ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 620.1+539.4

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАСТУЩЕГО ТЕЛА

ТРИНЧЕР В. К.

Постановки задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) растущих тел даны в ряде работ [1—8]. Однако, в указанных работах вводились более или менее существенные ограничения на модель среды и условия на растущей границе. Ниже рассматривается общая геометрическая линейная квазистатическая постановка задачи расчета растущих тел в приложении к растущему круговому цилиндру; дано доказательство корректности постановки. Для линейно-упругого цилиндра, находящегося в состоянии плоской деформации, решение задачи сведено к квадратурам. Для наиболее исследованного в литературе случая осесимметричного НДС [9—12] получено конечное решение задачи при произвольных условиях на растущей границе, а также общее решение обратной задачи, то есть задачи определения условий на растущей границе, обеспечивающих получение требуемого НДС к концу роста тела.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ тело занимает объем

$$\Omega(0):\quad r=x_1\in[r_0, r_1],\quad \theta=x_2\in[0, 2\pi],\quad z=x_3\in[z_1, z_2]$$

Растущая граница задана монотонной функцией одного переменного:

$$x_1=f(t)\quad (f(0)=r_1)\quad \text{или}\quad t=t^*(x_1).$$

Поле температур также задано: $T=T(x, t)$. Постановка задачи включает в себя следующие соотношения:

1. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{1}{x_1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{x_1}=0\quad \text{и т. д.}\tag{1}$$

2. Соотношения Коши для тензора скоростей полных деформаций

$$\dot e_{11}=\frac{\partial\dot u_1}{\partial x_1},\quad \dot e_{12}=\frac{1}{x_1}\frac{\partial\dot u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\dot u_2}{\partial x_1}-\frac{\dot u_2}{x_1}\quad \text{и т. д.}$$

$$\left(\dot u(\vec x, t)=\frac{\partial u(\vec x, t)}{\partial t}\right)\tag{2}$$

Относительно этих соотношений см. замечания ниже.

3. Выражения для тензора скоростей силовых деформаций

$$\dot{e}^c_{ij} = \dot{e}_{ij} - \dot{e}^T_{ij} \tag{3}$$

где тензор скоростей температурных деформаций $\dot{e}^T_{ij}$ предполагается известным в силу заданности поля температуры и определяется, например, соотношениями

$$\dot{e}^T_{ij} = \alpha_k(T)\delta_{ik}\delta_{kj}\dot{T}(\vec{x}, t)$$

4. Какие-либо уравнения состояния, для определенности примем соотношения нелинейной вязкоупругости

$$\dot{\sigma}_{ij} - A_{ijkl}(e^c_{mn}, T)\dot{e}^c_{kl} = \rho(\sigma_{ij} - B_{ijkl}e^c_{kl}) \tag{4}$$

(здесь заложено предположение, что полный тензор силовых деформаций e^c_{ij} есть $e^c_{ij} = \int \dot{e}^c_{ij}(\vec{x}, \tau)d\tau$, что является приближенно верным равенством при малых деформациях; таким образом, речь идет о постановке задачи при малых деформациях и перемещениях).

Полная система уравнений (1)—(4) должна быть дополнена начальными и граничными условиями. В начальном объеме $\Omega(0)$ условия при $t=0$ зависят, как известно, от принимаемой модели среды; при модели среды типа (4) эти условия в общем случае могут быть записаны в виде (как в общем случае и для тела со стационарной границей)

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, 0) = \sigma^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad e^c_{ij}(\vec{x}, 0) = e^{н}_{ij}(\vec{x}) \tag{5'}$$

$$e_{ij}(\vec{x}, 0) = 0, \quad u_i(\vec{x}, 0) = 0 \quad (r_0 \leqslant x_1 \leqslant r_1) \tag{5''}$$

При этом функции $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$ удовлетворяют уравнениям равновесия и соответственно независимыми среди них являются 3 функции; функции $e^{н}_{ij}(\vec{x})$ при модели среды типы (4) все являются независимыми. Соотношения (5″) не существенны в этом смысле, что начальные значения величин e_{ij} и u_i могут быть заданы и произвольными функциями от $\vec{x}$; вид этих функций, как видно из системы (1)—(4), куда величины e_{ij} и u_i входят только их частными производными по t, не влияет на расчет величин σ_{ij}, e^c_{ij}, $\Delta e_{ij} = e_{ij}(\vec{x}, t) - e_{ij}(\vec{x}, 0)$, $\Delta u_i \equiv u_i(\vec{x}, t) - u_i(\vec{x}, 0)$. Отметим, что именно эти последние величины являются, в принципе, однозначно определенными; напротив, начальным значениям величин e_{ij} и u_i соответствуют произвольные начальные показания деформометров и индикаторов перемещения. Соотношения (5″) принимаются, таким образом, для удобства (как это обычно делается и в постановках для тела со стационарной границей).

