

УДК 551.49

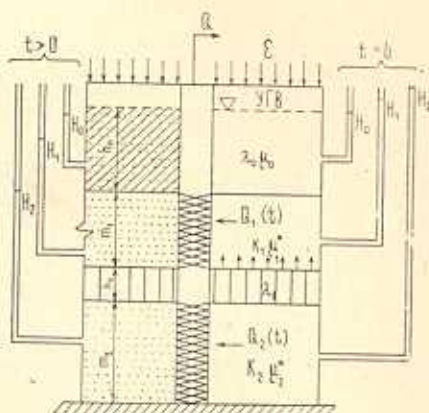
ДВИЖЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД К СКВАЖИНЕ В
 НЕОДНОРОДНО-СЛОИСТОМ ПЛАСТЕ ПРИ ОТКАЧКЕ ИЗ ДВУХ
 СЛОЕВ

КАЗАРЯН С. М.

Задача о неустановившемся движении подземных вод в слоистых водоносных толщах пород является одной из важных в гидрогеологии, поскольку в реальных природных условиях мы имеем дело с комплексом водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемыми глинистыми слоями. Поэтому учет реальной природной обстановки дает возможность получить истинную картину работы вертикального дренажа и гидрогеологической обстановки на орошаемом массиве.

Задача откачки из скважины в двухпластовой системе в жестком режиме рассматривалась В. М. Шестаковым [7, 8]. В этих работах не учитывается инфильтрационное питание, принимаются равные напоры в водоносных слоях. Кроме того, не осуществляется переход от изображений к оригиналу при интегральном преобразовании Лапласа. Задача решается интерпретацией опытных данных.

Данное аналитическое решение и вытекающие из него практические рекомендации относятся к задаче более общей постановки. Рассматривается неустановившееся движение подземных вод в неограниченной трехслойной гидравлически связанной среде (фиг. 1) с учетом инфильтрации поверхностных вод и перетекания при жестком режиме в покровном и раздельном пласте.



Фиг. 1

Напоры в водоносных слоях разные, а отбор воды производится из двух нижележащих напорных слоев с постоянным суммарным расходом. Процесс фильтрации описывается следующей системой дифференциальных уравнений [2,4]:

$$\begin{aligned}
 b_0(S_1 - S_0) - e &= \frac{\partial S_0}{\partial t} \\
 a_1 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - b_1(S_1 - S_2) - \\
 - b_1^*(S_1 - S_0) &= \frac{\partial S_1}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$a_2 \left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) - b_2 (S_2 - S_1) = \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (1)$$

В системе (1) введены следующие обозначения:

a_i —коэффициент пьезопроводности ($i=1, 2$) первого и второго водоносных пластов; b_i —коэффициент перетекания, S_i —понижение уровня подземных вод ($i=0, 1, 2$) в любой точке покровного и I и II водоносных горизонтов в любой момент времени.

$$a_1 = \frac{(km)_1}{\mu_1^*}, \quad b_0 = \frac{\lambda_0}{h_0 \mu_0}, \quad b_1^* = \frac{\lambda_0}{h_0 \mu_1^*}, \quad e = \frac{\varepsilon}{\mu_0}, \quad a_2 = \frac{(km)_2}{\mu_2^*}, \quad b_1 = \frac{\lambda_1}{h_1 \mu_1^*},$$

$$b_2 = \frac{\lambda_1}{h_1 \mu_2^*}, \quad S_i(r, t) = H_{ie} - H_i(r, t), \quad (i=0, 1, 2) \quad (2)$$

Здесь $(km)_i = T_i$ ($i=1, 2$) — водопроницаемость-произведение коэффициента фильтрации мощности I и II напорных пластов:

μ_i^* —коэффициент упругой водоотдачи этих же слоев по В. Н. Шелкачеву [9]:

λ_1 —коэффициент фильтрации отдельного слоя, h_1 —мощность того же слоя, λ_0 —коэффициент фильтрации покровного слоя, μ_0 —коэффициент водоотдачи того же слоя, h_0 —некоторое постоянное среднее значение, $H_0(r, t)$; ε —постоянная интенсивность инфильтрации; H_{ie} —пьезометрический напор, соответственно, в покровном, I и II водоносных горизонтах в естественных условиях.

Решение системы (1) будем искать при следующих начальных и граничных условиях:

$$t=0, S_i(r, t) = 0, \quad (i=0, 1, 2); \quad t > 0, r \rightarrow \infty, S_i(r, t) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} + \alpha_T \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) = q; \quad r \rightarrow 0, S_1(r, t) + \Delta H = S_2(r, t) \quad (3)$$

$$\text{где} \quad q = -\frac{Q}{2\pi T_1} = \text{const}, \quad \alpha_T = \frac{T_2}{T_1}, \quad \Delta H = H_{2e} - H_{1e}$$

Применяя для уравнений (1) преобразование Лапласа относительно переменной t и учитывая начальные условия, получим [10]

$$b_0 \bar{S}_1 - (p + b_0) \bar{S}_0 = \frac{e}{p}$$

$$a_1 \left(\bar{S}_1 + \frac{1}{r} \bar{S}_1 \right) - (p + b_1 + b_1^*) \bar{S}_1 + b_1 \bar{S}_2 + b_1^* \bar{S}_0 = 0$$

$$a_2 \left(\bar{S}_2 + \frac{1}{r} \bar{S}_2 \right) - (p + b_2) \bar{S}_2 + b_2 \bar{S}_1 = 0 \quad (4)$$

