

УДК 539.3.01

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ СЛОИСТОЙ БАЛКИ

АГАЛОВЯН Л. А., ХАЧАТРЯН А. М.

Работа посвящена определению и анализу напряженно-деформированного состояния слоистой анизотропной полосы-балки, слои которой в плоскости полосы обладают анизотропией общего вида. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [1, 2]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [2—5]. О рамках применимости каждой модели или гипотезы можно судить, имея точное решение или асимптотическое поведение решения соответствующей трехмерной задачи.

М. И. Гусейн-Заде методом асимптотического интегрирования [6] трехмерных уравнений теории упругости исследовала напряженно-деформированное состояние слоистой пластинки, составленной из произвольного числа упругих изотропных слоев, жестко соединенных друг с другом. Дана классификация задач в зависимости от величины отношения модулей упругости слабых и несущих слоев [7, 8].

В настоящей работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче. Найдена связь полученного решения с решением по классической теории слоистых балок. Показано, что применимость классической теории существенно зависит как от отношений упругих коэффициентов отдельно взятого слоя, в частности, от $E_1^{(n)}/G_{12}^{(n)}$, так и от отношений модулей упругости различных слоев и их толщины. Важно отметить также, что эти факторы проявляют себя не раздельно, а в общем комплексе.

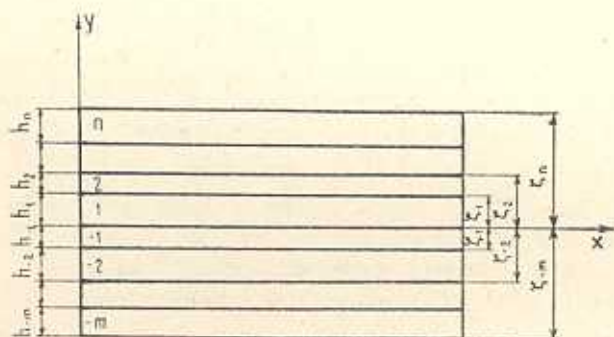
1. Постановка задачи и общее решение

Рассматривается плоская задача для анизотропной слоистой полосы длиной a и толщиной $2h$, на продольных сторонах которой заданы значения напряжений, а на торцах $x=0, a$ —произвольные пока условия. Считается, что слои имеют различные толщины h_n , коэффициенты упругости $a_j^{(n)}$. Нумерацию слоев ведем от линии Ox , используя для слоев, расположенных под этой линией, отрицательные номера. Полоса состоит из $n+m$ слоев (фиг. 1).

Условия на лицевых линиях $\zeta = \zeta_n$ и $\zeta = \zeta_{-m}$ будут задаваться следующим образом:

$$\sigma_{xy} = \pm \frac{a}{h} X^\pm(x), \quad \sigma_y = \pm Y^\pm(x) \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_n, \zeta_{-m} \quad (1.1)$$

Заранее никакие ограничения на упругие свойства не накладываются, они будут выявлены в ходе получения и анализа асимптотического решения. Это позволяет, во-первых, получить известные уравнения и соотношения классической теории, соответствующие гипотезе недеформируемых нормалей, выявить возможный вклад анизотропии при применении этой гипотезы, во-вторых, выделять асимптотически главные члены и отношения, на которые в первую очередь следует обратить внимание при уточнении результатов по классической теории; указать предельные случаи, когда классическая теория не применима.



Фиг. 1

Чтобы решить сформулированную краевую задачу, будем использовать асимптотический метод [6]. Вводится безразмерная система координат $\xi = x/a$, $\zeta = y/h$, после преобразования соответствующих уравнений теории упругости анизотропного тела, получается система, содержащая малый параметр $\varepsilon = h/a$ при старших производных. Эта система сингулярно возмущенная, и ее решение складывается из двух типов решений—внутреннего и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи ищется в виде [6—10]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(ks)} \quad (1.2)$$