На стационарной части границы принимаются какие-либо стандартные граничные условия, например:

$$\lambda\sigma_{1i}(r_0, x_2, x_3, t) - u_i(r_0, x_2, x_3, t) = 0$$

$$\sigma_{3i}(x_1, x_2, z_1, t) = \sigma_{3i}(x_1, x_2, z_2, t) = 0 \tag{6}$$

На растущей части границы необходимо задание полного НДС; для растущего тела с моделью среды типа (4), это означает

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t^*(x_1)) = \sigma^{\text{н}}_{ij}(\vec{x}), \quad e^{\text{с}}_{ij}(\vec{x}, t^*(x_1)) = e^{\text{н}}_{ij}(\vec{x}) \tag{7'}$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t^*(x_1)) = 0, \quad u_i(\vec{x}, t^*(x_1)) = 0, \quad (r_1 < x_1) \tag{7''}$$

Для соотношений (7") полностью справедливы вышесделанные замечания относительно (5"). Тензора $\sigma^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$, $e^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$ при $x_1 > r_1$ должны быть определены из технологии или физики роста тела до решения краевой задачи, как, вообще говоря, двенадцать независимых функций; при упругой модели среды независимыми являются шесть функций, например, $\sigma^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$. Необходимость задания полного НДС на растущей границе можно пояснить следующими соображениями: непрерывный рост тела можно рассматривать как предельный случай сопряжения тел, и задание НДС на растущей границе («внутри» границы) соответствует заданию начального НДС в бесконечно малом объеме $d\Omega(t)$, присоединяемому к телу в момент t за время dt. Из требования самоуравновешенности НДС в бесконечно малом объеме не следует при $x_1 > r_1$ ограничения непосредственно на величины $\sigma^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$ (см. ниже).

Возможность независимого задания тензоров $\sigma^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$ и $e^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$ на растущей границе можно проиллюстрировать на следующем идеализированном технологическом процессе. Пусть растущий цилиндр образуется намоткой вязкоупругой ленты (с уравнением состояния типа (4)), причем лента после вхождения в контакт с растущим телом образует сплошную среду с уравнением состояния исходного материала. Компоненты тензора $\sigma^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$ определяются натяжением ленты и давлением в среде, в которой происходит намотка, а компоненты тензора силовых деформаций $e^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$ определяются временем нахождения ленты в нагруженном состоянии до вхождения в контакт с наматываемым цилиндром. Все компоненты тензоров $\sigma^{\text{н}}_{ij}$ и $e^{\text{н}}_{ij}$ (кроме, очевидно, компонент, являющихся нулевыми в силу симметрии наматываемого тела) в данном случае легко определяются и могут независимо задаваться варьированием параметров технологии намотки.

Для постановки задачи об определении НДС растущего тела существенным является использование соотношений Коши в их первичном виде, то есть относительно скоростей тензора полных деформаций. Из этих соотношений следует приближенная справедливость соотношений Коши относительно тензора полных деформаций $\varepsilon_{ij} \simeq e_{ij}$ для тела со стационарной границей. Действительно, имеем, например,

$$\frac{\partial u_1(\vec{x}, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_0^t \dot{u}_1(\vec{x}, \tau) d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} d\tau = \int\limits_0^t \dot{e}_{11} d\tau = e_{11}(\vec{x}, t) \tag{8}$$

Для тела с растущей границей имеем, напротив, неравенство

$$\frac{\partial u_1(\vec{x}, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{u}_1 d\tau = e_{11}(\vec{x}, t) - \dot{u}_1(\vec{x}, t^*(x_1)) \frac{dt^*}{dx_1} \neq e_{11}(\vec{x}, t) \qquad (9)$$

Итак, специфика постановки (1)—(7) задачи для растущего тела заключается: 1) в использовании соотношений Коши только в виде (2); 2) в формулировке граничных условий на растущей части границы в виде (7).

