ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

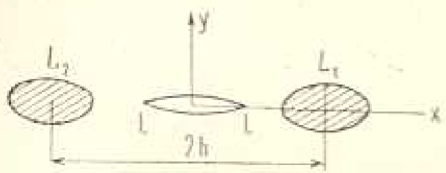
УДК 539.375

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

КАЛОЕРОВ С. А.

В работе [1] приведен метод определения напряженного состояния и коэффициента интенсивности напряжений для антиплоской деформации многосвязного тела с трещинами, исследовано влияние их близости к поверхностям цилиндрических полостей и «степень» анизотропии материала на концентрацию напряжений. В данной статье исследуется влияние упругих включений на изменение концентрации напряжений. Аналогичные исследования влияния круговых упругих включений для плоской задачи изотропного тела приведены в работах [3—7].

§ *1*. Рассмотрим бесконечное ортотропное или изотропное тело с двумя одинаковыми эллиптическими (круговыми) цилиндрическими включениями из упругого материала и симметричной «туннельной» трещиной между ними. Будем предполагать, что на поверхности соприкосновения имеют место условия идеального контакта, на бесконечности тело загружено усилиями $\tau_{yz}^{\infty}=p$, $\tau_{xz}^{\infty}=0$. В сечении тела с плоскостью, перпендикулярной оси продольного сдвига, получается многосвязная область, ограниченная эллипсами L_1, L_2 и разрезанная отрезком длины $2l$ (фиг. 1). Обозначим полуоси эллипсов и расстояние между их центрами через a, b и $2h$. В качестве частного случая будем рассматривать также тело с трещиной и одним правым включением.



Фиг. 1

Определение напряженного состояния рассматриваемого кусочно-однородного тела сводится [1] к нахождению комплексных потенциалов $\varphi_3(z_3)$ и $\varphi_3^1(z_3^1)$ из соответствующих граничных условий.

Функция $\varphi_3(z_3)$ кусочно-голоморфна в многосвязной области S_3, ограниченной контурами L_{31}, L_{32}, получаемыми из L_1 и L_2 аффинным преобразованием $z_3=x+i\beta_3 y$, где $\beta_3=\sqrt{G_{xz}/G_{yz}}$; G_{xz}, G_{yz} — модули сдвига для соответствующих направлений. Отрезок $[-l, l]$ является линией скачков $\varphi_3(z_3)$.

Функция $\Phi_3(z_3)=\varphi_3'(z_3)$ имеет вид [1]

$$\Phi_3(z_3)=\frac{d_{30}z_3}{X(z_3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{X(z_3)}\left[\frac{1}{\zeta_1^k}+\frac{r(-1)^{k+1}}{\zeta_2^k}\right] \tag{1.1}$$

Здесь $d_{30}=p/2;\quad X(z_3)=\sqrt{z_3^2-l^2}$

$\zeta_i(z_3)$—переменные, определяемые из зависимостей

$$z_3-h=R_3\left(\zeta_1+\frac{m_3}{\zeta_1}\right);\quad z_3+h=R_3\left(\zeta_2+\frac{m_3}{\zeta_2}\right) \tag{1,2}$$

$$R_3=\frac{a+\beta_3 b}{2};\quad m_3=\frac{a-\beta_3 b}{a+\beta_3 b} \tag{1.3}$$

r—величина, равная 0 для случая одного включения и 1 для случая двух включений; b_k—неизвестные вещественные постоянные.

Функция $\varphi_3^1(z_3^1)$ голоморфна в эллипсе L_{31}^1, получаемом из L_1 аффинным преобразованием $z_3^1=x+i\beta_3^1 y$, где $\beta_3^1=\sqrt{G_{xz}^1/G_{yz}^1}$, G_{xz}^1, G_{yz}^1—модули сдвига для материала включений. Поэтому $\varphi_3^1(z_3^1)$ можно разложить в ряд по полиномам Фабера для эллипса L_{31}^1 [2]

$$\varphi_3^1(z_3^1)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k P_k(z_3^1) \tag{1.4}$$

Здесь

$$P_0=1,\quad P_k(z_3^1)=\zeta_3^k+m_3^k\zeta_3^{-k} \tag{1.5}$$

ζ_3—переменная, определяемая из зависимости

$$z_3^1-h=R_3^1\left(\zeta_3+\frac{m_3^1}{\zeta_3}\right);\quad R_3^1=\frac{a+\beta_3^1 b}{2};\quad m_3^1=\frac{a-\beta_3^1 b}{a+\beta_3^1 b} \tag{1.6}$$

Из условий идеального контакта (напряжения и перемещения на поверхности равны) получим

$$2\,\mathrm{Re}\,\varphi_3(z_3)=2\,\mathrm{Re}\,\varphi_3^1(z_3^1);\quad 2\,\mathrm{Re}\,[i\varphi_3(z_3)]=\frac{\varkappa^1}{\varkappa}2\mathrm{Re}\,[i\varphi_3^1(z_3^1)] \tag{1.7}$$