Из совместного решения системы (4) получим

$$a_1 \left(\bar{S}_1 + \frac{1}{r} \bar{S}_1 \right) - \frac{p^2 + \gamma_1 p + \gamma_2}{p + b_0} \bar{S}_1 + b_1 \bar{S}_2 = \frac{b_1^* e}{p(p + b_0)}$$

$$a_2 \left(\bar{S}_2 + \frac{1}{r} \bar{S}_2' \right) + b_2 \bar{S}_1 - (p + b_2) \bar{S}_2 = 0 \quad (5)$$

Система уравнений (5) имеет частное решение вида \bar{S}_{10} . Легко видеть, что \bar{S}_{10} имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \bar{S}_{00}(\lambda) &= -\frac{\delta_1 \lambda + d_2}{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2 + f_1 \lambda + d_1)} - \frac{\bar{e}}{\lambda(\lambda+1)} \\ \bar{S}_{10}(\lambda) &= -\frac{\delta_1 \lambda + d_2}{\lambda^2(\lambda^2 + f_1 \lambda + d_1)}, \quad \bar{S}_{20}(\lambda) = -\frac{d_2}{\lambda^2(\lambda^2 + f_1 \lambda + d_1)} \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + B_1^0 + B_1^{*0} + B_2^0, \quad d_1 = B_2^0 B_1^{*0} + B_1^0 + B_2^0, \quad d_2 = B_2^0 B_1^0 \bar{e}, \quad \delta_1 = B_1^{*0} \bar{e} \\ B_1^0 &= \frac{b_1}{b_0}, \quad B_1^{*0} = \frac{b_1^*}{b_0}, \quad B_2^0 = \frac{b_2}{b_0}, \quad \bar{e} = \frac{e}{b_0}, \quad p = \lambda b_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Общее решение соответствующей линейной однородной системы (5) с учетом граничных условий (3) и свойств функций K_0 и I_0 , следуя [1, 3], будем искать в виде

$$\bar{S}_1 = A_1 K_0(\omega r), \quad \bar{S}_2 = A_2 K_0(\omega r) \quad (8)$$

где I_0 и K_0 — цилиндрические функции мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода нулевого порядка.

Подставляя значения \bar{S}_1 и \bar{S}_2 в однородную систему (5) и используя рекуррентные формулы Бесселя [1,3], получаем систему алгебраических уравнений относительно ω , A_1 и A_2 . Отсюда для нетривиального решения получим корни характеристического уравнения:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{b_0}{2a_2} \frac{a_0 \lambda^2 + b\lambda + c \pm f(\lambda)}{\lambda+1}}, \quad a_0 = A^0 + 1, \quad A^0 = \frac{a_2}{a_1}, \quad c = B_2^0 + A^0 B_1^0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} b &= 1 + B_2^0 + A^0(1 + B_1^0 + B_1^{*0}); \quad \gamma_3 = 1 + B_1^0 + B_1^{*0} + B_2^0, \quad \gamma_4 = B_1^0 + B_2^0(1 + B_1^{*0}) \\ \gamma_5 &= A^0(1 + B_1^0 + B_1^{*0}) - (1 + B_2^0); \quad \gamma_6 = A^0 B_1^0 - B_2^0 \end{aligned}$$

$$f(\lambda) = \sqrt{(a_0 \lambda^2 + b\lambda + c)^2 - 4A^0(\lambda+1)(\lambda^3 + \gamma_3 \lambda^2 + \gamma_4 \lambda)} \quad (10)$$

Подставляя ω_i^2 в систему алгебраических уравнений, находим значения A_1 и A_2 с точностью до постоянного множителя

$$A_{11} = C_1, \quad A_{21} = C_1 \lambda_1; \quad A_{12} = C_2, \quad A_{22} = C_2 \lambda_2 \quad (11)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{N\lambda^2 + \gamma_5 \lambda + \gamma_6 \mp f(\lambda)}{2A^0 B_1^0 (\lambda+1)} \quad (12)$$

Решение системы (5) будет

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= C_1 K_0(\omega_1 r) + C_2 K_0(\omega_2 r) + \bar{S}_{10} \\ \bar{S}_2 &= C_1 \lambda_1 K_0(\omega_1 r) + C_2 \lambda_2 K_0(\omega_2 r) + \bar{S}_{20} \end{aligned} \quad (13)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые из условия (3)

$$C_1 = \frac{q(1-\lambda_2)}{(1+\alpha_T)(\lambda_2-\lambda_1)\lambda} \frac{\Delta H}{1+\alpha_T} \frac{1+\alpha_T\lambda_2}{\lambda(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)} + \frac{\Delta \bar{S}}{1+\alpha_T} \frac{1+\alpha_T\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)}$$

$$C_2 = -\frac{q}{1+\alpha_T} \frac{1-\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda} + \frac{\Delta H}{1+\alpha_T} \frac{1+\alpha_T\lambda_1}{\lambda(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)} - \frac{\Delta \bar{S}}{1+\alpha_T} \frac{1+\alpha_T\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)} \quad (14)$$