Для доказательства корректности постановки (1)—(7) приведем ее к следующему эквивалентному виду: рассмотрим систему уравнений (2)—(4) и уравнения (1), взятого в продифференцированном по t виде. Относительно уравнения состояния (4) необходимо заметить, что если, в частности, имеем упругую модель среды, то уравнение состояния также берем в виде, продифференцированном по t. Так сформированную систему уравнений обозначим (1')—(4'). Граничные условия на стационарной части границы также продифференцируем по времени (и обозначим (6')).

Покажем теперь, что из граничных условий (7) следуют стандартные граничные условия 2-го рода относительно компонент тензора $\dot{\sigma}_{ij}$. Действительно, подставляя следующие из (7) равенства вида

$$\frac{\partial \sigma_{11}(x, t^*(x_1))}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma^{\text{н}}_{11}(x)}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_{11}(x, t^*(x_1)) \frac{dt^*}{dx_1}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma^{\text{н}}_{12}}{\partial x_2} \quad \text{и т. д.}$$

в уравнения равновесия, получаем

$$\dot{\sigma}_{11}(\vec{x}, t^*(x_1)) = \frac{1}{dt^*/dx_1} \left[\frac{\partial \sigma^{\text{н}}_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial \sigma^{\text{н}}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma^{\text{н}}_{13}}{\partial x_3} + \frac{\sigma^{\text{н}}_{11} - \sigma^{\text{н}}_{12}}{x_1} \right] = \Phi_1(\vec{x})$$

$$\dot{\sigma}_{12}(x, t^*(x_1)) = \frac{1}{dt^*/dx_1} \left[\frac{\partial \sigma^{\text{н}}_{12}}{\partial x_1} + \ldots \right] = \Phi_2(\vec{x}) \qquad (10)$$

$$\dot{\sigma}_{13}(x, t^*(x_1)) = \frac{1}{dt^*/dx_1} \left[\frac{\partial \sigma^{\text{н}}_{13}}{\partial x_1} + \ldots \right] = \Phi_3(\vec{x})$$

Соотношения (10) определяют через заданные функции $\sigma^{\text{н}}_{ij}(\vec{x})$ компоненты вектора скоростей изменения напряжений на растущей части границы; таких соотношений 3 и только 3—по числу уравнений равновесия.

Система уравнений (1')—(4') с граничными условиями (6'), (10) в каждый момент времени t является корректной линейной краевой задачей относительно скоростей изменения НДС $\dot{\sigma}_{ij}(\vec{x}, t)$, $\dot{u}_i(\vec{x}, t)$ и т. д. с уравнением состояния вида $\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}(\vec{x})\dot{e}^c_{kl} + B_{ij}(\vec{x})$. Эта задача заменой переменных $\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - B_{ij}(\vec{x})$ сводится к обычной задаче с массовыми силами с уравнением состояния вида $\dot{s}_{ij} = A_{ijkl}(\vec{x})\dot{e}^c_{kl}$.

Второй вариант постановки замыкается всегда корректными соотношениями:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{\sigma}_{ij}(\vec{x}, \tau)d\tau + \sigma^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad e_{ij}(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{e}_{ij}d\tau$$

$$e_{ij}(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{e}_{ij}d\tau + e^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad u_i(\vec{x}, t) = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} \dot{u}_i d\tau \qquad (11)$$

Соотношения (11) записаны для приращенной части тела; для области $\Omega(0)$ нижний предел в интегралах соотношений (11) следует заменить на нуль.

Применяя к тензору напряжений, представленному соотношением (11), оператор уравнения равновесия

$$L_k\sigma_{ij} = \int\limits_{t^*(x_1)}^{t} L_k\dot{\sigma}_{ij}d\tau - \sigma_{1k}(\vec{x}, t^*(x_1))\frac{dt^*}{dx_1} + L_k\sigma^{н}_{ij}(\vec{x}) = 0$$

видим, что это равенство выполняется в силу уравнений (1) и (10) при любых функциях $\sigma^{н}_{ij}(\vec{x})$.

