ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 6, 1985 Механика

УДК 539.3

К ПОСТРОЕНИЮ В ЦЕЛОМ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОУПРУГОСТИ*

САРКИСЯН С. О.

Как известно, линеаризованные уравнения магнитоупругости для тонких пластин и оболочек [1] состоят из трех групп уравнений. В первую группу входят трехмерные уравнения теории упругости с учетом массовых сил электромагнитного происхождения, во вторую группу входят трехмерные уравнения электродинамики для движущейся области, то есть для области, занимаемой оболочкой или пластинкой, в третью группу входят трехмерные уравнения электродинамики для среды, окружающей пластинку или оболочку, которая считается вакуумом.

Общеизвестны фундаментальные исследования С. А. Амбарцумяна с сотрудниками [2, 3] в области магнитоупругости тонких оболочек и пластин. В этих работах асимптотическому анализу подвергалась вторая группа уравнений. В исходном приближении было обнаружено, что тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине пластинки или оболочки остаются неизменными. Эти результаты были приняты в качестве гипотез и в соединении с гипотезами Кирхгоффа-Лява для тонких оболочек и пластин были сформулированы как гипотезы магнитоупругости тонких тел [1—3]. Основываясь на этих гипотезах, использованием метода осреднения в работах [2, 3] были осреднены по толщине оболочки или пластинки трехмерные уравнения первой и второй групп уравнений. Этим самым открыт огромный путь для изучения поставленных проблем в области магнитоупругости тонких тел.

Как отмечается в монографии [1], а также в работах [4—6], задача магнитоупругости в целом тем не менее остается трехмерной по причине того, что уравнения электродинамики для окружающей пластинку или оболочку среды из себя представляют трехмерные уравнения в бесконечной области с исключением области, занимаемой тонкой оболочкой или пластинкой.

---

* Работа была доложена на Всесоюзном школе-семинаре «Методы малого параметра и их применение», Минск: 16—25 сентября 1982 г., и опубликована в «Тезисы лекций и кратких научных сообщений Всесоюзной школы-семенара», Изд. Института математики АН БССР, Минск: 1982, 122 с.

Отметим, что существуют некоторые подходы [4—6] для окончательного приведения трехмерной проблемы магнитоупругости тонких тел к двумерной проблеме.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли построить равномерные асимптотические разложения во всей области изучаемого явления и именно таким путем свести в целом общую трехмерную проблему магнитоупругости тонких тел к двумерной проблеме. Получаемые таким образом двумерные уравнения будут асимптотически точными в целом.

Настоящая работа посвящена изучению этой задачи. Как видно, данная работа органически связана с исследованиями [2, 3] и по существу представляет продолжение этих исследований.

При построении и изучении асимптотических разложений в области оболочки как при рассмотрении первой группы уравнений, так и второй группы уравнений магнитоупругости существенно используется общеизвестный асимптотический метод А. Л. Гольденвейзера для статических задач теории оболочек [7—10].

В работах [11, 12] использованием вышеуказанного метода исследуются аналогичные задачи для статики анизотропных оболочек.

Как отмечается в работах [13, 14], область применимости асимптотического метода построения теории оболочек не ограничивается статикой. Если динамический пограничный слой регулярный [13, 14], это позволяет без существенных изменений применить вышеотмеченный асимптотический подход и получить асимптотически точные двумерные уравнения динамики тонких оболочек [13, 14].

В работах [15, 16] таким путем получены динамические двумерные уравнения для тонких изотропных пластин.

В работах [17, 18] построены асимптотически точные двумерные уравнения в целом для изучения магнитоупругих колебаний тонких пластин.

1. Рассматривается изотропная упругая оболочка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью σ. Оболочка находится во внешнем однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0=(H_\alpha, H_\beta, H_\gamma)$.

Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям кривизны α, β и положение любой точки определим размерными координатами α, β и γ [10, 11].

Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитоупругости [3] для трехмерной среды. Уравнения движения теории упругости с учетом массовых сил электромагнитного происхождения

$$\frac{1}{B}\partial_\alpha(B\sigma_\alpha) - k_\beta\sigma_\beta + \frac{1}{A}\partial_\beta(A\tau_{\beta\alpha}) + k_\alpha\tau_{\alpha\beta} + \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\partial_\gamma\tau_{\alpha\gamma} + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}}{R_1} = \rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} + R_\alpha, \quad (\alpha, \beta)$$

$$\partial_\gamma\sigma_\gamma - \left(\frac{\sigma_\alpha}{R_1} + \frac{\sigma_\beta}{R_2}\right) + \partial_\alpha\tau_{\alpha\gamma} + \partial_\beta\tau_{\beta\gamma} + k_\beta\tau_{\alpha\gamma} + k_\alpha\tau_{\beta\gamma} = \rho\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial t^2} + R_\gamma \qquad (1.1)$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\alpha\beta}=\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\beta\alpha}, \quad \vec{R}=(R_\alpha, R_\beta, R_\gamma)=\frac{\sigma}{c}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)\times\vec{H}_0$$

с соотношениями упругости [10].

Уравнения электродинамики в области оболочки [1]:

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{h}=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{e}=4\pi\rho_0, \quad \frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\sigma\operatorname{div}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)=0 \qquad (1.2)$$

Уравнения электродинамики во внешней от оболочки области (вакуум) [1]:

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{h}=0, \quad \operatorname{div}\vec{e}=0 \qquad (1.3)$$

где $\vec{u}=(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$—вектор перемещения точек оболочки, $\vec{e}=(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma)$, $\vec{h}=(h_\alpha, h_\beta, h_\gamma)$, ρ_0—компоненты индуцированного электромагнитного поля.

В данной работе строится итерационный процесс, позволяющий с любой асимптотической точностью удовлетворять уравнениям (1.1)—(1.3), механическим и электродинамическим условиям на лицевых поверхностях оболочки $\gamma=\pm h$. Этим процессом нельзя удовлетворять всем механическим и электродинамическим граничным условиям на боковой поверхности оболочки, для полного исследования задачи рассматриваются погранслои у боковой поверхности оболочки.

