ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, №1, 1986 Механика

УДК 519.6

СТАБИЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ В СЛУЧАЕ m ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ

ГАБРИЕЛЯН М. С.

Рассматриваются вопросы построения стабильных дорожек и интегральных многообразий для дифференциальных игр в случае m целевых множеств. На базе этих мостов определяются стратегии игроков для игры, изученной в [1]. При определенных условиях указываются наиболее узкие классы стратегий, в которых существует седловая точка игры.

§ 1. Стабильные дорожки

Пусть задана конфликтно-управляемая система

$$\dot{x}=f(t, x, u, v) \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$, функция $f(\cdot)$ и множества P, Q удовлетворяют условиям из [2].

Допустим, что заданы компакты M_k и N $(k=1, \ldots, m)$ в пространстве $\{t, x\} \in R^{n+1}$.

Определим стабильную дорожку [2] для первого игрока, распоряжающегося выбором u.

Рассмотрим уравнение в контингенциях

$$\dot{x} \in H(t, x) \quad (H(t, x) \neq \varnothing) \tag{1.2}$$

где

$$H=\bigcap_{v \in Q} co[f: f=f(t, x, u, v), \quad u \in P]$$

Пусть числа t_0 и c таковы, что $\sigma(t_0, \ldots, t_0) \leqslant c$; $t \in [t_0, \vartheta]$; здесь функция $\sigma(t_1, \ldots, t_m)$ и момент окончания игры ϑ определены в [1].

Пусть система (1.2) допускает хотя бы одно решение, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\{t_{i_k}, x=w(t_{i_k})\} \in M_{i_k}; \quad \{t, x=w(t)\} \in N \tag{1.3}$$

где $t_{i_k} \in [t_0, \vartheta]$; $i_k, i_l \in I=(1, \ldots, m)$;

$$i_k \neq i_l; \quad k \neq l; \quad \sigma(t_1, \ldots, t_m) \leqslant c$$

Обозначим через $W_{(i_k)}$ дорожку $\{t, x=w(t)\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть множества $H(t, x) \neq \varnothing$ для всякой позиции $\{t, x\}$ из открытого множества D пространства $\{t, x\} \in R^{n+1}$ и пусть существует по крайней мере одно абсолютно-непрерывное решение $x=w(t)$ уравнения (1.2), находящееся в области D и удовлетворяющее условиям (1.3). Пусть также в открытой области $D^*\subset D$ выполняется условие седловой точки [2] для маленькой игры. Тогда позиционная стратегия $U_e\div u_e(t, x)$, экстремальная к мосту $W_{\{t_k\}}$, обеспечит перемещение всех позиций $\{t, x[t, t_0, x_0, U_e]\}$ до встречи со всеми множествами M_k внутри N с показателем

$$\gamma(x[\cdot])=\sigma(\tau_1(x[\cdot]), \ldots, \tau_m(x[\cdot]))\leqslant c,$$

как бы ни действовал второй игрок.

(Функционалы $\tau_k(x[\cdot])$ $k\in I$ определены в [1]).

С целью построения v-стабильной дорожки $W^{(v)}_{\{t_k\}}$ рассмотрим следующие уравнения в контингенциях:

$$\dot{x}\in G(t, x) \qquad (G(t, x)\neq\varnothing) \tag{1.4}$$

где $\quad G(t, x)=\bigcap_{u\in P} co[f: f=f(t, x, u, v),\ v\in Q]$

Пусть система (1.4) допускает хотя бы одно решение $\{t, x=w(t)\}$ при начальных условиях $\{t_0, x_0=w(t_0)\}$, уклоняющееся от множеств M_k внутри N, то есть удовлетворяющее условиям (1.3), причем

$$\gamma(W(\cdot))=\sigma(t_1, \ldots, t_m)>c.$$

Здесь t_k—первый момент встречи решения $\{t, x=w(t)\}$ с множеством M_k внутри N. Обозначим через $W^{(v)}_{\{t_k\}}$ дорожку