где $Q^{(k)}$ —любое из напряжений или безразмерных перемещений $U^{(k)} = u^{(k)}/a$, $V^{(k)} = v^{(k)}/a$, k —номер слоя. Целое число q выбирается следующим образом [6, 9, 10]:

$$q = 2 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, U^{(k)}, \quad q = 1 \text{ для } \sigma_{xy}^{(k)}; \quad q = 3 \text{ для } V^{(k)}, \quad q = 0 \text{ для } \sigma_y^{(k)} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.2) в уравнения теории упругости, с учетом (1.3), получим систему, решив которую, будем иметь

$$V^{(ks)} = w^{(ks)}(\xi) + v^{*(ks)}$$

$$U^{(ks)} = -\frac{d\omega^{(ks)}}{d\xi} \zeta + u^{(ks)} + u^{*(ks)}, \quad \sigma_x^{(ks)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{(ks)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2\omega^{(ks)}}{d\xi^2} \zeta + \sigma_x^{*(ks)}$$

$$\sigma_{xy}^{(ks)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2\omega^{(ks)}}{d\xi^2} \frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2u^{(ks)}}{d\xi^2} \zeta + \sigma_{xy0}^{(ks)} + \sigma_{xy}^{*(ks)} \quad (1.4)$$

$$\sigma_y^{(ks)} = -\frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^4\omega^{(ks)}}{d\xi^4} \frac{\zeta^3}{6} + \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^3u^{(ks)}}{d\xi^3} \frac{\zeta^2}{2} - \frac{d\sigma_{xy0}^{(ks)}}{d\xi} \zeta + \sigma_{y0}^{(ks)} + \sigma_y^{*(ks)}$$

где $\omega^{(ks)}$, $u^{(ks)}$, $\sigma_{xy0}^{(ks)}$ и $\sigma_{y0}^{(ks)}$ — неизвестные пока функции от ξ и подлежат определению, а величины со звездочками — известные функции, которые по сути не отличаются от соответствующих формул для однослойной анизотропной полосы [10], лишь соответствующие величины приобретают индекс k , указывающий номер слоя.

Удовлетворив граничным условиям (1.1), а также условиям контакта на линиях раздела $\zeta = \zeta_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1, -1, -2, \dots, -m+1$), все величины можно выразить через перемещения $u^{(ns)}$ и $\omega^{(ns)}$, а для определения этих получаются следующие уравнения:

$$C \frac{d^2u^{(ns)}}{d\xi^2} + K \frac{d^3\omega^{(ns)}}{d\xi^3} = p^{(s)} \quad (1.5)$$

$$D \frac{d^4\omega^{(ns)}}{d\xi^4} + K \frac{d^3u^{(ns)}}{d\xi^3} = q^{(s)} \quad (1.6)$$

где

$$C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k} - \zeta_{-k-1})$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^3 - \zeta_{k-1}^3) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^3 - \zeta_{-k-1}^3) \quad (1.7)$$

$$K = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k-1}^2)$$

Обобщенные нагрузки $p^{(s)}$, $q^{(s)}$ определяются по формулам

$$p^{(s)} = -(X^{+(s)} + X^{-s}) + \sum_{k=1}^n (\sigma_{xy}^{*(ks)}(\zeta_k) - \sigma_{xy}^{*(ks)}(\zeta_{k-1})) - \sum_{k=1}^m (\sigma_{xy}^{*(-ks)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{xy}^{*(-ks)}(\zeta_{-k+1})) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^3V^{(js)}(\zeta_j)}{d\xi^3} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k+1}^2) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^3V^{(js)}(\zeta_j)}{d\xi^3} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^3V^{*(-js)}(\zeta_{-j})}{d\xi^3} \right] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^2U^{*(js)}(\zeta_j)}{d\xi^2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k} - \zeta_{-k+1}) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2U^{(js)}(\zeta_j)}{d\xi^2} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^2U^{*(-js)}(\zeta_{-j})}{d\xi^2} \right] \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
q^{(s)} = & Y^{+(s)} + Y^{-(s)} + \frac{dX^{+(s)}}{d\xi} \zeta_n + \frac{dX^{-(s)}}{d\xi} \zeta_{-m} - \\
& - \sum_{k=1}^n (\sigma_y^{*(ks)}(\zeta_k) - \sigma_y^{*(ks)}(\zeta_{k-1})) + \sum_{k=1}^m (\sigma_y^{*(-ks)}(\zeta_{-k}) - \sigma_y^{*(-ks)}(\zeta_{-k+1})) - \\
& - \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\sigma_{xy}^{*(ks)}(\zeta_k)}{d\xi} \zeta_k - \frac{d\sigma_{xy}^{*(ks)}(\zeta_{k-1})}{d\xi} \zeta_{k-1} \right) - \\
& - \sum_{k=1}^m \left(\frac{d\sigma_{xy}^{*(-ks)}(\zeta_{-k})}{d\xi} \zeta_{-k} - \frac{d\sigma_{xy}^{*(-ks)}(\zeta_{-k+1})}{d\xi} \zeta_{-k+1} \right) + \\
& + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^3 - \zeta_{k-1}^3) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^4 V^{*(js)}(\zeta_j)}{d\xi^4} - \\
& - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^3 - \zeta_{-k+1}^3) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^4 V^{*(js)}(\zeta_j)}{d\xi^4} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^4 V^{*(-js)}(\zeta_{-j})}{d\xi^4} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d^3 U^{*(js)}(\zeta_j)}{d\xi^3} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k+1}^2) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^3 U^{*(js)}(\zeta_j)}{d\xi^3} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^3 U^{*(-js)}(\zeta_{-j})}{d\xi^3} \right]
\end{aligned}$$