2. Займемся сначала построением основного итерационного процесса в области оболочки. Основным итерационным процессом определяется такое электромагнитоупругое состояние, которое проникнуто вглубь оболочки. Введем безразмерную систему координат, а также время по формулам [10, 15]

$$\alpha=R\lambda^{-p}\xi, \quad \beta=R\lambda^{-p}\eta, \quad \gamma=h\zeta=R\lambda^{-l}\zeta, \quad \lambda=\left(\frac{h}{R}\right)^{-\frac{1}{l}}=\varepsilon^{-\frac{1}{l}} \qquad (2.1)$$

$$\tau=\frac{t}{t_0}, \quad t_0=\varepsilon^{\omega-1}\frac{R}{c_0}, \quad c_0=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (2.2)$$

где R—характерный радиус кривизны оболочки, λ—большой параметр, p, l—целые числа, ω характеризует изменяемость процесса во времени. Введем также безразмерные величины по формулам работы [17, 18].

Преобразовав уравнения (1.1)—(1.3), используя для этого (2.1), (2.2), а также указанные выше формулы из работы [17, 18], будем искать решения вновь полученных уравнений в виде

$$v_\gamma=\lambda^{x+l-c}\sum\lambda^{-s}v_\gamma^{(s)}, \quad v_\alpha=\lambda^{x+l-p}\sum\lambda^{-s}v_\alpha^{(s)}, \quad \sigma_\alpha=\lambda^{x}\sum\lambda^{-s}\sigma_\alpha^{(s)}; \quad \tau_{\alpha\beta}=\lambda^{x}\sum\lambda^{-s}\tau_{\alpha\beta}^{(s)}; \ (\alpha,\beta) \qquad (2.3)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}=\lambda^{\varkappa+p-l}\sum\lambda^{-s}\tau_{\alpha\gamma}^{(s)},\ (\alpha,\ \beta),\ \sigma_{\gamma}=\lambda^{\varkappa-l+c}\sum\lambda^{-s}\sigma_{\gamma}^{(s)},\ H_{\alpha}=\lambda^{\varkappa_1}H_{\alpha 0},\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

$$h_{\alpha}=\lambda^{\varkappa_1}\sum\lambda^{-s}h_{\alpha}^{(s)};\ E_{\alpha}=\lambda^{\varkappa_2}\sum\lambda^{-s}E_{\alpha}^{(s)};\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma),\ \ \rho_0=\lambda^{\varkappa_2}\sum\lambda^{-s}\rho_0^{(s)} \tag{2.4}$$

Здесь представления (2.3) совпадают с соответствующими представлениями монографии [10]; $c=0$ при $0\leqslant r=\dfrac{p}{l}\leqslant\dfrac{1}{2}$; $c=2p-l$ при $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{p}{l}<1$. Числа $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и ω в ходе решения уравнений (1.1)—(1.3) выбираются таким образом, чтобы в исходном приближении получились взаимосвязанные электромагнитоупругие явления, а также, чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения.

Таким образом, получаем

$$\varkappa=0,\quad \varkappa_1=l\left(\frac{1}{2}\omega-1\right),\quad \varkappa_2=\frac{3}{2}l\omega-2l-p \tag{2.5}$$

при этом, в случае $\quad 0\leqslant\dfrac{p}{l}\leqslant\dfrac{1}{2}\quad \omega=1 \qquad (2.6)$

а в случае $\quad \dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{p}{l}<1\quad \omega=\dfrac{2p}{l} \qquad (2.7)$

Подставляя (2.3), (2.4) в уравнения (1.1), (1.2) с учетом (2.5)—(2.7), получаем последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложения (2.3)—(2.4). Отметим, что касается упругой части задачи, операторы в указанных уравнениях тождественно совпадают с соответствующими операторами чисто упругой задачи [10, 11]. Здесь, для экономии места, приводятся только инерционные члены и силы электромагнитного происхождения, которые будут входить в правые части уравнения движения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v_{\alpha}^{(s+2l\omega-2l-2p)}}{\partial\tau^2}+R_m(H_{\gamma 0}^2+H_{\beta 0}^2)\frac{\partial v_{\alpha}^{(s+2l\omega-2l-2p)}}{\partial\tau}-R_m\Bigg[H_{\gamma 0}\Bigg(E_{\beta}^{(s+2l\omega-2l-2p)}+\\
+H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\gamma}^{(s+2l\omega-2l-p+c)}}{\partial\tau}\Bigg)-H_{\beta 0}\Bigg(E_{\gamma}^{(s+2l\omega-2l-2p)}-H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s+2l\omega-2l-2p)}}{\partial\tau}\Bigg)\Bigg];\quad (\alpha,\ \beta)\\
\frac{\partial^2 v_{\gamma}^{(s)}}{\partial\tau^2}+R_m(H_{\alpha 0}^2+H_{\beta 0}^2)\frac{\partial v_{\gamma}^{(s)}}{\partial\tau}-R_m\Bigg[H_{\beta 0}\Bigg(E_{\alpha}^{(s+2l\omega-2l-p+c)}+H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s+2l\omega-2l-p-c)}}{\partial\tau}\Bigg)-\\
-H_{\alpha 0}\Bigg(E_{\beta}^{(s+2l\omega-2l-p-c)}-H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s+2l\omega-2l-p-c)}}{\partial\tau}\Bigg)\Bigg]
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Последовательность систем уравнений, которые получаются из соотношений упругости, аналогичны соответствующим системам уравнений [10, 11], поэтому они здесь не приводятся.