С учетом (14), подставляя все значения в систему (5) и переходя от отображающей функции к ее оригиналу, применяя теорему обращения для преобразования Лапласа, получим [10]

$$S_i(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(\lambda z) \left[\bar{S}_0(\lambda) + \frac{q}{1+\alpha_T} (\Phi_{11}(\lambda)K_0(\omega_1 r) - \Phi_{12}(\lambda)K_0(\omega_2 r)) - \frac{\Delta H}{1+\alpha_T} \left(\Phi_{13}(\lambda) \frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} - \Phi_{14}(\lambda) \frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} \right) + \frac{\beta_1}{1+\alpha_T} \left(\Phi_{15}(\lambda) \frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} - \Phi_{16}(\lambda) \frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} \right) \right] d\lambda; \quad (i=0, 1, 2) \quad (15)$$

где $\Phi_{01}(\lambda) = \frac{1}{\lambda+1} \Phi_{11}(\lambda)$; $\Phi_{11,12}(\lambda) = \frac{A^0 B_1^0(\lambda+1)}{\lambda f(\lambda)} - \frac{1}{2\lambda} (\varphi(\lambda) \pm 1)$

$$\Phi_{13,14}(\lambda) = \frac{A^0 B_1^0(\lambda+1)}{\lambda f(\lambda)} + \frac{\alpha_T}{2\lambda} (\varphi(\lambda) \pm 1); \quad \Phi_{15,16}(\lambda) = \frac{A^0 B_1^0(\lambda+1)}{\beta(\lambda) f(\lambda)} + \frac{\alpha_T}{2\beta(\lambda)} (\varphi(\lambda) \pm 1);$$

$$\Phi_{21,22}(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} (\varphi(\lambda) \mp 1) - \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda}; \quad \Phi_{23,24}(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} (\varphi(\lambda) \mp 1) + \alpha_T \frac{\Psi(\lambda)}{\beta(\lambda)}$$

$$\Psi(\lambda) = \frac{N^2(\lambda) - f^2(\lambda)}{4A^0 B_1^0(\lambda+1) f(\lambda)} \quad (16)$$

Линейные интегралы для $S_i(r, t)$, полученные с помощью теоремы обращения, обычно вычисляются посредством перехода к замкнутому контуру с применением теоремы вычетов [1, 3, 10]. При вычислении линейных интегралов (15) встречались случаи:

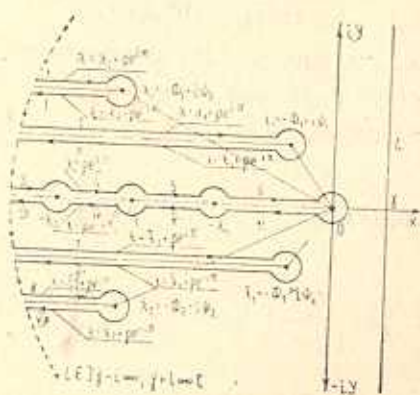
1) $\bar{S}(\lambda)$ есть однозначная функция от λ со счетным множеством полюсов. В этом случае, применяя теорему Коши, интегралы можно представить в виде

$$\int_{\gamma} = 2\pi i \sum \text{Res} \quad (17)$$

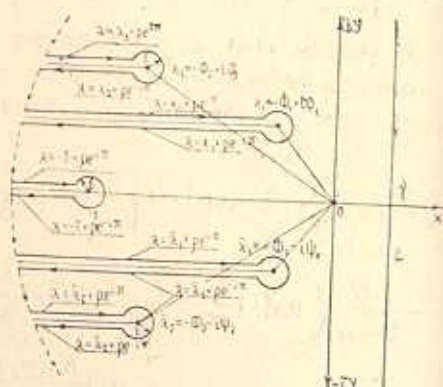
2) $\bar{S}(\lambda)$ имеет точки разветвления и конечное число полюсов. В этих случаях, используя контуры интегрирования по фиг. 2 и 3 и применяя к ним леммы Жордана и теорему Коши, интегралы (15) можно представить в виде

$$\int_{\mathcal{L}} = \int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \dots + \int_{\Gamma_n} + \sum \text{Res} \quad (18)$$

Подынтегральные функции (15) имеют особые точки в виде простых полюсов и точки разветвления.



Фиг. 2



Фиг. 3

1. Для функции $\bar{S}_{00}(\lambda)$ точки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -k_{1,2}$ — простые полюсы, а $\lambda_4 = 0$ есть полюс второго порядка.

2. Для функции $\bar{S}_{10}(\lambda)$ точки $\lambda_{1,2} = -k_{1,2}$ — простые полюсы, а $\lambda = 0$ есть полюс второго порядка.