где

$$V^{*(\pm ks)} = v^{*(\pm(k+1),s)}(\zeta_{\pm k}) - v^{*(\pm ks)}(\zeta_{\pm k})$$

$$U^{*(\pm ks)} = u^{*(\pm(k+1),s)}(\zeta_{\pm k}) - u^{*(\pm ks)}(\zeta_{\pm k}) + \frac{dV^{*(\pm ks)}(\zeta_{\pm k})}{d\xi} \zeta_{\pm k}$$

(1.9)

$$\zeta_k = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad \zeta_{-k} = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_{-i} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

$$X^{\pm(0)} = X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0$$

После удовлетворения условиям (1.1) также получается

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy0}^{(ns)} = & X^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(ns)}(\zeta_n) - \frac{1}{2a_{11}^{(n)}} \frac{d^3 w^{(ns)}}{d\xi^3} \zeta_n^2 + \frac{1}{a_{11}^{(n)}} \frac{d^2 u^{(ns)}}{d\xi^2} \zeta_n \\
\sigma_{y0}^{(ns)} = & Y^{+(s)} + \frac{dX^{+(s)}}{d\xi} \zeta_n - \sigma_y^{*(ns)}(\zeta_n) - \frac{d\sigma_{xy}^{*(ns)}(\zeta_n)}{d\xi} \zeta_n - \\
& - \frac{1}{3a_{11}^{(n)}} \frac{d^4 w^{(ns)}}{d\xi^4} \zeta_n^3 + \frac{1}{2a_{11}^{(n)}} \frac{d^3 u^{(ns)}}{d\xi^3} \zeta_n^2
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Перемещения остальных слоев выражаются через $u^{(ns)}$ и $w^{(ns)}$ по формулам

$$\begin{aligned}
u^{(ks)} = & u^{(ns)} + \sum_{j=k}^{n-1} U^{*(js)}(\zeta_j) \\
w^{(ks)} = & w^{(ns)} + \sum_{j=k}^{n-1} V^{*(js)}(\zeta_j)
\end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

$$u^{(-ks)} = u^{(ns)} + \sum_{j=1}^{n-1} U^{(j/s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} U^{*(-j/s)}(\zeta_{-j}) \quad (1.11)$$

($k = 1, 2, \dots, m$)

$$w^{(-ks)} = w^{(ns)} + \sum_{j=1}^{n-1} V^{(j/s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} V^{*(-j/s)}(\zeta_{-j})$$

а используя (1.4) и условия контакта между слоями, для определения $\sigma_{xy}^{(ks)}$ и $\sigma_{y0}^{(ks)}$ можно получить рекуррентные формулы.

Всегда можно координатную систему (линию отсчета) выбрать так, чтобы величина K обращалась в нуль, что равносильно условию

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k+1}^2) \quad (1.12)$$

При выполнении условия приведения (1.12) уравнения (1.5) и (1.6) в нулевом приближении оказываются несвязанными. Так как $Q^{*(k0)} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -m$), то $u^{(k0)} = u^{(n0)}$, $w^{(k0)} = w^{(n0)}$ при любом k . Это значит, что при $s=0$ все расчетные формулы (1.4) совпадают с теми, что получаются, если принять гипотезу Бернулли-Эйлера для всего пакета в целом [1]. Последующие приближения уточняют классическую теорию. Величина вносимой поправки, следовательно, и применимость гипотезы плоских сечений зависит от порядка величин $p^{(s)}$ и $q^{(s)}$, зависящих не только от изменяемости внешней нагрузки, но и от отношений упругих коэффициентов и толщин слоев. Ниже, для двухслойных и трехслойных балок, более конкретно, выявляется влияние этих факторов.