Из постановки задачи в виде (1′)—(4′), (6′), (10), (11) непосредственно вытекает и следующий метод решения—метод Эйлера по переменной t: имея НДС на временном слое $t = t_n$ в области $\Omega(t_n)$, определяем скорости изменения НДС в области $\Omega(t_n)$ из решения краевой задачи (1′), . . ., (10). На временном слое $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$ НДС определяется соотношениями вида

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t_{n+1}) = \sigma_{ij}(\vec{x}, t_n) + \dot{\sigma}_{ij}(\vec{x}, t_n)\Delta t_{n+1}, \quad \vec{x} \in \Omega(t_n)$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t_{n+1}) = \sigma^{н}_{ij}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Delta\Omega(t_{n+1}) \quad \text{или} \quad x_1 = f(t_{n+1}) \qquad (12)$$

после чего имеем необходимые данные для решения краевой задачи в области $\Omega(t_{n+1})$. Для решения краевых задач при каждом t_n применимы стандартные программы. Отметим, что при линейно-упругой модели среды с модулями, возможно, зависящими от координаты $\vec{x}$, но не от времени и, в частности, не от температуры $T(\vec{x}, t)$, краевые задачи (1′)—(4′), (6′), (10) при каждом t являются независимыми; соответственно, в этом случае поле скоростей изменения НДС растущего тела может быть построено полностью без построения самого НДС.

В заключение рассмотрим две задачи для линейно-упругого растущего цилиндра.

1. Пусть цилиндр находится в состоянии плоской деформации и НДС осесимметрично, то есть рассмотрим многократно исследованную одномерную по координате задачу. Примем ортотропную модель среды с модулями, не зависимыми от координат.

$$\sigma_{rr} = a e^{c}_{rr} + b e^{c}_{\theta\theta}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = b e^{c}_{rr} + c e^{c}_{\theta\theta}$$

Здесь несущественные для задачи члены опущены. На стационарной границе $r = r_0$ имеем

$$\lambda \dot{\sigma}_{rr}(r_0, t) - \dot{u}(r_0, t) = 0$$

На растущей границе примем условия в общем для данной задачи виде

$$\sigma_{rr}(r, t^*(r)) = \sigma^{н}_{rr}(r), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, t^*(r)) = \sigma^{н}_{\theta\theta}(r)$$

Граничные условия (10) имеют в рассматриваемом случае вид

$$\dot{\sigma}_{rr}(r, t^*(r)) = \frac{1}{dt^*/dr}\left[\frac{d\sigma^{н}_{rr}}{dr} + \frac{\sigma^{н}_{rr} - \sigma^{н}_{\theta\theta}}{r}\right] \equiv \Phi(r)$$

Не снижая общности, для упругой задачи можно принять $t^*(r) = r$. Кроме того, примем $T \equiv 0$, $r_1 = r_0$.

Общая постановка (1′)—(4′) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \dot{u}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{u}(r, t)}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}\dot{u}(r, t) = 0 \quad \left(k^2 = \frac{c}{a}\right)$$

имеющему общее решение

$$\dot{u}(r, t) = A_1(t) r^{k} + A_2(t) r^{-k}$$

Соответственно, имеем

$$\dot{\sigma}_{rr}(r, t) = \frac{1}{r}\left[(ka + b) A_1(t) r^{k} - (ka - b) A_2(t) r^{-k}\right]$$

Подставляя последние выражения в граничные условия, получаем систему 2-х линейных алгебраических уравнений относительно $A_i(t)$, решением которой являются выражения

$$A_1(t) = r_0^{-k}\left[1 + \frac{\lambda}{r_0}(ak - b)\right] t\Phi(t)/F(t)$$

$$A_2(t) = -r_0^{k}\left[1 - \frac{\lambda}{r_0}(ak + b)\right] t\Phi(t)/F(t)$$

где

$$F(t) = t^{k}\left[ak + b + \frac{\lambda}{r_0}(c^2 - b^2)\right] + t^{-k}\left[ak - b - \frac{\lambda}{r_0}(c^2 - b^2)\right]$$

Окончательно общее решение получаем в виде

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{1}{r} F(r) \int_{r}^{t} \frac{\tau\Phi(\tau)}{F(\tau)} d\tau + \sigma^{н}_{rr}(r)$$

$$u(r, t) = \left\{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k}\left[1 + \frac{\lambda}{r_0}(ak - b)\right] + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-k}\left[1 - \frac{\lambda}{r_0}(ak + b)\right]\right\} \times$$

$$\times \int_{r}^{t} \frac{\tau\Phi(\tau)}{F(\tau)} d\tau \qquad (13)$$

и т. д.

Очевидно, что и при $T\neq 0$ общее решение вычисляется в квадратурах. Решение (13) можно считать принципиально новым, по-видимому, лишь постольку, поскольку эта задача не рассматривалась ранее с общими граничными условиями на растущей границе.