3. Для функции $\bar{S}_{20}(\lambda)$ точки $\lambda_{1,2} = -k_{1,2}$ также простые полюсы, а $\lambda = 0$ есть полюс второго порядка, где

$$k_{1,2} = \frac{f_1}{2} \mp \sqrt{\frac{f_1^2}{4} - d_1} \quad (19)$$

4. Для функции $\omega_1(\lambda)$ точки $\lambda_j = -\Phi_{1,2} \pm i\Psi_{1,2}$ являются нулями внутреннего квадратного корня и представляют собой точки разветвления. Точка $\lambda_3 = -1$ есть точка разветвления.

5. Для функции $\omega_2(\lambda)$ точки $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2$ и $\bar{\lambda}_2$ также являются точками разветвления.

Точки $\lambda_{3,4} = -\gamma_{1,2}$ и $\lambda_5 = 0$ — нули внешнего квадратного корня являются точками разветвления. $\lambda_6 = -1$ есть точка разветвления.

Подкоренная функция внутреннего квадратного корня приводится к уравнению 4-ой степени, имеющему вид

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = 0 \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{N^2} (a_0 b - 2A^0)(1 + \gamma_3), & \beta &= \frac{1}{N^2} (2a_0 c + b^2 - 4A^0(\gamma_3 + \gamma_4)) \\ \gamma &= \frac{2}{N^2} (bc - 2A^0 \gamma_4); & \delta &= \frac{c^2}{N^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Значения $\Phi_{1,2}$ и $\Psi_{1,2}$ определяются по формулам

$$\Phi_{1,2} = \frac{\alpha}{4} \mp \sqrt{\frac{3\zeta_0 - p}{6}}, \quad \Psi_{1,2} = \sqrt{\frac{3\zeta_0 + 2p}{6} \pm 2\sqrt{2(\zeta_0 - p/3)}} \quad (22)$$

где при $D \geq 0$

$$\zeta_0 = \sqrt[3]{-\left(\frac{pr}{6} - \frac{p^3}{216} - \frac{q^2}{16}\right) + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{pr}{6} - \frac{p^3}{216} - \frac{q^2}{16}\right) - \sqrt{D}} \quad (23)$$

при $D < 0$

$$\zeta_0 = 2 \times$$

$$\times \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(\frac{pr}{3} - \frac{p^3}{108} - \frac{q^2}{8}\right) + |D|} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{\left(\frac{q^2}{8} + \frac{p^3}{108} - \frac{pr}{3}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{pr}{3} - \frac{p^3}{108} - \frac{q^2}{8}\right) + |D|}}\right) \quad (24)$$

$$\text{здесь } D = \frac{1}{4}\left(\frac{pr}{3} - \frac{p^3}{108} - \frac{q^2}{8}\right) - \frac{1}{27}\left(\frac{p^2}{12} + r\right)^3 \quad (25)$$

$$p = \beta - \frac{3\alpha}{8}, \quad q = \frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma; \quad r = \delta - \frac{\alpha\gamma}{4} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{3\alpha^4}{256} \quad (26)$$

Подкоренная функция внешнего квадратного корня приводится к квадратному уравнению.

Значения $\nu_{1,2}$ определяются по формулам

$$\nu_{1,2} = \frac{\gamma_{1,2} \mp \sqrt{\gamma_{1,2}^2 - 4\gamma_{1,4}}}{2} \quad (27)$$

Используя свойство функций $\bar{S}_{i0}(\lambda)$, ($i=0, 1, 2$), по формуле (17) получены оригиналы изображения

$$\begin{aligned} S_{00}(t) &= \frac{\delta_1 - d_2}{1 - f_1 + d_1} \exp(-\tau) + \frac{k_1 \delta_1 - d_2}{k_1^2(1 - k_1)(k_2 - k_1)} \exp(-k_1 \tau) + \\ &+ \frac{k_2 \delta_1 - d_2}{k_2^2(1 - k_2)(k_1 - k_2)} \exp(-k_2 \tau) - \left(\frac{d_2}{d_1} \tau + \frac{\delta_1 d_1 - d_2 d_2 - f_1 d_1}{d_1^2}\right) - \bar{e}(1 - \exp(-\tau)) \\ S_{10}(t) &= \frac{k_1 \delta_1 - d_2}{k_1^2(k_2 - k_1)} \exp(-k_1 \tau) - \frac{k_2 \delta_1 - d_2}{k_2^2(k_2 - k_1)} \exp(-k_2 \tau) - \left(\frac{d_2}{d_1} \tau + \frac{d_1 \delta_1 - f_1 d_2}{d_1^2}\right) \\ S_{20}(t) &= \frac{d_2}{k_1^2(k_1 - k_2)} \exp(-k_1 \tau) - \frac{d_2}{k_2^2(k_1 - k_2)} \exp(-k_2 \tau) - \frac{d_2}{d_1} \tau + \frac{f_1 d_2}{d_1^2} \quad (28) \end{aligned}$$

Вычислим обобщенные контурные интегралы такого вида [6]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\exp(\lambda \tau) K_0(\omega_{1,2} r)}{f(\lambda)} d\lambda \quad (29)$$

Легко видеть, что интегралы (15) получаются из контурных интегралов (29) после умножения на соответствующие функции от λ .

Подынтегральные функции (29) имеют точки разветвления. Поэтому при дополнении контура L влево полукругом большого радиуса надо обойти все точки разветвления.

