , w^* и σ^* при $\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty$ ищем в форме двойных интегралов Фурье [3]

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ v^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ w^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ \sigma^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (1.8)$$

при этом относительно трансформант Фурье $U(\alpha, \beta; z)$, $V(\alpha, \beta; z)$, $W(\alpha, \beta; z)$ и $\Sigma(\alpha, \beta; z)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} x_0 U'_z - ix_3 \alpha W'_z - (x_1 \alpha^2 + x_0 \beta^2) U - x_2 \alpha \beta V - i\alpha \Sigma &= 0 \\ x_0 V'_z - ix_3 \beta W'_z - (x_0 \alpha^2 + x_4 \beta^2) V - x_2 \alpha \beta U - i\beta \Sigma &= 0 \\ x_0 W'_z - ix_3 \alpha U'_z - ix_3 \beta V'_z - x_0 \gamma^2 W + \Sigma'_z &= 0 \\ W'_z - iz U - i\beta V &= 0 \quad (\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Исследование уравнений (1.9) показывает, что система уравнений (1.6), (1.7) является системой эллиптического типа, а общее решение уравнений (1.9) имеет вид (черточка сверху означает комплексно-сопряженную величину)

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{E}_1 \text{sh} \gamma z + \mathcal{E}_2 \text{ch} \gamma z + \{A, a\} (\mathcal{E}_3 \text{sh} a z + \mathcal{E}_4 \text{ch} a z) + \{A, \bar{a}\} (\mathcal{E}_5 \text{sh} \bar{a} z + \mathcal{E}_6 \text{ch} \bar{a} z) \\ V &= -\frac{p_1 \alpha}{p_2 \beta} (\mathcal{E}_1 \text{sh} \gamma z + \mathcal{E}_2 \text{ch} \gamma z) + \{B, a\} (\mathcal{E}_3 \text{sh} a z + \mathcal{E}_4 \text{ch} a z) + \\ &\quad + \{B, \bar{a}\} (\mathcal{E}_5 \text{sh} \bar{a} z + \mathcal{E}_6 \text{ch} \bar{a} z) \\ W &= i \frac{\alpha}{\gamma} \frac{p_1 - p_1}{p_2} (\mathcal{E}_1 \text{ch} \gamma z + \mathcal{E}_2 \text{sh} \gamma z) + \{C, a\} (\mathcal{E}_3 \text{ch} a z + \mathcal{E}_4 \text{sh} a z) + \\ &\quad + \{C, \bar{a}\} (\mathcal{E}_5 \text{ch} \bar{a} z + \mathcal{E}_6 \text{sh} \bar{a} z) \\ \Sigma &= \mathcal{E}_3 \text{sh} a z + \mathcal{E}_4 \text{ch} a z + \mathcal{E}_5 \text{sh} \bar{a} z + \mathcal{E}_6 \text{ch} \bar{a} z \\ \mathcal{E}_\nu &= \mathcal{E}_\nu(\alpha, \beta), \quad \nu = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

$$\{A, \Lambda\} = \frac{i\alpha}{x_0} (\Lambda^2 - \alpha^2 - C_2\beta^2) X^{-1}, \quad \{B, \Lambda\} = \frac{i\beta}{x_0} (\Lambda^2 - C_2\alpha^2 - \beta^2) X^{-1}$$

$$\{C, \Lambda\} = -(\Lambda^2\gamma^2 - \alpha^4 - C_1\alpha^2\beta^2 - \beta^4)(x_0\Lambda X)^{-1}$$

$$X = \Lambda^4 - C_4\Lambda^2\alpha^2 - C_5\Lambda^2\beta^2 + C_6\alpha^4 + 2C_7\alpha^2\beta^2 + C_8\beta^4$$

$$C_1 = (x_1 - 2x_2 + x_4)x_0^{-1}, \quad C_2 = -(x_2 - x_3 - x_4 + x_5)x_0^{-1}$$

$$C_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_5)x_0^{-1}, \quad C_4 = (x_0 + x_1 - x_3)x_0^{-1}, \quad C_5 = (x_0 + x_4 - x_5)x_0^{-1}$$

$$C_6 = (x_1 - x_3)x_0^{-1}, \quad C_7 = l(l+m)^{-1}, \quad C_8 = (x_4 - x_5)x_0^{-1}$$

$$a = \{1/2 [(a_1 - 1)\alpha^2 + (a_2 - 1)\beta^2] + \\ + 1/2i\sqrt{a_1(2 - a_1)\alpha^4 + [a_4 - 2(1 - a_1)(1 - a_2)]\alpha^2\beta^2 + a_2(2 - a_2)\beta^4}\}^{1/2}$$

$$a_1 = 3 \frac{lD^2 + mp_2(p_2 - p_1)}{(l+m)D^2}, \quad a_2 = 3 \frac{lD^2 + mp_1(p_1 - p_2)}{(l+m)D^2}$$

$$a_3 = 3 \frac{l}{l+m}, \quad a_4 = \frac{2lD^2 - m(p_1^2 - 4p_1p_2 + p_2^2)}{(l+m)D^2} \quad (1.10)$$