2. Двухслойная балка из ортотропных материалов

В уравнениях и расчетных формулах п. 1, полагая $n=1$, $m=2$, получим все необходимые данные для двухслойной балки. Пусть верхний слой характеризуется упругими коэффициентами a_{ij} , нижний слой — a'_{ij} и имеют толщины, равные h_1 и h_{-1} , соответственно. Тогда перемещения $u^{(1s)}$ и $w^{(1s)}$ будут определяться из уравнений (1.5) и (1.6), где жесткости C , D и K вычисляются по формулам

$$C = E_1(\zeta_1 - \zeta_{-1}) - E'_1(\zeta_{-2} - \zeta_{-1}), \quad D = 1/3 [E_1(\zeta_1^3 - \zeta_{-1}^3) - E'_1(\zeta_{-2}^3 - \zeta_{-1}^3)] \quad (2.1)$$

$$K = 1/2 [-E_1(\zeta_1^2 - \zeta_{-1}^2) + E'_1(\zeta_{-2}^2 - \zeta_{-1}^2)]$$

Здесь

$$\zeta_1 = \frac{h_1 - h_0}{h}, \quad \zeta_{-1} = -\frac{h_0}{h}, \quad \zeta_{-2} = -\frac{h_0 + h_{-1}}{h} \quad (2.2)$$

h_0 — расстояние линии раздела слоев от координатной оси Ox . Условие приведения (1.12) дает

$$h_0 = \frac{E_1 h_1^2 - E'_1 h_{-1}^2}{2(E_1 h_1 + E'_1 h_{-1})} \quad (2.3)$$

Обобщенные нагрузки определяются следующим образом:

$$p^{(0)} = -(X^+ + X^-), \quad q^{(0)} = Y^+ + Y^- + \frac{dX^+}{d\xi} \zeta_1 + \frac{dX^-}{d\xi} \zeta_{-1}$$

$$p^{(1)} = q^{(1)} = 0 \quad (2.4)$$

Выражения для $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$ из-за громозкости не приводятся. Отметим, что они являются функциями от отношений упругих модулей E_1/E_1' , E_1/G_{12} , E_1'/G_{12}' и толщин слоев h_1/h_{-1} .

Введем следующие обозначения:

$$\frac{h_1}{h_{-1}} = \varepsilon^\alpha, \quad \frac{E_1}{E_1'} = \varepsilon^\beta, \quad \frac{E_1}{G_{12}} = \varepsilon^\gamma, \quad \frac{E_1'}{G_{12}'} = \varepsilon^{\gamma_1} \quad (2.5)$$

Тогда $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$ будут содержать слагаемые вида

$$\varepsilon^{\alpha_1} \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2}, \quad \varepsilon^{\alpha_2} \frac{dq^{(0)}}{d\xi}, \quad \varepsilon^{\alpha_3} \frac{d^3 p^{(0)}}{d\xi^3}, \quad \varepsilon^{\alpha_4} \frac{d^2 q^{(0)}}{d\xi^2} \quad (2.6)$$

Если $\tau_i > 0$, то соответствующая поправка мала и ею можно пренебречь (считается, что изменяемость нагрузки невелика), а если какой-либо $\tau_i < 0$, то поправку необходимо учитывать. При этом, при $\tau_i \leq -2$ величина поправки от второго приближения будет иметь такой же порядок, что и первое приближение. Это будет свидетельствовать о том, что асимптотика (1.3) становится несправедливой, как и гипотеза плоских сечений.

Конкретнее, обобщенные нагрузки $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$ есть суммы, состоящие из слагаемых, имеющих такие порядки

$$p^{(2)} = O\left(\sum_{k=0}^3 (\varepsilon^{\delta_{1k}} + \varepsilon^{\theta_{2k}})\right) \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2} + O\left(\sum_{k=0}^4 (\varepsilon^{\theta_{1k}} + \varepsilon^{\delta_{2k}})\right) \frac{dq^{(0)}}{d\xi}$$

$$q^{(2)} = O\left(\sum_{k=0}^4 (\varepsilon^{\delta_{3k}} + \varepsilon^{\theta_{4k}})\right) \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2} + O\left(\sum_{k=0,2,4,5} (\varepsilon^{\theta_{3k}} + \varepsilon^{\delta_{4k}})\right) \frac{d^2 q^{(0)}}{d\xi^2} \quad (2.7)$$