Полученные контуры изображены на фиг. 2 и 3, соответственно, для функции $\omega_{2,1}(\lambda)$.

При $R \rightarrow \infty$ интегралы по полукругу Γ стремятся к нулю, а интегралы по малым кругам будут стремиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, при $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ вычисление интегралов сводится к интегралам по прямолинейным путям, лежащим на противоположных берегах соответствующих разрезов.

Исходные ветви многозначных функций должны быть выбраны в соответствии с условиями $\operatorname{Re} \omega_{1,2} > 0$, а значения подынтегральной функции на прямолинейных путях получаются аналитическим продолжением.

Если условиться аргумент $\lambda(\varphi)$ на L считать изменяющимся от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то соответственно можно получить значения аргументов на прямолинейных путях.

Установив исходные значения аргументов φ_i , представим их изменение, а также изменение всех величин, входящих в подынтегральные функции, в табл. 1 для контуров 3, 4, 5, 6, VI, V, IV, III.

Таблица

Путь интегрирования	φ	λ	ρ	$\bar{\rho}_1$	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\rho}_2$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\rho}_3$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\rho}_4$	$\bar{\varphi}_4$	$[\omega_2 r]$ (верхн. часть табл.)	$[\omega_1 r]$ (нижн. часть табл.)
3	π	$-\rho$	∞, ν_2	A_1	0	A_2	0	$A_3^{(3)}$	$\frac{\pi}{2}$	$\bar{r} A_7^{(3)} \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right)$			
4	π	$-\rho$	$\nu_2, 1$	A_1	0	A_3	$\frac{\pi}{2}$	$A_7^{(4)}$	0	$(\bar{r} A_7^{(4)})$			
5	π	$-\rho$	1, ν_1	A_1	0	A_2	$\frac{\pi}{2}$	$A_7^{(5)}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\bar{r} A_7^{(5)} \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right))$			
6	π	$-\rho$	$\nu_1, 0$	A_1	0	A_3	$\frac{\pi}{2}$	$A_7^{(6)}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\bar{r} A_7^{(6)} \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right))$			
VI	$-\pi$	$-\rho$	0, ν_1	A_1	0	A_3	$-\frac{\pi}{2}$	$A_7^{(6)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$(\bar{r} A_7^{(6)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right))$			
V	$-\pi$	$-\rho$	$\nu_1, 1$	A_1	0	A_2	$-\frac{\pi}{2}$	$A_7^{(5)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$(\bar{r} A_7^{(5)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right))$			
IV	$-\pi$	$-\rho$	1, ν_2	A_1	0	A_3	$-\frac{\pi}{2}$	$A_7^{(4)}$	0	$(\bar{r} A_7^{(4)})$			
III	$-\pi$	$-\rho$	ν_2, ∞	A_1	0	A_2	0	$A_7^{(3)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$(\bar{r} A_7^{(3)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right))$			
3,4	π	$-\rho$	$\infty, 1$	A_1	0	$A_2^{(3,4)}$	0	$A_7^{(3,4)}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\bar{r} A_7^{(3,4)} \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right))$			
IV,III	$-\pi$	$-\rho$	1, ∞	A_1	0	$A_2^{(3,4)}$	0	$A_7^{(3,4)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$(\bar{r} A_7^{(3,4)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right))$			

Для удобства вычислений вводим обозначения

$$\lambda = |\lambda| \exp(i\varphi), \quad f(\lambda) = \bar{\rho}_1 \exp(i\varphi_1); \quad a_0(\rho) = a_0 \rho^2 - b\rho + c$$

$$F(\lambda) = \sqrt{a_0(\lambda) + f(\lambda)} = \bar{\rho}_2 \exp(i\varphi_2), \quad \frac{F(\lambda)}{\sqrt{\lambda+1}} = \bar{\rho}_3 \exp(i\varphi_3) \quad (30)$$

В табл. 1 приняты следующие обозначения:

$$A_1(\rho) = \sqrt{a_0^2(\rho) + 4A^0\rho(1-\rho)(\rho-\nu_1)(\rho-\nu_2)} = N\sqrt{((\rho-\Phi_1)^2 + \Psi_1^2)((\rho-\Phi_2)^2 + \Psi_2^2)}$$

$$A_2^{(3,4)}(\rho) = \sqrt{a_0\rho^2 + c + A_1(\rho) - b\rho}, \quad A_2(\rho) = \sqrt{a_0\rho^2 + c - (b\rho + A_1(\rho))}$$

$$A_3(\rho) = \sqrt{A_1(\rho) + b\rho - (a_0\rho^2 + c)}; \quad A_7^{(3)} = \frac{A_2}{\sqrt{\rho-1}}; \quad A_7^{(4)} = \frac{A_2}{\sqrt{\rho-1}}$$

$$A_7^{(5)} = \frac{A_2}{\sqrt{1-\rho}}; \quad A_7^{(3,4)} = \frac{A_2^{(3,4)}}{\sqrt{\rho-1}}, \quad A_7^{(6)} = \frac{A_3}{\sqrt{1-\rho}}; \quad \bar{r} = \sqrt{\frac{b_0 r^2}{2A^0 a_1}} \quad (31)$$

Аналогичные вычисления проведены и для остальных контуров.