$$\{t, x=w(t)\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть $G(t, x)\neq\varnothing$ для всякой позиции $\{t, x\}\in R^{n+1}$ и пусть существует по крайней мере одно абсолютно-непрерывное решение $x=w(t)$ уравнения (1.4), проходящее в области D, удовлетворяющее начальному условию $x_0=w(t_0)$ и уклоняющееся от множеств M_k внутри N в смысле $\sigma(t_1, \ldots, t_m)>c$. Пусть, также, в открытой области D^*, охватывающей кривую $\{t, x=w(t)\}$, выполняется условие седловой точки маленькой игры [2]. Тогда позиционная стратегия $V_e\div v_e(t, x)$, экстремальная к мосту $W^{(v)}_{\{t_k\}}$, обеспечит уклонение всех позиций $\{t, x[t, t_0, x_0, V_e]\}$ от встречи с множествами M_k внутри N так, чтобы $\gamma(x[\cdot])=\sigma(\tau_1(x[\cdot]), \ldots, \tau_m(x[\cdot]))>c$, как бы ни действовал первый игрок.

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 подобны доказательству аналогичных утверждений из [2].

§ 2. Стабильные интегральные многообразия

Сначала построим стабильные интегральные многообразия для первого игрока.

Пусть множества $F(t, x)\subset R^{n+1}$ выпуклы, ограничены и полунепрерывно зависят от $(t, x)\in R^{n+1}$ в открытой области D. Рассмотрим уравнение в контингенциях

$$\dot{x}\in F(t, x) \tag{2.1}$$

Пусть множества $F(t, x)$ при всех $(t, x)\in D$ удовлетворяют условию

$$F(t, x)\bigcap co[f: f(t, x, u, v),\ u\in P]\neq\varnothing \tag{2.2}$$

при любом $v\in Q$. Пусть для любой точки $(t_*, x_*)\in D$ определен пучок решения $\varkappa(t_*, x_*, D)$, каждое решение $x=x(t, t_*, x_*)$ которого удовлетворяет уравнению (2.1) и продолжено или до границы области D, или до выхода из области N.

Сформулируем следующее условие.

Условие 2.1. Примем, что выполнено это условие для точки $(t_0, x_0)\in D$ и c, если каждое решение $x=x(t, t_0, x_0)$, входящее в пучок $\varkappa(t_0, x_0, D)$, проходит через все множества M_k, $k\in I$ внутри N с показателем $\gamma(x(\cdot))=\sigma(\tau_1(x(\cdot)), \ldots, \tau_m(x(\cdot)))\leqslant c$.

Пусть $t_0\leqslant t_{i_1}\leqslant\ldots t_{i_m}\leqslant\vartheta$—произвольный набор чисел. Определим следующие множества:

$$\begin{gathered}L_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})=\{(t, x): t=t_{i_k},\ x\in M_{i_k}(t_{i_k})\bigcap\\ \bigcap[x(t_{i_k}, t_{i_{k-1}}, x_*): x(\cdot\,; t_{i_{k-1}}, x_*)\in\varkappa(t_{i_{k-1}}, x_*, D);\\ x(t, t_{i_{k-1}}, x_*)\bigcap[UM_i(t): i\in I\diagdown(i_1, \ldots, i_k)]=\varnothing \quad \text{при}\\ t_{i_{k-1}}\leqslant t< t_{i_k};\ x(t, t_{i_{k-1}}, x_*)\bigcap N(t)\neq\varnothing \quad \text{при}\\ t_{i_{k-1}}\leqslant t\leqslant t_{i_k}];\ (t_{i_{k-1}}, x_*)\in L_{k-1}(\cdot)\}\ (k=0, \ldots, m-1;\ L_0=(t_0, x_0))\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\quad M(t_*)=M\bigcap\Gamma_{t_*}=M\bigcap[(t, x): t=t_*;\ x\in R^n]$.