В табл. 1–2 приведены значения δ_{ik} и θ_{ik} при возможных значениях комбинаций α и β для главных членов обобщенных нагрузок $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$. Пусть

$$\lambda = \min\{\delta_{ik}\}, \quad \mu = \min\{\theta_{ik}\} \quad (2.8)$$

Учет второго приближения асимптотического разложения позволяет определить напряженно-деформированное состояние с точностью $O(\varepsilon^{2+\min(\lambda, \mu)})$. Если λ, μ неотрицательные числа, то классическая теория даст приемлемый результат. При $-1 \leq \lambda, \mu < 0$ классическую теорию можно применять, но она теперь даст правильный результат при малых значениях ε , в противном случае необходимо вычислять второе приближение. При $-2 < \lambda, \mu < -1$ учет второго приближения становится обязательным, а это значит, что в (1.4) величины со звездочками отличны от нуля, то есть гипотеза плоских

Таблица 1

	δ_{1k} ($k=0, 1, 2, 3$)	δ_{2k} ($k=0, 1, 2, 3$)	δ_{3k} ($k=0, 1, 2, 3, 4$)	δ_{4k} ($k=0, 1, 2, 3, 4$)
1	γ	$\gamma_1 - \beta$	γ	$\gamma_1 - \beta$
2	$\alpha > 0, \alpha + \beta > 0$	$\gamma - 2(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 - \beta + (k-2)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 - \beta + (k-3)(\alpha + \beta)$
3	$\alpha > 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta > 0$	$\gamma + 4\alpha + \beta$	$\gamma_1 + (4-k)\alpha$	$\gamma_1 + (5-k)\alpha$
4	$\alpha > 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta < 0$	$\gamma - (4-k)\alpha$	$\gamma_1 - 4\alpha - \beta$	$\gamma_1 - 5\alpha - \beta$
5	$\alpha < 0, \alpha + \beta > 0, 2\alpha + \beta > 0$	$\gamma + \beta - (k-2)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + 2(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + 3(\alpha + \beta)$
6	$\alpha < 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta < 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	γ_1

Таблица 2

	θ_{1k} ($k=0, 1, 2, 3, 4$)	θ_{2k} ($k=0, 1, 2, 3, 4$)	θ_{3k} ($k=0, 2, 4, 5$)	θ_{4k} ($k=0, 2, 4, 5$)
1	γ	$\gamma_1 - \beta$	γ	$\gamma_1 - \beta$
2	$\alpha > 0, \alpha + \beta > 0$	$\gamma - (\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + (k-1)(\alpha + \beta) - \beta$	$\gamma_1 + (k-2)(\alpha + \beta) - \beta$
3	$\alpha > 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta > 0, 3\alpha + 2\beta > 0$	$\gamma - 4\alpha - 3\beta$	$\gamma_1 + (k-4)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + (k-5)(\alpha + \beta)$
4	$\alpha > 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta > 0, 3\alpha + 2\beta < 0$	$\gamma + 4\alpha + \beta$	$\gamma_1 + (4-k)\alpha$	$\gamma_1 + (5-k)\alpha$
5	$\alpha > 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta < 0$	$\gamma - (4-k)\alpha$	$\gamma_1 - 4\alpha - \beta$	$\gamma_1 - 5\alpha - \beta$
6	$\alpha < 0, \alpha + \beta > 0, 2\alpha + \beta < 0, 3\alpha + 2\beta > 0$	$\gamma - (k-4)(\alpha + \beta)$	$\gamma_1 + 4\alpha + 3\beta$	$\gamma_1 + 5\alpha + 4\beta$
7	$\alpha < 0, \alpha + \beta > 0, 2\alpha + \beta < 0, 3\alpha + 2\beta < 0$	$\gamma - (k-1)(\alpha + \beta) + \beta$	$\gamma_1 + \alpha + \beta$	$\gamma_1 + 2(\alpha + \beta)$
8	$\alpha < 0, \alpha + \beta < 0, 2\alpha + \beta < 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	γ_1

сечений перестает быть справедливой, но для расчета проходит итерационный метод. При $\min(\lambda, \mu) \ll -2$ (сверхсильная анизотропия) величина вносимой поправки от второго приближения будет иметь больший или равный порядок по сравнению с исходным приближением.

Для таких случаев асимптотика (1.3), следовательно, подавно и классическая теория, не применимы.