Из второй группы уравнений, то есть из (1.2) имеем

$$
\frac{1}{B}\frac{\partial h_{\gamma}^{(s-l+p)}}{\partial\eta}-\frac{\partial h_{\beta}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{1}{r_2}h_{\beta}^{(s-l)}-\frac{B\zeta}{r_2}\frac{\partial h_{\beta}^{(s-l)}}{\partial\zeta}=4\pi R_m\Bigg[E_{\alpha}^{(s+l\omega-l-p)}+
$$

$$
+\left(H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s+l\omega-l-p)}}{\partial\tau}-H_{\beta 0}\frac{\partial v_{\gamma}^{(s)}}{\partial\tau}\right)\Bigg]+4\pi R_m\frac{\zeta}{r_2}\Bigg[E_{\alpha}^{(s+l\omega-2l-p)}+
$$

$$
+\left(H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s+l\omega-2l-p)}}{\partial\tau}-H_{\beta 0}\frac{\partial v_{\gamma}^{(s+l\omega-2l-c)}}{\partial\tau}\right)\Bigg]+\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{\partial E_{\alpha}^{(s+2l\omega-3l-p)}}{\partial\tau}+
$$

$$
+\frac{\zeta}{r_2}\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{\partial E_{\alpha}^{(s+2l\omega-4l-p)}}{\partial\tau};\qquad(\alpha,\ \beta)
$$

$$
\frac{1}{AB}\frac{\partial Bh_{\beta}^{(s-l\omega+2p)}}{\partial\xi}+\frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{B}{r_2}h_{\beta}^{(s-l\omega+2p)}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}(Ah_{\alpha}^{(s-l\omega+2p)})-
$$

$$
-\frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{A}{r_1}h_{\alpha}^{(s-l\omega-l+2p)}\right)=4\pi R_m\Bigg[E_{\gamma}^{(s)}+\left(H_{\beta 0}\frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial\tau}-H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s)}}{\partial\tau}\right)\Bigg]+
$$

$$
+4\pi R_m\zeta\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\Bigg[E_{\gamma}^{(s-l)}+\left(H_{\beta 0}\frac{\partial v_{\alpha}^{(s-l)}}{\partial\tau}-H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s-l)}}{\partial\tau}\right)\Bigg]+4\pi R_m\frac{\zeta^2}{r_1r_2}\times
$$

$$
\times\Bigg[E_{\gamma}^{(s-2l)}+\left(H_{\beta 0}\frac{\partial v_{\alpha}^{(s-2l)}}{\partial\tau}-H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\beta}^{(s-2l)}}{\partial\tau}\right)\Bigg]+\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{\partial E_{\gamma}^{(s+l\omega-2l)}}{\partial\tau}+
$$

$$
+\zeta\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial E_{\gamma}^{(s+l\omega-3l)}}{\partial\tau}+\frac{\zeta^2}{r_1r_2}\frac{\partial E_{\gamma}^{(s+l\omega-4l)}}{\partial\tau}\tag{2.9}
$$

$$
\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}(Bh_{\alpha}^{(s-l+p)})+\zeta\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{B}{r_2}h_{\alpha}^{(s-2l+p)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}(Ah_{\beta}^{(s-l+p)})+
$$

$$
+\frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{A}{r_1}h_{\beta}^{(s-2l+p)}+\frac{1}{r_1}h_{\gamma}^{(s-l)}+\frac{1}{r_1}\frac{\zeta}{r_2}h_{\gamma}^{(s-2l)}+\frac{\partial h_{\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta}+
$$

$$
+\zeta\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial h_{\gamma}^{(s-l)}}{\partial\zeta}+\frac{\zeta^2}{r_1r_2}\frac{\partial h_{\gamma}^{(s-2l)}}{\partial\zeta}=0
$$

$$
\frac{1}{B}\frac{\partial E_{\gamma}^{(s-l+p)}}{\partial\eta}-\frac{1}{r_2}E_{\beta}^{(s-l)}-\frac{\partial E_{\beta}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{\zeta}{r_2}\frac{\partial E_{\beta}^{(s-l)}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial h_{\alpha}^{(s-l+p)}}{\partial\tau}-\frac{\zeta}{r_2}\frac{\partial h_{\alpha}^{(s-2l+p)}}{\partial\tau}
$$

$(\alpha,\ \beta)$

$$
\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}(BE_{\beta}^{(s)})-\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}(AE_{\alpha}^{(s)})+\zeta\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{B}{r_2}E_{\beta}^{(s-l)}\right)-
$$

$$
-\zeta\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{A}{r_1}E_{\alpha}^{(s-l)}\right)=-\frac{\partial h_{\gamma}^{(s)}}{\partial\tau}-\zeta\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial h_{\gamma}^{(s-l)}}{\partial\tau}-\frac{\zeta^2}{r_1r_2}\frac{\partial h_{\gamma}^{(s-2l)}}{\partial\tau}
$$

$$
\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}BE_{\alpha}^{(s-l+p)}+\frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{B}{r_2}E_{\alpha}^{(s-2l+p)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}AE_{\beta}^{(s-l+p)}+
$$

$$
+\frac{1}{AB}\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{A}{r_1}E_{\beta}^{(s-2l+p)}+\frac{\partial E_{\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta}+\zeta\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial E_{\gamma}^{(s-l)}}{\partial\zeta}+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)E_{\gamma}^{(s-l)}+
$$

$$
+2\zeta\frac{1}{r_1r_2}E_{\gamma}^{(s-2l)}+\zeta^2\frac{1}{r_1r_2}\frac{\partial E_{\gamma}^{(s-2l)}}{\partial\zeta}=4\pi\left[\rho_0^{(s)}+\zeta\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\rho_0^{(s-l)}+\frac{\zeta^2}{r_1r_2}\rho_0^{(s-2l)}\right]
$$

Уравнения (2.8), (2.9) в совокупности составляют полную систему для последовательного определения всех неизвестных величин в области оболочки.

3. Рассмотрим теперь третью группу уравнений, то есть уравнения электродинамики (1.3) во внешней от оболочки области (вакуум). Займемся сначала построением основного итерационного процесса в этой области, представляющей собой бесконечную область с исключением области тонкой оболочки. Основной итерационный процесс определяет такое электродинамическое состояние, которое проникнуто вглубь во внешней от оболочки области.

Предполагается, что во внешней области электромагнитное поле в трех направлениях имеет одну и ту же изменяемость, равную изменяемости по направлениям α и β для внутренней задачи. По времени для внешней задачи принимается такая же изменяемость, что и для внутренней задачи.