Обозначим через $W_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})$ замыкание в R^{n+1} множества $\{(t, x): x=x(\cdot\,; t_{i_k}, x_*)\in\varkappa(t_{i_k}, x_*, D);\ t_{i_k}\leqslant t\leqslant\tau(x(\cdot), [UM_i: i\in I\diagdown(i_1, \ldots, i_k)]; (t_{i_k}, x_*)\in L_k(\cdot)\}$ $(k=0, \ldots, m-1;\ W_0(t_{i_0}, M_{i_0})=W_0)$.

Если $W_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})\neq\varnothing$, то оно является u-стабильным мостом, обрывающимся на целевом множестве $[UM_i: i\in I\diagdown(i_1, \ldots, i_k)]$ не позже, чем в момент ϑ внутри N. (Последнее утверждение следует из условия 2.1.). Здесь через $\tau(x(\cdot), M)$ обозначен первый момент выхода $x(\cdot)$ на множество M внутри N.

Прежде чем определить кусочно-позиционную стратегию U_e (КПСU_e), сформулируем следующее утверждение, справедливость которого легко проверяется.

Лемма 2.1. Пусть система непрерывных функций $\Phi=\{\varphi(x)\}\times(\varphi(x): [a, b]\to R^n)$ компактна в себе в метрике $C_{[a,b]}$, а последовательность $\{(x_k, y_k)\}$ сходится в метрике R^{n+1} к точке $(\bar{x}, \bar{y})$ и для всех k существует $\varphi_k\in\Phi$ такое, что $y_k=\varphi_k(x_k)$. Тогда существует такое $\bar{\varphi}(\bar{x})\in\Phi$, что $\bar{y}=\bar{\varphi}(\bar{x})$.

Определим КПСU_e следующим образом.

Пусть система выходит из позиции (t_0, x_0) и первый игрок выбирает экстремальную стратегию относительно моста $W_0\neq\varnothing$. Из условия 2.1 следует, что $W_0 \neq \varnothing$ и обрывается на $[UM_i : i \in I]$ внутри N не позже, чем в момент ϑ. Следовательно, эта стратегия обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$, например, с множеством M_{j_1} $(j_1 \in I)$ в момент t_{j_1}, причем $\sigma(t_{j_1}, \ldots, t_{j_1}) \leqslant c$. Позиция $(t_{j_1}, x[t_{j_1}, t_0, x_0, U_e])$ принадлежит замыканию в R^{n+1} множества $L_1(t_{j_1}, M_{j_1}) \neq \varnothing$ Из условия 2.1 и леммы 2.1 следует, что мост $W_1(t_{j_1}, M_{j_1}) \neq \varnothing$

$$(t_{j_1}, x[t_{j_1}, t_0, x_0, U_e]) \in W_1(t_{j_1}, M_{j_1})$$

и обрывается на множестве $[UM_i : i \in I \setminus j_1]$ не позже, чем в момент ϑ. Выбирая экстремальную стратегию относительно моста $W_1(\cdot)$, первый игрок обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ с некоторым целевым множеством M_{j_2} $(j_2 \in I \setminus j_1)$ в момент t_{j_2}, причем $\sigma(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \leqslant c$, где $\vartheta_{j_1} = t_{j_1}$, $\vartheta_{j_k} = t_{j_2}$, $k = 2, \ldots, m$. (Так как в противном случае хотя бы на одном решении $x(\cdot; t_0, x_0) \in \varkappa(t_0, x_0, D)$ значение $\gamma(x(\cdot)) > c$, что противоречило бы условию 2.1). Таким образом, КПСU_e и движение $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ для двух шагов определены.

Продолжая построение КПСU_e и движения $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ до последнего шага, придем в позицию $(t_{j_{m-1}}, x[t_{j_{m-1}}, t_0, x_0, U_e])$, принадлежащую замыканию множества $L_{m-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_{m-1}}, M_{j_{m-1}}) \neq \varnothing$ (2.3), причем $\sigma(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \leqslant c$, где $\vartheta_{j_1} = t_{j_1}, \ldots, \vartheta_{j_{m-1}} = \vartheta_{j_m} = t_{j_{m-1}}$. Затем выбирая экстремальную стратегию относительно моста

$$W_{m-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_{m-1}}, M_{j_{m-1}}) \neq \varnothing$$

первый игрок обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ с множеством M_{j_m} в момент t_{j_m}, причем $\sigma(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \leqslant c$, где $\vartheta_{j_k} = t_{j_k}$ $k \in I$. (Так как в противном случае хотя бы на одном решении $x(\cdot; t_0, x_0)$ из пучка $\varkappa(t_0, x_0, D)$ значение $\gamma(x[\cdot]) > c$, что противоречило бы условию 2.1).