Из табл. 1, 2, в частности, следует:

а) для слоистой полосы, имеющей несильно отличающиеся друг от друга модули Юнга ($\beta \approx 0$), вне зависимости от значения параметров α , то есть относительных толщин слоев, $\lambda = \mu = \min(\gamma, \gamma_1)$, что означает, что применимость классической теории, как это имело место для однослойной полосы [9, 10], в этом случае сильно зависит от отношений собственных модулей отдельных слоев E_1/G_{12} , E_1/G'_{12} ;

б) если слои имеют толщины одинакового порядка ($\alpha \approx 0$), то $\lambda = \mu = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta)$ при $\beta > 0$, $\lambda = \mu = \min(\gamma + \beta, \gamma_1)$ при $\beta < 0$. Это означает, что применимость классической теории зависит не только от отношений E_1/G_{12} , E_1/G'_{12} , но и в большей степени от E_1/E_2 ;

в) если сильный по отношению модуля Юнга слой имеет малую толщину по сравнению со слабым (для определенности $\alpha > 0$, $\beta < 0$), то

$$\lambda = \mu = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \geq 0$$

$$\lambda = \min(\gamma - 2(\alpha + \beta), \gamma_1 + \alpha) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta < 0, \quad 2\alpha + \beta \geq 0$$

(2.9)

$$\mu = \min(\gamma - (\alpha + \beta), \gamma_1 + 3\alpha + 2\beta) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leq 0, \quad 2\alpha + \beta \geq 0, \quad 3\alpha + 2\beta \geq 0$$

$$\mu = \min(\gamma - 4\alpha - 3\beta, \gamma_1) \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leq 0, \quad 2\alpha + \beta \geq 0, \quad 3\alpha + 2\beta \leq 0$$

$$\lambda = \min(\gamma + 4\alpha + \beta, \gamma_1 + \alpha), \quad \mu = \min(\gamma + 4\alpha + \beta, \gamma_1) \quad \text{при} \quad 2\alpha + \beta \leq 0$$

Из (2.9) вытекает, что при малых по абсолютной величине значениях γ, γ_1 , (например, если слои изотропные), величины λ и μ тоже малы по абсолютной величине, и классическая теория может нарушаться только при $|\beta| > 4\alpha + \gamma + 2$, что для реальных материалов может выполняться только при $\alpha < 1$, то есть когда толщины слоев не резко отличаются друг от друга. При $\alpha > 1$ (случай накладки) условие $|\beta| > 4\alpha + \gamma + 2$ может выполняться лишь в весьма частных случаях, тогда опасность связана с величиной γ_1 ;

г) если слабый слой имеет меньшую толщину, чем сильный слой (для определенности $\alpha < 0$, $\beta < 0$), то $\lambda = \mu = \min(\gamma + \beta, \gamma_1)$, откуда следует, что для материалов, имеющих $\gamma \leq -1$, классическая теория, как правило, даст неверный результат.

Численный анализ конкретной конструкции подтверждает вышеизложенные рассуждения. Например, для двухслойной балки, состоящей из боропластика ($E_1 = 2,4 \cdot 10^5$ мн/м², $G_{12} = 0,054 \cdot 10^5$ мн/м²) и

органопластика ($E_1 = 0,054 \cdot 10^5$ мн/м², $G_{12} = 0,02 \cdot 10^5$ мн/м²) [11], в зависимости от заранее фиксированного значения α , эти параметры выглядят следующим образом:

$$1) \quad \varepsilon = 0,1, \quad \beta = -1,647, \quad \gamma = -1,681, \quad \gamma_1 = -0,426$$

$$\lambda = \mu = \gamma = -1,681 \text{ при } \alpha + \beta \geq 0; \quad \lambda = \mu = \gamma + \beta = -3,328 \text{ при } \alpha = 0$$

$$\lambda = \mu = \gamma + 4\alpha + \beta = -0,920 \text{ при } \alpha = 0,602 \quad (h_1/h_{-1} = 0,25)$$

$$2) \quad \varepsilon = 0,05, \quad \beta = -1,266, \quad \gamma = -1,292, \quad \gamma_1 = -0,327$$

$$\lambda = \mu = -2,558 \text{ при } \alpha = 0; \quad \lambda = \mu = -1,292 \text{ при } \alpha + \beta \geq 0$$

$$\lambda = \mu = -0,707 \text{ при } \alpha = 0,463 \quad (h_1/h_{-1} = 0,25)$$

3. Симметрично собранный трехслойный прямоугольник из ортотропных материалов

В уравнениях и расчетных формулах п. 1, полагая $n = m = 2$, а также принимая

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(-1)} = a'_{ij}, \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(-2)} = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2; i = j = 6),$$

$$a_{i6}^{(1)} = a_{i6}^{(-1)} = a_{i6}^{(2)} = a_{i6}^{(-2)} = 0 \quad (i = 1, 2); \quad h_1 = h_{-1}, \quad h_2 = h_{-2} \quad (3.1)$$