Итак, во внешнюю среду введем безразмерную систему координат и время соответственно

$$\alpha = R\lambda^{-p}\xi, \quad \beta = R\lambda^{-p}\eta, \quad \zeta_1 = R\lambda^{-p}\gamma, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \tag{3.1}$$

где t_0 определяется из (2.2) с учетом (2.6) или (2.7).

Преобразовав уравнения (1.3), используя для этого (3.1), будем щих в (3.2), с учетом (2.5), (2.6) или (2.7) примут вид

$$E_\alpha = \lambda^{\varkappa_2}\sum \lambda^{-s} E_\alpha^{(s)}; \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad h_\alpha = \lambda^{\varkappa_1}\sum \lambda^{-s} h_\alpha^{(s)}; \quad (\alpha, \beta, \gamma) \tag{3.2}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определяются соответственно из (2.5) с учетом (2.6) или (2.7).

Итак, уравнения определения неизвестных коэффициентов, входящих в (3.2), с учетом (2.5), (2.6) или (2.7) примут вид

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(s)} = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 \frac{\partial \vec{E}^{(s)}}{\partial \tau}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial h^{(s)}}{\partial \tau}; \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(s)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E}^{(s)} = 0 \tag{3.3}$$

Сопоставляя (3.3) с (1.3), легко убедиться, что в асимптотических приближениях основного итерационного процесса, как и следовало ожидать, уравнения не упрощаются (они остаются без изменений).

Рассмотрим теперь, как будет выглядеть в новой системе координат (3.1) тонкая область оболочки. В первоначально выбранной размерной системе координат лицевые поверхности оболочки будут $\gamma = \pm h$, в системе координат (3.1) эти поверхности определяются следующим образом (как и в работах [17, 18]):

$$\zeta_1 = \pm\frac{h}{R} = \pm\varepsilon \tag{3.4}$$

Здесь, стремя $\varepsilon \to 0$, будем иметь $\zeta_1 = \pm 0$. Это означает, что изменения компонентов электромагнитного поля по толщине $-\frac{h}{R} \leqslant \zeta_1 \leqslant \frac{h}{R}$ во внешней от оболочки области асимптотически не влияют на внутрений или основной итерационный процесс, а саму оболочку необходимо рассматривать как математический разрез. Следовательно, для внешней задачи (основного итерационного процесса) на таком математическом разрезе необходимо задавать те значения для компонентов электромагнитного поля, которые получаются на лицевых поверхностях оболочки при рассмотрении внутренней задачи (основного итерационного процесса).

Если рассматривать основной итерационный процесс для внутренней задачи, то есть уравнения (2.9), то легко убедиться, что в общем случае по «s» любое граничное значение для компонентов электромагнитного поля на лицевых поверхностях оболочки $\zeta=\pm 1$ можно представить в виде суммы двух слагаемых так, что одна часть этой суммы при переходе от $\zeta=+1$ к $\zeta=-1$ не изменяется, а вторая часть при указанном переходе терпит разрывы.

Используя каждый раз выражения этих разрывов из внутренней задачи, при помощи тензора Грина во всем пространстве (в R_3) для уравнений (3.3), можно написать решение уравнений (3.3) в интегральной форме следующим образом:

$$E_{\alpha 0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=\iint_{\Omega} Q_{1\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[h_{\alpha}^{(s)}]d\Omega+$$

$$+\iint_{\Omega} Q_{2\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[h_{\beta}^{(s)}]d\Omega; \quad (\alpha, \beta) \tag{3.5}$$

и аналогичные выражения для $h_{\gamma 0}^{(s)}$, $h_{\alpha 1}^{(s)}$, (α, β), $E_{\gamma 1}^{(s)}$, а также

$$h_{\alpha 0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=\iint_{\Omega} G_{3\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[E_{\alpha}^{(s)}]d\Omega+\iint_{\Omega} G_{4\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0,$$

$$\zeta_1, \tau)[E_{\beta}^{(s)}]d\Omega+\iint_{\Omega} G_{5\alpha}(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0, \zeta_1, \tau)[h_{\gamma}^{(s)}]d\Omega; \ (\alpha, \beta) \tag{3.6}$$

и аналогичные выражения для $h_{\gamma 1}^{(s)}$, $E_{\alpha 1}^{(s)}$, (α, β), $E_{\gamma 0}^{(s)}$.

Здесь Ω—срединная поверхность оболочки, $(\xi_0, \eta_0)\in\Omega$, $(\xi, \eta, \zeta_1)\in R_3$. $[h_{\alpha}^{(s)}]$, (α, β, γ), $[E_{\alpha}^{(s)}]$, (α, β, γ) представляют вышеуказанные разрывы соответствующих величин на разрезе $\zeta_1=\pm 0$ в области срединной поверхности оболочки, которые определяются из внутренней задачи, то есть из уравнений (2.9). Следует принимать во внимание, что компоненты электромагнитного поля во внешней от оболочки области были представлены в виде

$$h_{\alpha}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)=h_{\alpha 0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)+h_{\alpha 1}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau), \ (\alpha, \beta, \gamma), \ (h_{\alpha}^{(s)}, E_{\alpha}^{(s)}) \tag{3.7}$$

где $h_{\alpha 0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, $E_{\alpha 0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, (α, β, γ) при прохождении через разрез $\zeta_1=\pm 0$, $\xi, \eta\in\Omega$ не терпят разрывов, а $h_{\alpha 1}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, $E_{\alpha 1}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta_1, \tau)$, (α, β, γ) при прохождении через указанный разрез скачкообразно изменяются.

Отметим, что в выражениях (3.5) и (3.6) функции $G_{i\alpha}$, $Q_{i\alpha}$, $i=1, 2 \ldots 5$; (α, β, γ) из себя представляют тензор Грина уравнений (3.3) в R_3.