Отметим, что при формировании КПСU_e функция $\alpha(t, x, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ и функционалы $\varphi_k(x[\cdot])$, приведенные в [1], формально определяются следующим образом.

Пусть $t \in [t_{j_{k-1}}, \vartheta]$. Функция $\alpha(t, x, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ определяется как экстремальная стратегия $u_e(t, x)$ относительно моста $W_{k-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots$ $\ldots, t_{j_{k-1}}, M_{j_{k-1}})$. Момент t_{j_k} и функционал $\varphi_k(x[\cdot])$ определяются из условия

$$\varphi_k(x[\cdot]) = t_{j_k} = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad t_0 \leqslant t < \varkappa_{j_k} \\ \varkappa_{j_k} & \text{при} \quad \varkappa_{j_k} \leqslant t < \infty \end{cases}$$

$$\varkappa_{j_k} = \min\{t \geqslant t_{j_{k-1}} : R_k(t, x, x[t, t_0, x_0, U_e], t_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}) \cap$$

$$\cap [UM_i : i \in I \setminus (j_1, \ldots, j_{k-1})] \neq \varnothing\}$$

где $R_k(t, x, x[t, t_0, x_0, U_e], t_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}) = \{(t, w_0) : (t, w_0) \in W_{k-1}(\cdot),$ $\|x - w_0\| = \min \|x - w\|$, при $(t, w) \in W_{k-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}, M_{j_{k-1}})\}$

Номер j_k определяется как наименьший из номеров $i \in I \setminus (j_1, \ldots, j_{k-1})$, для которого $R_k(t, x, x[t, t_0, x_0, U_e], t_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}) \cap M_e \neq \varnothing$ $(k \in I)$.

Таким образом, КПСU_e и движение $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ полностью определены. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть для всякой позиции $(t, x)\in D$ выполнено условие (2.2), а для $(t_0, x_0)\in D$ и c выполнено условие 2.1. Тогда построенная КПСU_e обеспечит первому игроку сближение движения $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ со всеми множествами M_k $(k\in I)$ внутри N с показателем $\sigma(\tau_1(x[\cdot]), \ldots, \tau_m(x[\cdot]))\leqslant c$, как бы ни действовал второй игрок.

Построим стабильные интегральные множества для второго игрока. Рассмотрим систему уравнений (2.1) при выполнении всех вышеуказанных условий относительно множеств $F(t, x)$ и предположим, что вместо условия (2.2) имеет место следующее условие:

$$F(t, x)\cap co[f: f=f(t, x, u, v);\ v\in Q]\neq\varnothing \tag{2.4}$$

при любом $u\in P$ и всех $(t, x)\in D$.

Пусть для любой точки $(t_*, x_*)\in D$ определен пучок решений $\varkappa(t_*, x_*, D)$, каждое решение из которого удовлетворяет уравнениям (2.1) при (2.4) и продолжено до границы области D.

Обозначим через $G(M)$ и $H(N)$ открытые окрестности множеств M и N в пространстве $(t, x)\in R^{n+1}$.

Символом $\overline{A}$ обозначим замыкание множества A.

Сформулируем следующее условие.