При этом

$$\varkappa=\sqrt{1/G_{xz}G_{yz}};\quad \varkappa^1=\sqrt{1/G_{xz}^1G_{yz}^1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.7) на контуре L_1 (при этом в случае двух включений условия на L_2 в силу использованной симметрии удовлетворяются автоматически) таким же образом, как и в работе [1], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения b_k, β_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(B_{k-1}-m_3B_{k+1})b_k=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(1+\delta_n^1 m_3)B_{k+n-1}-m_3B_{k+n+1}+(1+m_3^n)r(D_{kn-1}-m_3D_{kn+1})]b_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(1-\delta_n^1)m_3^kB_{k-1}b_{n-k}-\sum_{k=1}^{n+1}m_3^{k-1}B_{k-1}b_{n-k+2}+\sum_{k=n}^{\infty}(1-\delta_n^1)m_3B_{k-n+1}b_k-$$

$$-\sum_{k=n+2}^{\infty} B_{k-n-1} b_k - \frac{n}{R_3}(1+m_{31}^{1n})\beta_n = -(1+m_3^n)d_{30}(B_{1n-1}-m_3B_{1n+1})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[B_{k+n-1}-m_3B_{k+n+1}+r(D_{kn-1}-m_3D_{kn+1})]b_k - \qquad (1.8)$$

$$-\frac{n}{2R_3}\left[1+\frac{\varkappa^1}{\varkappa}+m_{31}^{1n}\left(1-\frac{\varkappa^1}{\varkappa}\right)\right]\beta_n = -d_{30}(B_{1n-1}-m_3B_{1n+1})$$

где B_n, B_{1n}, D_{kn}—коэффициенты следующих разложений:

$$X^{-1}(z_3)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nP_n(z_3);\quad z_3X^{-1}(z_3)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{1n}P_n(z_3)$$

$$(-1)^{k+1}X^{-1}(z_3)[\zeta_2(z_3)]^{-k}=\sum_{n=0}^{\infty}D_{kn}P_n(z_3) \qquad (1.9)$$

$P_n(z_3)$—полиномы Фабера для эллипса L_{31}.

После решения системы (1.8) будут известными функции $\Phi_3(z_3)$ и $\Phi_3^1(z_3^1)=\varphi_3^{'1}(z_3^1)$. Это позволяет найти напряжения

$$\tau_{xz}=-2\,\mathrm{Re}\,[i\beta_3\Phi_3(z_3)];\quad \tau_{yz}=2\,\mathrm{Re}\,\Phi_3(z_3)$$

$$\tau_{xz}^1=-2\mathrm{Re}[i\beta_3^1\Phi_3^1(z_3^1)];\quad \tau_{yz}^1=2\,\mathrm{Re}\,\Phi_3^1(z_3^1) \qquad (1.10)$$

а также коэффициент интенсивности напряжений [1]

$$k_3^{\pm}=2d_{30}\sqrt{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2b_k}{\pm\sqrt{l}}\left[\frac{1}{\zeta_1^k(\pm l)}+\frac{r(-1)^{k+1}}{\zeta_2^k(\pm l)}\right] \qquad (1.11)$$

При вычислении $\Phi_3^1(z_3^1)$ нужно пользоваться формулой [2]

$$P'_{k+1}(z_3^1)=\frac{k+1}{k}\,\frac{z_3^1-h}{R_3^1}P'_k(z_k^1)-\frac{k+1}{k-1}m_3^1P'_{k-1}(z_3^1)\quad (k=2,\ 3,\ \ldots)$$

$$P'_1(z_3^1)=\frac{1}{R_3^1};\quad P'_2(z_3^1)=\frac{2(z_3^1-h)}{(R_3^1)^2} \qquad (1.12)$$

§ 2. Численные исследования были проведены для случая, когда упругие постоянные включений были пропорциональны упругим постоянным тела

$$G_{xz}^1=\lambda G_{xz};\quad G_{yz}^1=\lambda G_{yz} \qquad (2.1)$$

Для таких включений

$$\beta_3^1=\beta_3;\quad R_3^1=R_3;\quad m_3^1=m_3;\quad \varkappa^1/\varkappa=\lambda^{-1} \qquad (2.2)$$

В табл. 1 приведены значения k_{30}—отношения коэффициента интенсивности напряжения k_3 к соответствующему коэффициенту $k_3^0=p\sqrt{l}$ для бесконечного однородного тела с трещиной, а в табл. 2 с точностью до множителя p—значения максимальных нормальных напряжений в теле около контура его контакта с правым включением. При этом считалось, что $b/a=1$, $h/a=1{,}25$; $\varepsilon=l/(h-a)=0{,}5$. Коэффициент $k_{30}^{\pm}$ и данные табл. 2 относятся к случаю двух включений, k_{30}^{+}, k_{30}^{-}—коэффициенты для правого и левого концов трещины соответственно; значение $\lambda^{-1}=\infty$ соответствует случаю неподкрепленных полостей.