Зная $E_\gamma^{(s)}$ для внешней задачи и зная $E_\gamma^{(s)}$ для внутренней задачи, легко определить плотность поверхностного заряда χ, который возникает на лицевых поверхностях оболочки

$$\chi^{(s)+} = E_\gamma^{(s)+}(\text{внеш.}) - E_\gamma^{(s)+}(\text{внут.}); \quad \chi^{(s)-} = E_\gamma^{(s)-}(\text{внеш.}) - E_\gamma^{(s)-}(\text{внут.}) \tag{3.8}$$

4. Проведем анализ тех приближений основного итерационного процесса (2.8), (2.9), (3.5), (3.6), которые соответствуют основным допущениям классической теории оболочек [10, 8]. Рассматривая уравнения (2.8), (2.9), (3.5), (3.6), легко убедиться, что результатом классической теории оболочек, как и в [10, 11], должны соответствовать результаты, полученные асимптотическим интегрированием уравнений трехмерной задачи магнитоупругости, если ограничиться приближением до $s=2l-2p-1$ включительно, в частности при нулевой изменяемости ($p=0$, $l=1$) этому будут соответствовать приближения $s=0; 1$.

Рассмотрим первые два приближения в случае нулевой изменяемости. Для $s=0$ из соотношений (2.8), (2.9), а также из соотношений упругости [10], которые мы не приводили, имеем

$$v_\alpha^{(0)} = v_{\alpha 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \ (\alpha, \beta), \ v_\gamma^{(0)} = v_{\gamma 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \ E_\alpha^{(0)} = E_{\alpha 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau), \ (\alpha, \beta)$$
$$h_\gamma^{(0)} = h_{\gamma 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau) \tag{4.1}$$

Условия (4.1) из себя представляют выражения известных гипотез магнитоупругости [1].

Используя (4.1), а также соответствующие силовые граничные условия на лицевых поверхностях оболочки, уравнения движения в исходном приближении приводятся к следующим уравнениям:

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial(B\sigma_\alpha^{(0)})}{\partial\xi} - Rk_\beta\sigma_\beta^{(0)} + \frac{1}{AB}\frac{\partial(A\tau_{\beta\alpha}^{(0)})}{\partial\eta} + Rk_\alpha\tau_{\alpha\beta}^{(0)} - \frac{\partial^2 v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau^2} - R_m H_{\gamma 0}^2\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau} +$$
$$+ R_m H_{\gamma 0}\left(E_{\beta 0}^{(0)} + H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right) = -\frac{1}{2}P_\alpha^{(0)}, \qquad (\alpha, \beta) \tag{4.2}$$

$$\frac{\sigma_\alpha^{(0)}}{r_1} + \frac{\sigma_\beta^{(0)}}{r_2} + \frac{\partial^2 v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau^2} + R_m(H_{\alpha 0}^2 + H_{\beta 0}^2)\frac{\partial v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau} - R_m\left[H_{\beta 0}\left(E_{\alpha 0}^{(0)} + H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\beta 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right) - \right.$$
$$\left. - H_{\alpha 0}\left(E_{\beta 0}^{(0)} - H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right)\right] = \frac{1}{2}P_\gamma^{(0)}$$

Напряжения $\sigma_\alpha^{(0)}$, (α, β), $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$, $\tau_{\alpha\gamma}^{(0)}$, (α, β), $\sigma_\gamma^{(0)}$, а также деформации $\varepsilon_1^{(0)}$, $(1, 2)$, $\omega^{(0)}$ определяются аналогичными формулами из [10].

Для электродинамической части задачи получаем

$$h_\alpha^{(0)} = 4\pi R_m \zeta\left[E_{\beta 0}^{(0)} + \left(H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau}\right)\right] + h_{\alpha 0}^{(0)}(\xi, \eta, \tau); \quad (\alpha, \beta) \tag{4.3}$$

$$[h_\alpha^{(0)}] = h_\alpha^{(0)+} - h_\alpha^{(0)-} = h_{\alpha 1}^{(0)} = 2\left[4\pi R_m\left(E_{\beta 0}^{(0)} + H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\gamma 0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{\gamma 0}\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial \tau}\right)\right] \quad (\alpha,\beta) \qquad (4.4)$$

$$E_\gamma^{(0)} = H_{\alpha 0}\frac{\partial v_{\beta 0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{\beta 0}\frac{\partial v_{\alpha 0}^{(0)}}{\partial\tau};\quad \rho_0^{(0)}=0 \qquad (4.5)$$

Так как $[E_\alpha^{(0)}]=0$; (α,β), $[h_\gamma^{(0)}]=0$, то, как это следует из (3.6) во внешней области $h_{\alpha0}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta_1,\tau)\equiv0$; (α,β), $h_{\gamma1}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta_1,\tau)\equiv0$; $E_{\alpha1}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta_1,\tau)\equiv0$; (α,β); $E_{\gamma0}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta_1,\tau)\equiv0$; из того, что $h_{\alpha0}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta_1,\tau)\equiv0$ во внешней области и условий непрерывности для этой величины на лицевых поверхностях оболочки будет следовать, что в (4.3) $h_{\alpha0}^{(0)}(\xi,\eta,\tau)=0$; (α,β).

Отличные от нуля величины внешней задачи определяются из уравнений (3.5) при $s=0$ с учетом (4.4).

Используя данные исходного приложения, для приближений $s=1$ из (2.8), (2.9) получим

$$\sigma_\alpha^{(1)}=\sigma_{\alpha0}^{(1)}+\zeta\sigma_{\alpha1}^{(1)};\ \tau_{\alpha\beta}^{(1)}=\tau_{\alpha\beta0}^{(1)}+\zeta\tau_{\alpha\beta1}^{(1)};\ v_\alpha^{(1)}=v_{\alpha0}^{(1)}+\zeta\gamma_1^{(0)};\ (\alpha,\beta),\ v_\gamma^{(1)}=v_{\gamma0}^{(1)}-\nu\zeta(\sigma_\alpha^{(0)}+\sigma_\beta^{(0)})$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^{(1)}=\tau_{\alpha\gamma0}^{(1)}+\zeta\tau_{\alpha\gamma1}^{(1)}+\zeta^2\tau_{\alpha\gamma2}^{(1)}+\zeta^3\tau_{\alpha\gamma3}^{(1)};\ (\alpha,\beta),\ \sigma_\gamma^{(1)}=\sigma_{\gamma0}^{(1)}+\zeta\sigma_{\gamma1}^{(1)}+\zeta^2\sigma_{\gamma2}^{(1)}+\zeta^3\sigma_{\gamma3}^{(1)} \qquad (4.6)$$