Условие 2.2. Примем, что выполнено это условие для точки $(t_0, x_0)\in D$ и c, если каждое решение $x(\cdot\,; t_0, x_0, D)$, входящее в пучок $\varkappa(t_0, x_0, D)$, удовлетворяет условию $\gamma(x(\cdot))=\sigma(\tau_1(x(\cdot)), \ldots, \tau_m(x(\cdot)))>c$, то есть каждое решение $x(\cdot, t_0, x_0)$ или не встречается хотя бы с одним из множеств M_k $(k\in I)$ внутри N до момента ϑ, или выходит из N раньше, чем встречается со всеми множествами M_k $k\in I$, или проходит через N и встречается со всеми множествами с показателем $\gamma(x(\cdot))>c$.

Пусть $t_0\leqslant t_{i_1}\leqslant\ldots\leqslant t_{i_m}\leqslant\vartheta$ — произвольный набор чисел. Определим следующие множества:

$$\begin{gathered}
L_k^{(v)}(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})=\{(t, x): t=\dot{t}_{i_k};\ x=x(t_{i_k}, t_{i_{k-1}}, x_*);\\
x(\cdot\,; t_{i_{k-1}}, x_*)\in\varkappa(t_{i_{k-1}}, x_*, D);\ x(t, t_{i_{k-1}}, D)\cap[G(UM_i);\\
i\in I\setminus(i_1, \ldots, i_{k-1}))\cap\Gamma_t]=\varnothing \quad \text{при} \quad t_{i_{k-1}}\leqslant t<t_{i_k};\ x(t_{i_k}, t_{i_{k-1}};\\
x_*)\cap[G(M_{i_k})\cap\Gamma_{t_{i_k}}]\neq\varnothing;\ \ x(t, t_{i_{k-1}}, x_*)\cap[H(N)\cap\Gamma_t]\neq\varnothing
\end{gathered} \tag{2.5}$$

при $t_{i_{k-1}}\leqslant t\leqslant t_{i_k}$; $(t_{i_k}, x_*)\in L_{k-1}^{(v)}(\cdot)\}$ $(k=0, \ldots, m;\ L_0^{(v)}(t_{i_0}, M_{i_0})=(t_0, x_0))$

$$\begin{gathered}
S_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})=\{[R^{n+1}\setminus H(N)]\cap[(t, x): t_{i_{k-1}}\leqslant t\leqslant\vartheta,\ x\in R^n]\}\cup\\
\cup\{R^{n+1}\setminus\overline{L_{k+1}^{(v)}}(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k}, t_j, M_j): j\in I\setminus(i_1, \ldots, i_k);\\
t_{i_k}\leqslant t_j\leqslant\vartheta\}\quad k=0, \ldots, m-1.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Обозначим через $W_k^{(v)}(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})$ замыкание в R^{n+1} следующего множества:

$$\{(t, x): x = x(t, t_{i_{k-1}}, x_*);\ x(\cdot\,;\ t_{i_{k-1}}, x_*) \in \varkappa(t_{i_{k-1}}, x_*, D);$$

$$t_{i_{k-1}} \leqslant t \leqslant \tau(x(\cdot), S_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k}));\ (t_{i_k}, x_*) \in L_k(\cdot)\} \qquad (2.7)$$

$$k = 0, \ldots, m-1$$

Множество $W_k^{(v)}(\cdot)$ является v-стабильным и обрывается на множестве $S_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})$.

Затем подобными рассуждениями, как при доказательстве теоремы 2.1, используя условие 2.2 вместо условия 2.1, строится КПСV_e— экстремальная к системе мостов $W_k^{(v)}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_k}, M_{j_k})$. Имея в виду, что моменты $t_{j_1}, \ldots, t_{j_m}$, участвующие в определении мостов $W_k^{(v)}(\cdot)$, на движениях $x[t, t_0, x_0, V_e]$ удовлетворяют условию 2.2, а $t_{j_k} < \tau_{j_k}(x[\cdot])$ при $k \in I$, заключаем, что на всех движениях $x[t, t_0, x_0, V_e]$ выполняется неравенство $\gamma(x[\cdot\,;\ t_0, x_0, V_e]) > c$.