получим все необходимые уравнения и расчетные формулы трехслойной ортотропной балки. В частности, перемещения $u^{(2s)}$ и $w^{(2s)}$ будут определяться из уравнений (1.5) и (1.6), при этом, жесткости вычисляются следующим образом:

$$C = 2[E_1 \zeta_1 + E_1(1 - \zeta_1)], \quad K = 0, \quad D = 2/3[E_1 \zeta_1^3 + E_1(1 - \zeta_1^3)] \quad (3.2)$$

где

$$\zeta_1 = -\zeta_{-1} = h_1/h, \quad \zeta_2 = -\zeta_{-2} = 1, \quad h = h_1 + h_2 \quad (3.3)$$

В силу симметрии, задачи растяжения-сжатия и изгиба такой балки распадаются на самостоятельные задачи. Обобщенные нагрузки равны

$$p^{(0)} = 1/2(X^+ + X^-), \quad p^{(1)} = 0$$

$$q^{(0)} = \frac{1}{2}(Y^+ + Y^-) + \frac{1}{2}\left(\frac{dX^+}{d\xi} - \frac{dX^-}{d\xi}\right), \quad q^{(1)} = 0 \quad (3.4)$$

Нагрузки $p^{(2)}$ и $q^{(2)}$, как в случае двухслойной балки, можно представить в виде:

$$p^{(2)} = O\left(\sum_k \varepsilon^{\delta_k}\right) \frac{d^2 p^{(0)}}{d\xi^2}; \quad q^{(2)} = O\left(\sum_k \varepsilon^{\theta_k}\right) \frac{d^2 q^{(0)}}{d\xi^2} \quad (3.5)$$

Значения δ_k и θ_k приведены в табл. 3—4.

Таблица 3

		δ_k ($k=0, 2, 3$)	ζ_1	θ_{k+2} ($k=2, 3$)
1	$\alpha > 0, \alpha + \beta > 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	γ
2	$\alpha > 0, \alpha + \beta < 0$	$\gamma - \alpha$	$\gamma_1 - (\alpha + \beta)$	$\gamma - (\alpha + \beta)$
3	$\alpha < 0, \alpha + \beta > 0$	$\gamma + (\alpha + \beta) - k\alpha$	$\gamma_1 - 2\alpha$	$\gamma - (k-1)\alpha$
4	$\alpha < 0, \alpha + \beta < 0$	$\gamma - k\alpha$	$\gamma_1 - \beta - 3\alpha$	$\gamma - \beta - k\alpha$

		θ_k ($k=0, 1, 3, 5$)	θ_2	θ_{k+5} ($k=1, 3, 5$)
1	$\alpha > 0, \alpha + \beta \geq 0$	$\gamma + \beta$	γ_1	$\gamma_1 - 2\beta$
2	$\alpha \geq 0, \alpha + \beta \leq 0$	$\gamma - \alpha$	$\gamma_1 - (\alpha + \beta)$	$\gamma_1 - \alpha - 3\beta$
3	$\alpha < 0, 3\alpha + \beta \geq 0$	$\gamma + (3\alpha + \beta) - k\alpha$	$\gamma_1 - 2\alpha$	$\gamma_1 - 2\beta - (k-3)\alpha$
4	$\alpha < 0, 3\alpha + \beta < 0$	$\gamma - k\alpha$	$\gamma_1 - 5\alpha - \beta$	$\gamma_1 - 3\beta - k\alpha$

Пусть

$$\delta = \min \{\delta_k\}, \quad \theta = \min \{\theta_k\} \quad (3.6)$$

Из табл. 3—4, в частности, следует

а) при $\beta \approx 0$ ($E_1 \approx E'_1$)

$$\delta = \theta = \min(\gamma, \gamma_1) \quad \text{при } \alpha \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\delta = \min(\gamma, \gamma_1 - 3\alpha), \quad \theta = \min(\gamma, \gamma_1 - \alpha) \quad \text{при } \alpha \leq 0$$

б) при $\alpha \approx 0$ ($h_1 \approx h_2$)

$$\delta = \min(\gamma, \gamma_1), \quad \theta = \min(\gamma + \beta, \gamma_1 - 2\beta) \quad \text{при } \beta \geq 0$$

$$\delta = \theta = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta) \quad \text{при } \beta \leq 0 \quad (3.8)$$