2. Предположим, что сжимающие (растягивающие) усилия p_1 и p_2 мало отличаются одно от другого, то есть

$$p_1 = p(1 + \chi), \quad p_2 = p(1 - \chi) \quad (2.1)$$

Далее с помощью формул (1.10) получим асимптотическое (с точностью до членов $O(\chi^2)$) решение следующей вспомогательной задачи о равновесии слоя:

$$w^*(x, y, h) = 0, \quad \tau_{xz}^*(x, y, h) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, h) = 0$$

$$\tau_{xz}^*(x, y, 0) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, 0) = 0, \quad \sigma_z^*(x, y, 0) = -q(x, y) \quad (2.2)$$

Здесь также возмущения напряжений σ_x^*, \dots и $q(x, y)$ стремятся к нулю при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. Записав граничные условия (2.2) в трансформантах Фурье и удовлетворяя им, найдем вид функций $\mathcal{E}_i(\alpha, \beta)$ в (1.10), и затем, отбрасывая члены порядка χ^2 и выше, получим

$$w^*(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi\theta} \iint_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-1} L(\alpha, \beta; h) Q(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

$$L(\alpha, \beta; h) = \frac{\text{ch}k\gamma h - \cos\omega\gamma h}{\text{sh}k\gamma h + k\omega^{-1}\sin\omega\gamma h} \times$$

$$\times \left[1 - \chi \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\text{sh}k\gamma h + k\omega^{-2}(2 + \omega^2)\sin\omega\gamma h}{\text{sh}k\gamma h + k\omega^{-1}\sin\omega\gamma h} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2} \right]$$

$$k = \sqrt{\frac{4l+m}{l+m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3m}{l+m}}, \quad \theta = k/2l \quad (2.3)$$

Здесь $Q(x, \beta)$ — трансформанта Фурье функции $q(x, y)$. Удовлетворяя теперь с помощью (2.3) граничным условиям контактной задачи (Ω — конечная область контакта)

$$\begin{aligned} \tau^*(x, y, h) &= 0, \quad \tau_{xz}^*(x, y, h) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, h) = 0 \\ \tau_{xz}^*(x, y, 0) &= 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, 0); \quad \sigma_z^*(x, y, 0) = 0 \quad ((x, y) \in \bar{\Omega}) \\ \tau^*(x, y, 0) &= f(x, y) = [\delta + \alpha x + \beta y - g(x, y)] \quad ((x, y) \in \Omega) \\ \sigma_x^*, \dots &\rightarrow 0 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.4)$$

получим относительно неизвестного контактного давления $q(x, y)$, с точностью до членов порядка χ^2 , следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} K(\xi - x, \eta - y; h) q(\xi, \eta) d\xi d\eta &= 2\pi\theta f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega) \\ K(\xi, \eta; h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-2} L(\alpha, \beta; h) \exp[i(\xi\alpha + \eta\beta)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь функция $L(\alpha, \beta; h)$ определяется второй формулой (2.3), $\delta + \alpha x + \beta y$ — жесткое перемещение штампа, $g(x, y)$ — функция, описывающая форму основания штампа.

Переходя в уравнении (2.5) к пределу $h \rightarrow \infty$, получим интегральное уравнение соответствующей контактной задачи для преднапряженного физически нелинейного упругого полупространства, которому после преобразования ядра [4] можно придать вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} + \chi \frac{\omega^2}{k^2} \frac{(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]^{3/2}} \right\} q(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = 2\pi\theta f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегральное уравнение (2.6) отличается от интегрального уравнения (3.3) [5] лишь значением контактной жесткости θ и величиной коэффициента ω^2/k^2 . Для того, чтобы перейти от уравнения (3.3) [5] к уравнению (2.6), достаточно сделать следующую замену величин:

$$2G/N(\lambda) \rightarrow \theta, \quad L(\lambda)/N(\lambda) \rightarrow \omega^2/k^2 \quad (2.7)$$

На основании вышесказанного решение интегрального уравнения (2.6) для плоского наклонного эллиптического в плане штампа будет даваться формулами (3.4), (3.5) [5], в которых только следует сделать замену (2.7).