$$h_\alpha^{(1)}=h_{\alpha0}^{(1)}+\zeta h_{\alpha1}^{(1)}+\zeta^2h_{\alpha2}^{(1)}+\zeta^3h_{\alpha3}^{(1)},\ (\alpha,\beta),\ h_\gamma^{(1)}=h_{\gamma0}^{(1)}+\zeta h_{\gamma1}^{(1)}+\zeta^2h_{\gamma2}^{(1)}$$

$$E_\alpha^{(1)}=E_{\alpha0}^{(1)}+\zeta E_{\alpha1}^{(1)}+\zeta^2E_{\alpha2}^{(1)},\ (\alpha,\beta),\ E_\gamma^{(1)}=E_{\gamma0}^{(1)}+\zeta E_{\gamma1}^{(1)},\ \rho_0^{(1)}=\rho_0^{(1)}(\xi,\eta,\tau) \qquad (4.7)$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial(B\sigma_{\alpha0}^{(1)})}{\partial\xi} - Rk_\beta\sigma_{\beta0}^{(1)} + \frac{1}{AB}\frac{\partial(A\tau_{\beta\alpha0}^{(1)})}{\partial\eta} + Rk_\alpha\tau_{\alpha\beta0}^{(1)} = \frac{\partial^2 v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau^2} + R_m(H_{\gamma0}^2+H_{\beta0}^2)\frac{\partial v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau} -$$

$$- R_m\left[H_{\gamma0}\left(\bar E_{\beta0}^{(1)}+H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau}\right) - H_{\beta0}\left(E_{\gamma0}^{(1)} - H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\beta0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)\right] + R_mH_{\gamma0}\frac13\frac{\partial h_{\alpha1}^{(0)}}{\partial\tau};\ (\alpha,\beta) \qquad (4.8)$$

$$\frac{\sigma_{\alpha0}^{(1)}}{r_1}+\frac{\sigma_{\beta0}^{(1)}}{r_2} = -\frac{\partial^2 v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau^2} - R_m(H_{\alpha0}^2+H_{\beta0}^2)\frac{\partial v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau} + R_m\left[H_{\beta0}\left(\bar E_{\alpha0}^{(1)}+H_{\gamma0}\frac{\partial v_{\beta0}^{(1)}}{\partial\tau}\right) -\right.$$

$$\left.- H_{\alpha0}\left(\bar E_{\beta0}^{(1)} - H_{\gamma0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)\right] + \frac12\frac{\partial h_{\alpha1}^{(0)}}{\partial\tau} - \frac12\frac{\partial h_{\beta1}^{(0)}}{\partial\tau}$$

$$[h_\alpha^{(1)}] = 2\left\{\frac1A\frac{\partial h_{\gamma0}^{(0)}}{\partial\tau}+4\pi R_m\left[\bar E_{\beta0}^{(1)}+\left(H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\gamma0}^{(1)}}{\partial\tau}-H_{\gamma0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(1)}}{\partial\tau}\right)\right] -\right.$$

$$- \frac13 4\pi R_m\frac{\partial h_{\alpha1}^{(0)}}{\partial\tau}+\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{\partial E_{\beta0}^{(0)}}{\partial\tau},\quad (\alpha,\beta) \qquad (4.9)$$

$$[E_\alpha^{(1)}] = 2\left[\frac1A\frac{\partial}{\partial\xi}\left(H_{\alpha0}\frac{\partial v_{\beta0}^{(0)}}{\partial\tau} - H_{\beta0}\frac{\partial v_{\alpha0}^{(0)}}{\partial\tau}\right) - \frac{E_{\alpha0}^{(0)}}{r_1}\right],\quad (\alpha,\beta)$$

$$[h_\gamma^{(1)}] = -2\left(\frac1{r_1}+\frac1{r_2}\right)h_{\gamma0}^{(0)}$$

где $\bar E_{\alpha0}^{(1)}$, (α,β) из себя представляют значения четной части относительно ζ для выражений $E_\alpha^{(1)}|_{\zeta=\pm1}$; (α,β) (4.7).

Отметим, что для коэффициентов перед степенями в (4.6) и (4.7) получаются конкретные формулы для их вычисления, но для экономии места эти формулы здесь не приводятся. По такой же причине в уравнениях (4.8) не приведены внешние силы, они имеют аналогичный вид, как в [10, 11].

С учетом (4.9) при $s=1$ с помощью формул (3.5) и (3.6) определяются все искомые величины во внешней от оболочки области.

5. Представим полученные результаты через термины классической линейной теории оболочек [10]. Для этого вводим понятия усилий, моментов и компонентов смещения срединной поверхности оболочки соответствующим образом, как в [10, 11]. Поступая, таким образом, известным способом [10, 11], сложив уравнения (4.2) и (4.8), получим

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}-k_\beta T_2+\frac{1}{AB}\frac{\partial AS_{21}'}{\partial\beta}+k_\alpha S_{\alpha\beta}=2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c^2}H_\gamma^2\frac{\partial u}{\partial t}-$$

$$-\frac{2\sigma h}{c}H_\gamma\left(\overline{E}_\beta+\frac{1}{c}H_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}H_\gamma\left[\frac{\partial E_\beta}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-H_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{h}{2\pi c^2}H_\beta\left(H_\beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-H_\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right);\quad(\alpha,\ \beta)\tag{5.1}$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2\sigma h}{c^2}(H_\alpha^2+H_\beta^2)\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{2\sigma h}{c}\left[H_\beta\left(\overline{E}_\alpha+\frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-H_\alpha\left(\overline{E}_\beta-\frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]+\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}\left\{H_\beta\left[\frac{\partial\overline{E}_\alpha}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-H_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-H_\alpha\left[\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-H_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]\right\}$$

Соотношения упругости получаются в аналогичном виде, как в [10].