в) при $\alpha > 0, \beta < 0$

$$\delta = \theta = \min(\gamma + \beta, \gamma_1) \quad \text{при } \alpha + \beta \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\delta = \theta = \min(\gamma - \alpha, \gamma_1 - (\alpha + \beta)) \quad \text{при } \alpha + \beta < 0$$

г) при $\alpha < 0, \beta > 0$

$$\delta = \min(\gamma - \alpha, \gamma_1 - 2\alpha) \quad \text{при } \alpha + \beta \geq 0, \quad 2\alpha + \beta \geq 0$$

$$\delta = \min(\gamma + \alpha + \beta, \gamma_1 - 2\alpha) \quad \text{при } \alpha + \beta \geq 0, \quad 2\alpha + \beta \leq 0$$

$$\delta = \min(\gamma, \gamma_1 - \beta - 3\alpha) \quad \text{при } \alpha + \beta < 0 \quad (3.10)$$

$$\theta = \min(\gamma + \beta + 3\alpha, \gamma_1 + 2\alpha - 2\beta) \quad \text{при } 3\alpha + \beta \geq 0$$

$$\theta = \min(\gamma, \gamma_1 - \alpha - 3\beta) \quad \text{при } 3\alpha + \beta < 0$$

Основные выводы, сделанные в п. 2 для двухслойной балки, справедливы и для трехслойной балки. Здесь также при уточнении теории трехслойной балки, как и следовало ожидать, в первую очередь необходимо учитывать сдвиговые факторы в каждом слое и отношение модулей Юнга различных слоев.

В заключение заметим, что решением внутренней задачи можно составить достаточно полное представление о напряженном состоянии на расстоянии зоны затухания краевых эффектов (пограничный слой) от торцов $x=0, a$. Чтобы удовлетворить условиям при $x=0, a$, необходимо иметь также решение типа пограничного слоя. Изучение пограничного слоя и его сращивание с решением внутренней задачи осуществляется как в [6, 10, 12].

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՀԵԾԱՆԻ ԼԱՐՎԱԾԱՑԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ
ՎԻՃԱԿԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Լ. Ա. ԱԳԱԼՈՎՅԱՆ, Ա. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ա մ ֆ ո փ ու մ

Դիտարկվում է անիզոտրոպ շերտավոր հեծանի լարվածային դեֆորմացիոն վիճակի որոշման և վերլուծության հարցը: Շերտերը իրենց հարթության մեջ օժտված են ընդհանուր անիզոտրոպիայով: Ենդրի լուծումը ասիմպտոտիկ մեթոդով բերվում է երկրորդ և չորրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման, որոնք համապատասխանում են շերտավոր հեծանի դասական տեսության բերված գործակիցներով հավասարումներին:

Կախված առաձգական գործակիցների և շերտերի հաստությունների հարաբերություններից ցույց է տրված, երբ է կիրառելի դասական տեսությունը, երբ այն կիրառելի չէ, բայց կարելի է օգտվել իտերացիոն պրոցեսից և երբ նրանցից ոչ մեկը կիրառելի չէ:

THE ASYMPTOTIC ANALYSIS OF STRESS—STRAIN STATE OF AN ANISOTROPIC SANDWICH-TYPE BEAM

L. A. AGALOVIAN, A. M. KHACHATRIAN

S u m m a r y

The determination of stress-strain state in an interior problem for the anisotropic sandwich-type beam is considered. Each layer of the beam is assumed to be a general anisotropic one.

By means of the asymptotic method the solution of the problem is reduced to the solution of two differential equations of the second and fourth orders corresponding to the classical equations of the sandwich-type beams by reduced rigidities.

Depending on the ratio of elastic coefficients and thicknesses of layers the following were brought to light: In cases when the classical theory is applicable; when the iteration process is applicable; when both the classical theory and iteration process are not applicable.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 447 с.
4. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек.—ПМ, 1972, т. 8, вып. 6, с. 3—17.
5. Никитин В. С., Шапиро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука, 1973. 131 с.
6. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668—686.

7. Гусейн-Заде М. И. Построение теории изгиба слоистых пластинок.—Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин.—М.: Наука, 1966, с. 367—378.
8. Гусейн-Заде М. И. К построению теории изгиба слоистых пластинок.—ПММ, 1968, т. 32, вып. 2, с. 232—243
9. Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы.—Уч. записки ЕГУ, 1977, № 1, с. 22—30.
10. Хачатрян Ш. М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 6, с. 19—32.
11. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов.—3-е изд., перераб. и доп.—Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
12. Гусейн-Заде М. И. Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок. Труды VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 638—643.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
30.XII.1983