Проделанными вычислениями доказано, что сумма интегралов (29) на контурах $L_1=1, 1; 2, II; 7, VII; 8, VIII$ равна нулю, то есть

$$\sum \frac{1}{2\pi i} \int_{L_i} \frac{\exp(\lambda\tau)}{f(\lambda)} (K_0(\omega_1 r) - K_0(\omega_2 r)) d\lambda = 0 \quad (32)$$

Следует отметить, что отдельные интегралы (29) на указанных контурах не равны нулю, они приводятся к обычным вещественным интегралам. Значения этих интегралов в данной работе не приводятся, так как из (15) следует, что необходимо использовать (29) в виде (32).

Таким образом, следует вычислить значения (32) на контурах 3, III, 4, IV, 5, V, 6, VI.

По данным табл. 1 после довольно громоздких выкладок получим оригинал следующих функций:

$$\frac{1}{f(\lambda)} (K_0(\omega_1 r) - K_0(\omega_2 r)) = -\frac{1}{2} \left[\int_0^{\nu_1, 1} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} J_0(\bar{r} A_7^{(6)}) d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_{\nu_2}^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} J_0(\bar{r} A_7^{(3)}) d\rho - \int_1^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} J_0(\bar{r} A_7^{(3,4)}) d\rho \right]$$

$$\frac{1}{f(\lambda)} \left(\frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} - \frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_2 r_0)} \right) = -\frac{1}{2} \left[\int_0^{\nu_1, 1} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \text{Bes } 1 d\rho - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \text{Bes } 2 d\rho + \frac{2}{\pi} \left(\int_{\nu_2}^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \text{Bes } 3_1 d\rho - \int_1^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \text{Bes } 3 d\rho \right) \right] \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } \text{Bes1} &= \frac{J_0(rA_7^{(6)})}{K_0(\bar{r}_0A_7^{(5,6)})}; \quad \text{Bes2} = \frac{K_0(\bar{r}A_7^{(4)})J_0(\bar{r}_0A_7^{(3,4)})}{J_0^2(\bar{r}_0A_7^{(3,4)}) + Y_0^2(\bar{r}_0A_7^{(3,4)})} \\
 \text{Bes3}_1 &= \frac{Y_0(\bar{r}A_7^{(3)})J_0(\bar{r}_0A_7^{(3,4)}) - Y_0(\bar{r}_0A_7^{(3,4)})J_0(\bar{r}A_7^{(3)})}{J_0^2(\bar{r}_0A_7^{(3,4)}) + Y_0^2(\bar{r}_0A_7^{(3,4)})} \\
 \text{Bes3} &= \frac{Y_0(\bar{r}A_7^{(3,4)})J_0(\bar{r}_0A_7^{(3,4)}) - Y_0(\bar{r}_0A_7^{(3,4)})J_0(\bar{r}A_7^{(3,4)})}{J_0^2(\bar{r}_0A_7^{(3,4)}) + Y_0^2(\bar{r}_0A_7^{(3,4)})} \quad (34)
 \end{aligned}$$

Затем, использованием теоремы свертки легко вычисляются все интегралы системы (15).

Расчетные формулы при этом будут

$$S_i(r, t) = S_{i0}(t) - \frac{Q}{4\pi T} R_i^{(1)}(r, t) - \frac{\Delta H}{4T} T_1 R_i^{(2)}(r, t) + \frac{\delta_1}{4T} T_1 R_i^{(3)}(r, t); \quad (i=0, 1, 2) \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } R_i^{(1)}(r, t) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} \Phi_{i1}(\rho) J_0(\bar{r}A_7^{(6)}) d\rho - \int_1^{\infty} \Phi_{i2}(\rho) J_0(\bar{r}A_7^{(3,4)}) d\rho + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \Phi_{i3}(\rho) J_0(\bar{r}A_7^{(3)}) d\rho + \int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi_{i1}(\rho) J_0(\bar{r}A_7^{(6)}) d\rho \right) \\
 R_i^{(2)}(r, t) &= \int_0^{\infty} F_{i1}(\rho) \text{Bes } 1 d\rho - \frac{4}{\pi^2} \int_1^{\infty} F_{i2}(\rho) \text{Bes } 2 d\rho + \\
 &\quad + \frac{2}{\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} F_{i3}(\rho) \text{Bes } 3_1 d\rho - \int_1^{\infty} F_{i4}(\rho) \text{Bes } 3 d\rho + \int_{\frac{1}{4}}^1 F_{i1}(\rho) \text{Bes } 3_1 d\rho \right) \\
 R_i^{(3)}(r, t) &= \int_0^{\infty} \eta_{i1}(\rho) \text{Bes } 1 d\rho - \frac{4}{\pi^2} \int_1^{\infty} \eta_{i2}(\rho) \text{Bes } 2 d\rho + \\
 &\quad + \frac{2}{\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \eta_{i3}(\rho) \text{Bes } 3_1 d\rho - \int_1^{\infty} \eta_{i4}(\rho) \text{Bes } 3 d\rho + \int_{\frac{1}{4}}^1 \eta_{i1}(\rho) \text{Bes } 3_1 d\rho \right) \quad (36)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Phi_{01}(\rho) &= -[2A^0B_1^0(1-\rho)(\exp(-\rho\tau)-1) - N_1(\rho)f(\tau)]G(\rho) \\
 \Phi_{02}(\rho) &= [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) + N_2(\rho)f(\tau)]G(\rho) \\
 \Phi_{03}(\rho) &= [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) + N_1(\rho)f(\tau)]G(\rho) \\
 \Phi_{11}(\rho) &= [2A^0B_1^0(1-\rho) - N_1(\rho)](\exp(-\rho\tau)-1)G_1(\rho) \\
 \Phi_{12}(\rho) &= [2A^0B_1^0(\rho-1) + N_1(\rho)(1-\exp(-\rho\tau))]G_1(\rho) \\
 \Phi_{13}(\rho) &= [2A^0B_1^0(\rho-1) + N_2(\rho)(1-\exp(-\rho\tau))]G_1(\rho) \\
 \Phi_{21}(\rho) &= -\frac{N_2(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0} [2A^0B_1^0(1-\rho)(\exp(-\rho\tau)-1) - N_1(\rho)f(\tau)]
 \end{aligned}$$