Перейдем к обратной задаче: какова должна быть программа нагружения, то есть функции $\sigma^{н}_{rr}(r)$, $\sigma^{н}_{\theta\theta}(r)$, чтобы к концу процесса роста $t=R$ в теле было заданное напряженное состояние $\sigma^{k}_{rr}(r)$, $\sigma^{k}_{\theta\theta}(r)$ $(r\in[r_0, R])$.

Одно решение этой задачи можно считать очевидным:

$$\sigma^{н}_{rr}(r)=\sigma^{k}_{rr}(r), \quad \sigma^{н}_{\theta\theta}(r)=\sigma^{k}_{\theta\theta}(r)$$

Естественно, оно следует и из общего решения (13), поскольку, в силу самоуравновешенности напряжений σ^{k}_{rr}, $\sigma^{k}_{\theta\theta}$, в этом случае $\Phi(t)=0$. Получим общее решение задачи. Преобразуя равенство $\sigma_{rr}(r, R)=\sigma^{k}_{rr}(r)$, имеем:

$$\int\limits_{r}^{R}\frac{\tau\Phi(\tau)}{F(\tau)}d\tau=\frac{r(\sigma^{k}_{rr}(r)-\sigma^{н}_{rr}(r))}{F(r)}$$

Дифференцируя его по r, получаем уравнение

$$-\frac{rd\sigma^{н}_{rr}/dr+\sigma^{н}_{rr}-\sigma^{н}_{\theta\theta}}{F(r)}=\frac{\sigma^{k}_{rr}-\sigma^{н}_{rr}}{F(r)}+\frac{r}{F(r)}\left(\frac{d\sigma^{k}_{rr}}{dr}-\frac{d\sigma^{н}_{rr}}{dr}\right)-\frac{r(\sigma^{k}_{rr}-\sigma^{н}_{rr})}{F^2(r)}\,\frac{dF}{dr}$$

из которого следует

$$\sigma^{н}_{\theta\theta}-\frac{r}{F(r)}\,\frac{dF}{dr}\,\sigma^{н}_{rr}=\sigma^{k}_{\theta\theta}-\frac{r}{F(r)}\,\frac{dF}{dr}\,\sigma^{k}_{rr}\equiv\psi(r) \qquad (14)$$

При любых функциях $\sigma^{н}_{rr}$, $\sigma^{н}_{rr}$, удовлетворяющих уравнению (14), к концу роста тела в нем будет заданное НДС; тривиальное решение, как видно, является решением этого уравнения. То же уравнение (14), естественно, можно получить и из равенства $\sigma_{\theta\theta}(r, R)=\sigma^{k}_{\theta\theta}(r)$; выкладки при этом, однако, существенно более громоздки.

II. Рассмотрим теперь цилиндр, находящийся в состоянии двумерной плоской деформации. Для упрощения записей примем уравнения состояния в виде

$$\sigma_{ij}=e^{c}_{ij} \quad (\dot{\sigma}_{ij}=\dot{e}^{c}_{ij}=\dot{e}_{ij})$$

и граничные условия при $r=r_0$ в виде

$$\dot{u}_1\equiv\dot{u}=0, \quad \dot{u}_2\equiv\dot{v}=0$$

На растущей границе примем условия

$$\sigma^{н}_{rr}(r, \theta)=\sigma_r(r)\sin m\theta$$

$$\sigma^{н}_{\theta\theta}(r, \theta)=\sigma_\theta(r)\sin m\theta \qquad (m\geqslant 2)$$

$$\sigma^{н}_{r\theta}(r, \theta)=\tau(r)\cos m\theta$$

Соответственно, граничные условия (10) имеют вид

$$\dot{\sigma}_{rr}(r, \theta, r) \equiv \dot{e}_{rr} = \left(\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{-m\tau + \sigma_r - \sigma_\theta}{r}\right) \sin m\theta \equiv \Phi_1(r) \sin m\theta$$

$$\dot{\sigma}_{r\theta}(r, \theta, r) \equiv \dot{e}_{r\theta} = \left(\frac{d\tau}{dr} + \frac{m\sigma_\theta + 2\tau}{r}\right) \cos m\theta \equiv \Phi_2(r) \cos m\theta$$