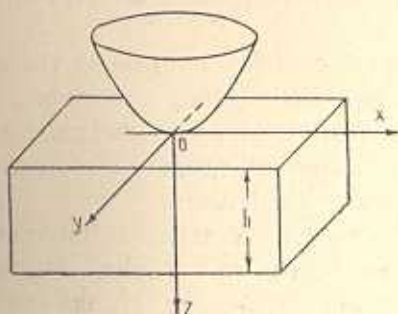
Также, для неплюского эллиптического в плане штампа с центром в начале координат, у которого главные направления поверхности основания в точке касания со слоем совпадают с осями x, y (фиг. 1), решение уравнения (2.6), удовлетворяющее условию равновесия штампа, будет иметь вид (3.6), (3.7) [5]. Отыскивая решение системы (3.7) [5] в виде [5]

$$e^2 = e_0^2 + \chi e_1^2 + \dots \quad (2.8)$$

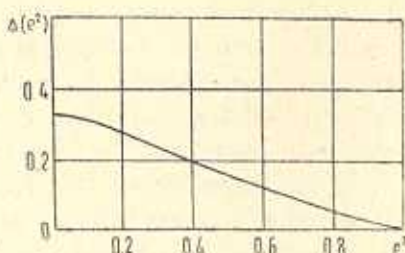
с точностью до членов порядка χ^2 , найдем

$$e_1^2 = 4 \frac{\omega^2}{k^2} \Delta(e_0^2)$$

$$\Delta(e^2) = \frac{(1-e^2)[E^2 - (1-e^2)K^2]}{K(2E-K)(1-e^2) - E(3E-2K)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x) = 1/3 \quad (2.9)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь $K=K(e)$ и $E=E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, График функции $\Delta(e^2)$ представлен на фиг. 2.

Можно заключить, что увеличение преднапряжения вдоль одной из осей приводит к «вытягиванию» эллиптической области контакта в том же направлении, причем чем меньше эксцентриситет площадки контакта, тем сильнее проявляется этот эффект.

Автор благодарен В. М. Александрову за постановку задачи и внимание к работе.

ՆԱԽԱԱՐՎԱԾ ՖԻԶԻԿՈՐԵՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏՈՒՄ
ԳՐԱՇՄԻ ՃՆՇՈՒՄԸ

Վ. Ս. ՉՈՐՈՇԵՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկվում է շերտի կողերին զուգահեռ, երկու փոխուղղահայաց առանցքների ուղղությամբ տարբեր, անվերջում հավասարաչափ բաշխված ճիգերով նախապես լարված ֆիզիկական ոչ գծային առաձգական շերտի կոնտակտային խնդիրը: Առաջին մոտավորությամբ հաստատված է լրիվ անալոգ նախալարված ֆիզիկական ոչ գծային առաձգական կիսատարածությունում դրոշմի ճնշման և նախալարված երկրաչափական ոչ գծային առաձգական կիսատարածության կոնտակտային խնդիրների համար:

Ցույց է տրված, որ պլանում ոչ հարթ էլիպտական դրոշմի համար մի առանցքի ուղղությամբ սկզբնական լարումների մեծացումը բերում է նույն ուղղությամբ կոնտակտի էլիպտական տիրույթի ձգման:

STAMP PENETRATION IN AN INITIALLY STRESSED PHYSICAL NONLINEAR ELASTIC LAYER

V. S. POROSHIN

S u m m a r y

The contact problem for a physical nonlinear elastic layer initially stressed with forces uniformly distributed over an infinite body has been treated; the forces differ along two mutually perpendicular axes and are parallel to the layer boundaries.

At the first approximation, an equivalence of the problem of stamp penetration into the initially stressed (stresses differ along two mutually orthogonal axes) semispace with physical nonlinearity, with the problem of prestressed (nonuniformly along two mutually orthogonal axes) semispace with geometrical nonlinearity has been established.

It has been shown that for a nonplane elliptic stamp an increase in the initial stresses along one of the axes leads to "stretch" of the elliptic contact domain in the same direction; herein, the less the contact area eccentricity the stronger the effect is manifested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толоконников Л. А.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. школа, 1979. 318 с.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 272 с.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 544 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. I. М.: Наука, 1970. 343 с.
5. *Филиппова Л. М.* Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела.—ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1080—1084.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
4.1.1984