$$\Phi_{22}(\rho) = \frac{N_1(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0} [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) + N_2(\rho)f(\tau)]$$

$$\Phi_{23}(\rho) = \frac{N_2(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0} [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) + N_1(\rho)f(\tau)]$$

$$G(\rho) = \frac{1}{\rho(\rho-1)A_1(\rho)}; \quad G_1(\rho) = \frac{1}{\rho A_1(\rho)}, \quad f(\tau) = \rho(1 - \exp(-\tau)) + \exp(-\rho\tau) - 1$$

$$F_{01}(\rho) = F_{02}(\rho) = F_{03,04}(\rho) = [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) - \alpha_T N_{1,2}(\rho)f(\tau)] G(\rho)$$

$$F_{11}(\rho) = F_{12}(\rho) = F_{13}(\rho) = [2A^0B_1^0(1-\rho) + \alpha_T N_1(\rho)](\exp(-\rho\tau)-1)G_1(\rho)$$

$$F_{14}(\rho) = [2A^0B_1^0(1-\rho) + \alpha_T N_2(\rho)](\exp(-\rho\tau)-1)G_1(\rho)$$

$$F_{21}(\rho) = F_{22}(\rho) = F_{23}(\rho) = -\frac{N_2(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0} [2A^0B_1^0(1-\rho)(\exp(-\rho\tau)-1) + \alpha_T N_1(\rho)f(\tau)]$$

$$F_{24}(\rho) = \frac{N_1(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0} [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) - \alpha_T f(\tau)N_2(\rho)]$$

$$\gamma_{01}(\rho) = \gamma_{02}(\rho) = \gamma_{03,04}(\rho) = [2A^0B_1^0\varphi(k, \tau) + \alpha_T N_{1,2}(\rho)\Psi(\rho, k, \tau)]G_1(\rho)$$

$$\gamma_{11}(\rho) = \gamma_{12}(\rho) = \gamma_{13,14}(\rho) = [2A^0B_1^0(1-\rho) + \alpha_T N_{1,2}(\rho)]\varphi(k, \tau)G_1(\rho)$$

$$\gamma_{21}(\rho) = \gamma_{22}(\rho) = \gamma_{23,24}(\rho) = \frac{N_{2,1}(\rho)G_1(\rho)}{2A^0B_1^0} [2A^0B_1^0\varphi(k, \tau) + \alpha_T N_{1,2}(\rho)\Psi(\rho, k, \tau)]$$

$$N_{1,2}(\rho) = N(\rho) \mp A_1(\rho); \quad N(\rho) = N\rho^2 - \gamma_{20}\rho + \gamma_8$$

$$\varphi(k, \tau) = \frac{1}{k_2 - k_1} \left[\frac{(\rho - k_2) \exp(-k_1\tau) - (\rho - k_1) \exp(-k_2\tau) + (k_2 - k_1) \exp(-\rho\tau)}{(\rho - k_1)(\rho - k_2)} + \frac{k_2 \exp(-k_1\tau) - k_1 \exp(-k_2\tau) + k_1 - k_2}{k_1 k_2} \right]$$

$$\Psi(\rho, k, \tau) = \frac{1}{k_2 - k_1} \times$$

$$\times \left[\frac{\sigma_1(\exp(-\tau) - \exp(-k_1\tau)) - \sigma_2(\exp(-\tau) - \exp(-k_2\tau)) + \sigma_3(\exp(-\tau) - \exp(-\rho\tau))}{\sigma_1(\rho - k_1)(k_1 - 1)} + \frac{k_2(k_2 - 1)(\exp(-\tau) - \exp(-k_1\tau)) - k_1(k_1 - 1)(\exp(-\tau) - \exp(-k_2\tau)) + \sigma_3}{k_1 k_2 (k_1 - 1)(k_2 - 1)} \right]$$

$$\sigma_1 = (\rho - k_2)(\rho - 1)(k_2 - 1); \quad \sigma_2 = (\rho - k_1)(\rho - 1)(k_1 - 1)$$