Решение задачи (1′)—(4′) для рассматриваемого случая находится в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}(r, \theta, t) &= (A_1(t) r^{m+1} + \ldots + A_4(t) r^{-m-1}) \sin m\theta \\ \dot{v}(r, \theta, t) &= (k_1 A_1(t) r^{m+1} + \ldots + k_4 A_4(t) r^{-m-1}) \cos m\theta \end{aligned} \tag{15}$$

где константы $k_i(m)$ известны. Соответственно, имеем

$$\dot{e}_{rr}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} [(m+1) A_1(t) r^{m+1} + \ldots] \sin m\theta$$

$$\dot{e}_{r\theta}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} [(k_1 + 1) m A_1(t) r^{m+1} + \ldots] \cos m\theta$$

$$\dot{e}_{\theta\theta}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} [(1 + mk_1) A_1(t) r^{m+1} + \ldots] \sin m\theta$$

Подставляя полученные выражения для $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{\sigma}_{rr}$, $\dot{\sigma}_{r\theta}$ в граничные условия, получаем линейную алгебраическую систему 4-х уравнений относительно функции

$$\begin{gathered} A_1(t) r_0^{m+1} + \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_1(t) m (k_1 + 1) \cdot t^{m+1} + \ldots = t\Phi_2(t) \end{gathered} \tag{16}$$

Формулами (11), (15), где $A_i(t)$ определены системой уравнений (16), решение задачи о плоской деформации цилиндра сведено к квадратурам.

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՃՈՂ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՄԱՐ ԽՆԴՐԻ ԴՐՎԱԾՔԸ ԵՎ ՈՐՈՇ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ

Վ. Կ. ՏՐԻՆՉԵՐ

Ամփոփում

Տրված է աճող մարմնում լարումների որոշման խնդրի դրվածքը միջավայրի մոդելի և աճող եզրի պայմանների վրա առանց էական սահմանափակումների:

Հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող աճող գլանի համար գծային առաձգական մոդելի դեպքում խնդրի լուծումը ստացված է կվադրատուրաներով: Առանցքասիմետրիկ դեպքի համար ստացված է հակադարձ խնդրի լուծումը փակ տեսքով:

FORMULATION AND SOME GENERAL SOLUTIONS OF THE PROBLEMS FOR CYLINDRICAL GROWING SOLIDS

V. K. TRINCHER

Summary

The formulation of the problem for stress state distribution in a growing solid is given without any significant restrictions on the model of the media and the condition on the growing boundary.

In the case of linear elastic media the analytic solution for the problem of deformation in a growing cylindrical body in plane state conditions is presented.

The closed solution of the inverse problem for an axisymmetrical case is given. The inverse problem is the problem of determination of conditions on the growing boundary which provide the given stress state to the end time growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости. М.: ИЛ, 1948.
2. *Рашба Э. И.* Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения. Тр. ин-та строит. мех. АН СССР, 1953, № 18.
3. *Дятловицкий Л. И.* Исследование напряжений в гравитационных пластинах.—ПМ, 1956, т. II, в. 2.
4. *Харлаб В. Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела. Тр. ЛИСИ, 1966, вып. 49.
5. *Пильмов В. А.* О напряжениях, возникающих при затвердевании материалов.—Изв. АН СССР, МТТ, 1967, № 4.
6. *Дятловицкий Л. И., Вайнберг А. И.* Формирование напряжений в гравитационных плотинах. Киев: Наукова думка, 1975.
7. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.—ПММ, 1977, т. *41*.
8. *Тарнопольский Ю. М., Портнов Г. Г., Вейль А. И.* Механика намотки композитов.—Изв. АН Латв. ССР, 1980, № 12.
9. *Портнов Г. Г., Вейль А. И.* Модель для учета нелинейных свойств полуфабриката при силовом анализе намотки композитов.—Механика полимеров, 1977, № 2.
10. *Турусов Р. А., Давтян С. П., Шкадинский Н. С., Розенберг Б. А., Андреевская С. Д., Ениколопян Н. С.* Механические явления в условиях распространения фронта отверждения.—ДАН СССР, 1979, т. *247*, № 1.
11. *Арутюнян Н. Х., Зевин А. А.* Задачи оптимизации в теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению.—МТТ, 1979, № 1,
12. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Нелинейные задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел с изменяющейся границей.—ДАН СССР, 1982, т. 246, № 6.

Институт механики МГУ

Поступила в редакцию
17.II. 1983