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 2.2. Пусть для всякой позиции $(t, x) \in D$ выполнено условие (2.4), а для $(t_0, x_0) \in D$ и c выполнено условие 2.2. Тогда КПСV_e, экстремальная к системе мостов $W_k^{(v)}(\cdot)$ (2.7), обеспечит второму игроку результат $\gamma(x[\cdot]) = \sigma(\tau_1(x[\cdot]), \ldots, \tau_m(x[\cdot])) > c$, на всех движениях $x[t, t_0, x_0, V_e]$, как бы ни действовал первый игрок.

§ 3. Альтернативные утверждения и оптимальные стратегии на базе априори стабильных мостов

Покажем, что в рассматриваемой игре имеют место утверждения типа альтернативы [2] в классах чисто-позиционных стратегий первого игрока и кусочно-позиционных стратегий второго игрока и в классах кусочно-позиционных стратегий первого игрока и чисто-позиционных стратегий второго.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть для всех позиций (t, x) из некоторой открытой области D, содержащей начальную позицию (t_0, x_0), выполнены условия седловой точки в маленькой игре и условия леммы 49.3 из [2]. Если при этом существует решение $x = w(t, t_0, x_0)$ уравнения (1.4), для которого позиция $(t, w(t, t_0, x_0))$ уклоняется от множеств M_i $(i \in I)$ внутри N в смысле $\sigma(\cdot) > c$, то экстремальная к дорожке $W_{(t_k)}^{(v)}$ стратегия $V_e \div v_e(t, x)$ обеспечит перемещение всех позиций $\{t, x[t, t_0, x_0, U_e]\}$ с показателем $\sigma(\cdot) > c$. В противном случае КПСU_e обеспечит сближение движения $\{t, x[t, t_0, x_0, U_e]\}$ со всеми множествами M_i внутри N с показателем $\sigma(\cdot) \leqslant c$.

Справедливость первой части теоремы вытекает из теоремы 1.2, а второй части—из теоремы 2.1.

Из теоремы 1.1 и 2.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2. Пусть для всех позиций (t, x) из некоторой открытой области D, содержащей (t_0, x_0) и множество N, выполнены условие седловой точки в маленькой игре и условие леммы 49.4 из [2]. Если при этом существует решение $x = w(t, t_0, x_0)$ уравнения (1.2), для которого позиция $(t, w(t, t_0, x_0))$ сближается со всеми множествами M_i $(i \in I)$ внутри N в смысле $\sigma(\cdot) \leqslant c$ [1], то позиционная стратегия $U_c \div u_c(t, x)$, экстремальная к дорожке $(t, x = w(t, t_0, x_0))$, гарантирует для всех движений $(t, x[t, t_0, x_0, U_c])$ сближение со всеми множествами M_i $i \in I$ внутри N в смысле $\sigma(\cdot) \leqslant c$. В противном случае кусочно-позиционная стратегия второго игрока (КПСV_c), определенная на множестве пучков из решений уравнения (1.2), обеспечит уклонение движения $(t, x[t, t_0, x_0, V_c])$ от множеств M_i внутри N в смысле $\sigma(\cdot) > c$.

В заключение этого параграфа покажем, что при определенных условиях на базе стабильных дорожек и стабильных интегральных многообразий существуют оптимальные стратегии из класса чисто-позиционных для первого игрока и кусочно-позиционных для второго игрока. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.3. Пусть все условия теоремы 3.2. выполнены. Тогда игра на минимакс-максимин полунепрерывного снизу функционала $\sigma(\cdot)$ [1] имеет седловую точку (U^0, КПСV^0) в классе чисто-позиционных стратегий первого игрока и кусочно-позиционных стратегий второго.