Поступая аналогичным образом с соответствующими уравнениями (3.5) при $s=0$ и $s=1$ и подставляя $\zeta_1=0$, получим

$$\overline{E}_\alpha(\alpha,\beta,t)=\iint\limits_\Omega Q_{1\alpha}(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0,\ t)[h_\alpha]d\Omega+\iint\limits_\Omega Q_{2\alpha}(\alpha-\alpha_0,\beta-\beta_0,t[h_\beta]d\Omega,\ (\alpha,\beta)$$

$$\overline{h}_\gamma(\alpha,\beta,t)=\iint\limits_\Omega G_{1\gamma}(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0,\ t)[h_\alpha]d\Omega+\iint\limits_\Omega G_{2\gamma}(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0,\ t)[h_\beta]d\Omega\tag{5.2}$$

где

$$[h_\alpha]=2h\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial\overline{h}_\gamma}{\partial\alpha}+4\pi\frac{\sigma}{c}\left[\overline{E}_\beta+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}-H_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{16\pi^2}{3}\frac{\sigma^2h^2}{c^3}\left[\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-H_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]\right\},\quad(\alpha,\ \beta),\ (\alpha_0,\ \beta_0)\in\Omega,\ (\alpha,\ \beta)\in R_2\tag{5.3}$$

Уравнения (5.1) — (5.3) с учетом соотношений упругости [10] составляют замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений для определения основных расчетных величин. После определения указанных основных расчетных величин остальные расчетные величины будут определяться соответствующими формулами.

Отметим, что уравнения (5.1) и соответствующие соотношения упругости представляют уравнения колебания оболочки по безмоментной теории [10] с учетом сил электромагнитного происхождения. Как нам кажется, эти важные уравнения приводятся здесь впервые.

Уравнения (5.1) — (5.3) позволяют определять величины с асимптотической точностью $O(\varepsilon^2)$. На таком уровне точности учтены силы электромагнитного происхождения в уравнениях (5.2), а также на таком уровне точности написаны выражения (5.3) для $[h_\alpha]$, (α, β). Все эти факторы могут оказаться существенными в конкретных задачах магнитоупругости для тонких оболочек.

При ненулевом показателе изменяемости из систем (2.8), (2.9), (3.5), (3.6) с учетом (2.6), (2.7) следует, что при $s \in [0, l-2p+c)$ разрешающая система имеет структуру (4.1)—(4.5), если же $s \in [l-2p+c, 2l-2p-1]$, то соответствующая система имеет структуру (4.7)—(4.9). Поэтому форма решений уравнений (2.8), (2.9), (3.5), (3.6) будет такой же, как при $s=0$; 1, $p=0$; $l=1$.

Соответствующая система разрешающих уравнений, вытекающая из (2.8), (2.9), (3.5), (3.6), отвечающих точности $O(\varepsilon^{2-2r})$, в терминах усилий и моментов будет

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2 + \frac{\partial AS_{21}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12}\right] + \frac{N_1}{R_1} = 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\sigma h}{c^2}H_\gamma^2\frac{\partial u}{\partial t} -$$

$$-\frac{2\sigma h}{c}H_\gamma\left(\overline{E}_\beta + \frac{1}{c}H_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{8\pi}{3}\frac{\sigma^2 h^3}{c^3}H_\gamma\left[\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right] +$$

$$+\frac{h}{2\pi c^2}H_\beta\left(H_\beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H_\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right); \quad (\alpha, \beta) \tag{5.4}$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial AN_2}{\partial\beta}\right) = -2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h}{c^2}(H_\alpha^2 + H_\beta^2)\frac{\partial w}{\partial t} +$$

$$+\frac{2\sigma h}{c}\left[H_\beta\left(\overline{E}_\alpha + \frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right) - H_\alpha\left(\overline{E}_\beta - \frac{1}{c}H_\beta\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] - \frac{8\pi}{3}\frac{\sigma^2 h^3}{c^3}\left\{H_\beta\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\left(H_\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - H_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right] - H_\alpha\left[\frac{\partial\overline{E}_\beta}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(H_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]\right\} \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 + \frac{\partial AH_{21}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}H_{12}\right] - N_1 = -\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{2\sigma h^3}{3c}H_\gamma\left[\frac{1}{c}H_\gamma\frac{\partial\gamma_1}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(H_\alpha\frac{\partial v}{\partial t} - H_\beta\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\overline{E}_\beta}{R_2} - \frac{1}{c}\frac{\nu}{1-\nu}H_\alpha \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\partial t}\right] - \frac{2\sigma h^3}{3c}H_\beta\left\{\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B\left[\overline{E}_\alpha + \frac{1}{c}\left(H_\gamma\frac{\partial v}{\partial t} - H_\beta\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] +\right.$$

$$+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A\left[\overline{E}_3+\frac{1}{c}\left(H_2\frac{\partial w}{\partial t}-H_1\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\Bigg\}, \quad (\alpha, \beta) \tag{5.6}$$

Соотношения упругости будут выражаться аналогичными формулами [10], поэтому здесь они не приводятся.

К уравнениям движения (5.4)—(5.6) следует присоединить соответствующие уравнения, вытекающие из электродинамической части задачи (2.9), (3.5). Эти уравнения и в случае ненулевой изменяемости имеют вид (5.2), (5.3).

Итак, (5.4)—(5.6), (5.2) и (5.3) будут представлять ту замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений, которая необходима для исследования колебаний проводящей тонкой оболочки по моментной теории.

Подставляя таким образом в полученные интегро-дифференциальные уравнения кривизны $k_1=1/R_1=k_2=1/R_2=0$, получаем двумерные уравнения колебания пластинок в магнитном поле.

6. Вблизи края оболочки возникает магнитоупругое состояние погранслоя, которое должно резко затухать при удалении от края вглубь оболочки. Введение пограничного слоя дает возможность удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности оболочки в терминах трехмерной теории, установить граничные условия внутренней задачи и уточнить магнитоупругое состояние вблизи края.

Чтобы вблизи боковой поверхности оболочки $\alpha=\alpha_0$ построить погранслой, введем новые независимые переменные по формулам [10], а по времени изменяемость погранслоя должна соответствовать изменяемости по времени внутренней задачи, то есть для погранслоя тоже вводится безразмерное время по формуле (2.2), (2.6) или (2.7). Преобразовав уравнения (1.1)—(1.3) указанным выше образом, будем искать решения вновь полученных уравнений в виде

$$\mathcal{L}_l=\lambda^{\varkappa_l}\sum\lambda^{-s}\mathcal{L}_l^{(s)} \tag{6.1}$$

где $\mathcal{L}_l$ —любое из напряжений, перемещений и компонентов возбуждаемого электромагнитного поля внутри или вне оболочки.