$$\sigma_3 = (k_2 - k_1)(k_2 - 1)(k_1 - 1) \quad (37)$$

Для максимальных понижений расчетные формулы принимают вид

$$S_0(r_0, t) = S_{00}(t) + \frac{Q}{4\pi T} R_0(r_0, t) - \frac{\Delta H}{T} T_2(1 - \exp(-\tau)) + \frac{\delta_1}{T} T_2 S'_{00}(t)$$

$$S_1(r_0, t) = S_{10}(t) + \frac{Q}{4\pi T} R(r_0, t) - \frac{\Delta H}{T} T_2 + \frac{T_2}{T} (S_{20}(t) - S_{10}(t))$$

$$S_2(r_0, t) = S_{20}(t) + \frac{Q}{4\pi T} R(r_0, t) + \frac{\Delta H}{T} T_1 - \frac{T_1}{T} (S_{20}(t) - S_{10}(t)) \quad (38)$$

где

$$R_0(r_0, t) = \int_1^{\infty} \frac{f(\tau)}{\rho(\rho-1)} J_0(\bar{r}_0 A_1^{(3,4)}) d\rho; \quad R(r_0, t) = \int_1^{\infty} \frac{1 - \exp(-\rho\tau)}{\rho} J_0(\bar{r}_0 A_1^{(3,4)}) d\rho$$

$$S_{00}^1(t) = \frac{1}{d_1} - \frac{\exp(-\tau)}{1-f_1+d_1} + \frac{\exp(-k_1\tau)}{k_1(k_1-k_2)(1-k_1)} + \frac{\exp(-k_2\tau)}{k_2(k_2-k_1)(1-k_2)} \quad (39)$$

Здесь J_0 и Y_0 — цилиндрические функции истинного аргумента.

Интегральные функции $R_i(r, t)$ табулированы для различных значений безразмерных комплексов, которые выражаются через гидрогеологические параметры пластов.

В результате, впервые получены оригиналы изображений функций (33) и расчетные формулы (35) и (38).

Предлагаемые решения позволяют разрешить сложные гидрогеологические задачи, связанные с проблемами осушения и использования подземных вод. Кроме этого, они могут служить критерием для оценки решения подобных задач численным методом на ЭВМ.

ԵՐԿՈՒ ՇԵՐՏԵՐԻՑ ՋՐՀԱՆՄԱՆ ԳԵՊԳՈՒՄ ԱՏՈՐԵՐԿՐՅԱ ՋՐԵՐԻ
ՇԱՐՖՈՒՄԸ ԳԵՊԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՆ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՀՈՂԱՇԵՐՏԻ ՀՈՐԱՏԱՆՑՔԸ

Ս. Մ. ԳԱԶԱՐԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկվում է հիդրավիկական կապի մեջ գտնվող երեք անսահմանափակ ջրատար հոդաշերտում ճնշումների հաշվարկման խնդիրը, երկու շերտերից գումարային հաստատուն ելքի ջրաման դեպքում:

Հավասարումների (1) համակարգը լուծված է օպերացիոն հաշվի մեթոդով: Առաջին անգամ ստացված է (29) պատկերի օրիգինալը և հաշվային (32) բանաձևերը:

THE MOTION OF UNDERGROUND WATER TO THE WELL IN A
NON-UNIFORM LAYERED STRATUM BY PUMPING-OUT FROM
TWO LAYERS

S. M. GHAZARIAN

S u m m a r y

In the article the problem of unestablished motion of underground water to the well, covered with unlimited three layered hydraulic linked medium has been considered.

Seepage of surface water, unequal head of water carrying layers and overflow by a hard regime in a separate layer have been taken into account.

According to limited conditions the choice of water from the two lower head layers is foreseen with a constant total expense and at the same time expense from separate layers are functions depending on time.

The problem is solved by an operative method and the calculation formulæ is obtained by which the hydrological state of underground waters can be estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андре-Анго*. Математика для электро- и радиотехников (перевод с франц.). М.: Наука, 1964. 772 с.
2. *Бочевер Ф. М.* К методике гидрогеологических расчетов водозаборных сооружений в слоистых водоносных толщах. Болгарская АН, сер. гидрогеология и гидрология, кн. V, 1966.
3. *Лаврентьева М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е. М.: Наука, 1958. 736 с.
4. *Олейник А. Я.* Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. Киев: Наукова думка, 1978. 192 с.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. *Уфлянд Я. С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин.—ПММ, 1948, т. 12, с. 287—300.
7. *Шестаков В. М.* Интерпретация опытных откачек при перетекании между пластами. Вестник МГУ, геология, № 6, 1983, с. 49—64.
8. *Шестаков В. М.* Фильтрационный расчет откачки из скважины в двухпластовой системе. Изв. Вузов, геология и разведка, 1982, № 1, с. 67—75.
9. *Шелкачев В. Н.* Упругий режим пластовых водонапорных систем. М.: Гостехиздат, 1959. 144 с.
10. *Эфрос А. М., Данилевский Л. М.* Операционное исчисление и контурные интегралы. Х.: Госнаучтехиздат, 1937. 383 с.

Армянский
сельскохозяйственный
институт

Поступила в редакцию
27.VII. 1984