Таблица 1

$\frac{G_{xz}}{G_{yz}}$	k_{30}	λ^{-1}						
		∞	100	10	2	0,5	0,1	0,01
0,5	$k_{30}^{\pm}$	3,267	3,192	2,648	1,509	0,630	0,254	0,160
	k_{30}^{+}	1,913	1,891	1,716	1,263	0,769	0,480	0,295
	k_{30}^{-}	1,682	1,665	1,536	1,197	0,826	0,607	0,542
1,0	$k_{30}^{\pm}$	3,147	3,083	2,601	1,521	0,602	0,178	0,067
	k_{30}^{+}	1,781	1,765	1,634	1,254	0,752	0,401	0,286
	k_{30}^{-}	1,621	1,608	1,506	1,204	0,800	0,514	0,420
2,0	$k_{30}^{\pm}$	2,977	2,919	2,482	1,493	0,606	0,155	0,027
	k_{30}^{+}	1,635	1,624	1,529	1,227	0,753	0,352	0,204
	k_{30}^{-}	1,532	1,523	1,445	1,192	0,789	0,440	0,316

Таблица 2

$\frac{G_{xz}}{G_{yz}}$	λ^{-1}	τ	θ°							
			0	30	60	90	120	150	165	180
0,5	∞	τ_θ	2,69	1,90	0,86	0,16	0,56	1,94	3,16	4,80
	2	τ_θ	1,45	1,14	0,59	0,03	0,54	1,15	1,49	1,93
	0,5	τ_r	0,00	0,62	1,07	1,23	−1,04	−0,56	−0,31	0,00
	0,1	τ_r	0,00	0,78	1,34	1,51	−1,22	−0,58	−0,27	0,00
1,0	∞	τ_θ	2,22	1,96	1,25	0,28	0,77	2,01	2,82	4,29
	2	τ_θ	1,38	1,20	0,71	0,05	0,62	1,20	1,43	1,87
	0,5	τ_r	0,00	0,66	1,13	1,29	−1,07	−0,55	−0,29	0,00
	0,1	τ_r	0,00	0,88	1,51	1,69	−1,32	−0,54	−0,22	0,00
2	∞	τ_θ	1,89	1,90	1,70	0,49	1,00	1,96	2,53	3,89
	2	τ_θ	1,31	1,22	0,89	0,10	0,74	1,20	1,37	1,80
	0,5	τ_r	0,00	0,70	1,21	1,37	−1,11	−0,53	−0,26	0,00
	0,1	τ_r	0,00	1,03	1,75	1,93	−1,44	−0,47	−0,15	0,00

Из таблиц следует, что подкрепление полостей упругими включениями приводит к снижению концентрации напряжений около трещины и полостей. Анизотропия материала существенно влияет на напряженное состояние тела, если жесткость включений значительно отличается от жесткости материала тела ($\lambda \geq 10$; $\lambda \leq 0{,}1$).

ՃԱՔՈՎ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐԱԿՆԵՐՈՎ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ

Ս. Ա. ԿԱԼՈԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

[1] աշխատանքում բերված է ճաքով բազմաշերտ մարմնի հակահարթ դեֆորմացիայի համար լարվածային վիճակի և լարումների ինտենսիվության

գործակցի որոշման մեթոդ։ Ներկա աշխատանքում հետազոտված է լարումների կոնցենտրացիայի փոփոխման վրա առաձգական ներդրակների ազդեցությունը։

ANTIPLANE BODY DEFORMATION WITH CRACH AND ELLIPTICAL ELASTIC INCLUSIONS

S. A. KALOYEROV

Summary

The distribution of strains in an anisotropic or isotropic body with „tunnel“ crack and elliptical elastic inclusions is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоеров С. А.* Антиплоская деформация многосвязных тел с трещинами.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, т. *38*, № 6.
2. *Космодамианский А. С., Калоеров С. А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев-Донецк: Вища школа, Головное изд-во. 1982. 159 с.
3. *Atkinson C.* The interaction between a crack and an inclusion.—Int. J. Eng. Sci., 1972, vol. 10, № 2, p.p. 127—136.
4. *Erdogan F., Gupta G. D.* The inclusion problem with a crack crossing the boundary.—Int. J. Fract., 1975, vol. 11, № 1, pp. 13—27.
5. *Erdogan F., Gupta G. D., Ratwani M.* Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack.—J. Appl. Mech., Trans. ASME, ser. E, 1974, vol. 41, № 4, pp. 1007—1013.
6. *Hsu Y. C., Shivakumar V.* Interaction between an elastic circular inclusion and two symmetrically placed collinear cracks.—Int. J. Fract., 1976, vol. 12, № 4, pp. 619—630.
7. *Tamate O.* The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension.—Int. J. Fract. Mech., 1968, vol. 4, № 3, pp. 257—266.

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию
14.II.1983