После подстановки (6.1) в уравнения магнитоупругости (1.1)—(1.3) мы получим непротиворечивую систему относительно $\mathcal{L}_l^{(s)}$, если

$$\varkappa_{\tau_l}=\varkappa_{v_l}=-l+p, \quad \varkappa_{h_l}=\varkappa_{E_2}=\varkappa_{E_1}=\varkappa_{\varphi}=\frac{3}{2}l\omega-4l+p, \quad \varkappa_{E_3}=\frac{3}{2}l\omega-5l+2p \tag{6.2}$$

Для упругой части задачи получаемая система аналогична системе уравнений статики оболочек [10]. Так, для определения $v_x^{(s)}$ и $v_z^{(s)}$ получаются уравнения плоской деформации для полуполосы, а определение $v_y^{(s)}$ сводится к решению антиплоской задачи для полуполосы. Для динамических процессов, соответствующих (2.6) или (2.7), обе эти задачи имеют квазистатический характер как инерционные члены, так и силы электромагнитного происхождения не входят в уравнения ряда первых приближений, а в тех приближениях, в которых они появляются, определяются через величины, известные из предыдущих приближений. Легко убедиться, что двумерным уравнениям внутренней задачи (5.4)—(5.6), отвечающим точности $O(\varepsilon^{2-2r})$, соответствуют те же граничные условия, что и в статике оболочки [10].

Определение электродинамического погранслоя для всех компонент индуцированного электромагнитного поля приводится к решению одинаковой по виду системе уравнений на плоскости (ξ_1, ζ). Например, для $h_\alpha^{(s)}$ указанные уравнения имеют вид

$$\Delta h_\alpha^{(s)} - 4\pi R_m \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(H_{\alpha 0}\frac{\partial v_z^{(s)}}{\partial \zeta} - H_{\gamma 0}\frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial \zeta}\right) = R_\alpha^{(s)} \tag{6.3}$$

$$\Delta h_0^{(s)} = R_{\alpha_0}^{(s)}; \qquad \Delta = \frac{1}{A_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \tag{6.4}$$

Уравнение (6.3) имеет место во внутренней области для оболочки, то есть $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$; $0 \leqslant \xi_1 < \infty$, а уравнение (6.4) имеет место во внешней от оболочки области.

Отметим, что исследован также погранслой по времени, эти результаты будут приведены в другой работе автора.

В заключение выражаю искреннюю благодарность С. А. Амбарцумяну за обсуждение данной работы и за ценные указания.

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱՉԱՓ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԱՄԲՈՂՋՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԵՐԿՉԱՓ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում կառուցվում են հավասարաչափ ասիմպտոտիկ վերլուծություններ բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության եռաչափ հավասարումների համար։ Այս ճանապարհով բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության եռաչափ խնդիրը ամբողջության մեջ բերվել է երկչափ խնդրի և ստացվել են ասիմպտոտիկորեն ճիշտ երկչափ ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումները դիտարկվող խնդրի համար։ Ուսումնասիրվում է սահմանային շերտը թաղանթի եզրային մակերևույթի մոտ։

THE CONSTRUCTION OF A TWO-DIMENSIONAL THEORY OF VIBRATION OF A CONDUCTIVE THIN SHELL BY MEANS OF ASYMPTOTIC INTEGRATION OF THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF MAGNETOELASTICITY

S. O. SARKISIAN

Summary

In the paper the uniform asymptotic expansions are built for three-dimensional equations of magnetoelasticity of thin shells. In this way the

general three-dimensional problem of magnetoelasticity of thin shells is deduced to an appropriate two-dimensional problem. The exact asymptotic two-dimensional integro-differential equations are obtained for the problem under consideration. The boundary layer at the shell lateral side is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Изд. Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.—ПММ, 1971, т. *35*, вып. 2.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.—ПММ, 1973, т. *37*, вып. 1, с. 114—130.
4. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластин.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. *28*, №2, с. 22—30.
5. *Багдасарян Г. Е.* К теории колебаний и устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле.—Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. *61*, №5, с. 275—282.
6. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной. Ученые записки ЕГУ, сер. естест. наук, 1977, №2, с. 46—50.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1963, т. *27*, вып. 4, с. 593—608.
8. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. Изд. Наука, 1968, с. 161—176.
9. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки.—ПММ, 1969, т. *33*, вып. 6, с. 997—1028.
10. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Изд. Наука, 1976.
11. *Агаловян Л. А.* О некоторых соотношениях классической линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—Изв. АН СССР, МТТ, 1972, №1, с. 109—120.
12. *Агаловян Л. А.* О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий.—Докл. АН Арм. ССР, 1979, т. *69*, №3, с. 151—156.
13. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод построения теории оболочек. В кн.: Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: изд. ТГУ, 1975, с. 151—213.
14. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод в теории оболочек. Успехи механики. Государст. научное издательство «Polish Scientific Publishers», Варшава: 1982, т. *5*, вып. 1/2, с. 137—182.
15. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки.—ПММ, 1974, т. *38*, вып. 6, с. 1072—1078.
16. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок.—ПММ, 1978, т. *42*, вып. 5, с. 899—907.
17. *Саркисян С. О.* К построению двумерной теории колебаний проводящей тонкой пластинки конечной длины методом асимптотического интегрирования уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1982, т. *35*, №6, с. 34—43.
18. *Саркисян С. О.* Асимптотический анализ уравнений, граничных и начальных условий в магнитоупругости тонких пластинок конечных размеров. Механика. Межвузовский сборник научных трудов (посвященный 60-летию С. А. Амбарцумяна). Ереван: Изд. ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 126—133.

Ленинаканский филиал Ереванского политехнического ин-та им. К. Маркса

Поступила в редакцию 22.XI. 1983