Доказательство. Пусть $(t_0, x_0) \in D$ и из точки (t_0, x_0) выходит пучок решений $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$ уравнения (1.2) в случае, когда условия леммы 49.4 из [2] выполнены. Предположим, что среди этих решений найдется, по крайней мере, одно решение $x = w(t, t_0, x_0)$, на котором функционал $\sigma(\tau_1(w(\cdot)), \ldots, \tau_m(w(\cdot)))$ принимает конечное значение. Продолжим все решения пучка $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$ в замыкание множества $[(t, x) : (t, x) \in R^{n+1}, (t, x) \overline{\in} N]$ до момента ϑ так, чтобы полученный пучок был компактным в себе в метрике $C_{[t_0, \vartheta]}$. Здесь момент ϑ определяется как в [1], но для $c = \sigma(\tau_1(w(\cdot)), \ldots, \tau_m(w(\cdot)))$. Тогда определенный на компактном в себе множестве функций из $C_{[t_0, \vartheta]}$ полунепрерывный снизу функционал $\sigma(\cdot)$ принимает конечное значение

$$\gamma^0 = \sigma(\tau_1(w^0(\cdot)), \ldots, \tau_m(w^0(\cdot)))$$

Покажем, что γ^0 определит цену игры. В самом деле, с одной стороны, чисто-позиционная стратегия $U_c^0 \div u_c^0(t, x)$, экстремальная к дорожке $(t, w^0(t, t_0, x_0))$, обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_c^0])$ со всеми множествами M_k $k \in I$ внутри N с показателем $\sigma(\cdot) \leqslant \gamma^0$, с другой стороны, при любом $c < \gamma^0$, согласно теореме 3.2, на базе пучка $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$ всех решений уравнения (1.2) можно определить КПСV_c второго игрока, обеспечивающая уклонения всех движений $(t, x[t, t_0, x_0, V_c])$ от множеств M_k внутри N с показателем $\sigma(\cdot) > c$. Но так как обе стратегии (U_c^0, КПСV_c^0) формируются на одном и том же пучке, то КПСV_c^0 обеспечит второму игроку результат $\sigma(\cdot) \geqslant \gamma^0$ на движениях $\{t, x[t, t_0, x_0, V_c^0]\}$.

Пусть теперь, среди решений уравнения (1.2) нет ни одного, на котором функционал $\gamma(\cdot)$ принимал бы конечное значение. Тогда КПСV_c^0, определенная на базе пучка $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$, обеспечит уклонения всех движений $\{t, x[t, t_0, x_0, V_c^0]\}$ в смысле $\gamma(x[\cdot])=\infty$.

Утверждение теоремы 3.3 будет справедливым, если полагать $\gamma^0=\gamma_0=\infty$.

Таким образом, теорема 3.3 полностью доказана.

Автор благодарит академика Н. Н. Красовского за постановку задачи.

ՍՏԱԲԻԼ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂԵՐՈՒՄ m ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են ստաբիլ ճանապարհների և ինտեգրալ բազմաձևերի կառուցման հարցերը, համապատասխան կոնտինգենցիաներով հավասարումների լուծումների հիման վրա։ Խզելով այդ լուծումները հատուկ ձևով ընտրված բազմությունների վրա կառուցվում են ստաբիլ կամուրջների համակարգեր, որոնց նկատմամբ էքստրեմալ ստրատեգիան ապահովում է m բազմությունների հետ մոտեցման և նրանցից գոնե մեկից շեղման խնդիրների լուծումը։ Որոշակի պայմանների դեպքում նշվում են ստրատեգիաների ամենանեղ դասերը, որոնցում գոյություն ունեն օպտիմալները, երբ խաղի գինը որոշվում է մեկ ներքևից կիսաանընդհատ բավականին ընդհանուր տեսքի ֆունկցիոնալով։

STABLE SETS IN DIFFERENTIAL GAMES IN CASE OF m AIM SETS

M. S. GABRIELIAN

Summary

The question of building stable paths and integral manifolds are considered here on the basis of solutions of corresponding equations at contingations. Breaking these solutions into specially chosen sets, stable bridges are constructed. The extremal strategies related to those bridges provide the necessary result of the game, as well as the approach to every set or the derivation from at least one of the m aim sets.

In certain conditions the narrowest classes of strategies, in which the optimal ones exist, are indicated, when the value of the game is determined by a semi-continued functional from below, which has a rather general form.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габриелян М. С.* Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами.—ПММ, 1979, т. 43, № 2.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 17.IV. 1984