ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 539.376

МЕТОД РЯДОВ ВОЛЬТЕРРА В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ УПРУГОСТИ

БЫРДИН А. П., РОЗОВСКИЙ М. И.

В данной статье изучаются две одномерные динамические задачи нелинейной наследственной упругости—о радиальных колебаниях цилиндра и о распространении волн в полуограниченной среде. Метод основан на представлении решения в виде нелинейного функционала, разлагающегося в интегростепенной ряд Вольтерра и аналитического по параметру, играющему роль амплитуды возмущения.

1. Определяющее соотношение для материалов выбирается в виде ряда Вольтерра-Фреше [1]

$$\sigma\{\varepsilon(t),\ \varepsilon(t-\tau)\}=\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{G}_n\varepsilon(t) \tag{1.1}$$

где $\sigma\{\cdot\}$—отнесенный к модулю упругости безразмерный функционал напряжения, $\varepsilon(t)$—соответствующая деформация, $\widehat{G}_n$—оператор, действие которого на функции $\varepsilon(t)$ определено равенством

$$\widehat{G}_n\,\varepsilon(t)=\int\limits_0^{\infty}\ldots\int G_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{m=1}^{n}\varepsilon(t-t_m)dt_m,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.2}$$

Здесь $G_n\,(t_1,\ldots,t_n)$—ядра релаксации порядка n, причем в силу условия причинности $G_n=0$ при $t_m<0,\ 1\leqslant m\leqslant n$.

Считая напряжение заданным, выражение (1.1) можно обратить, если ядро релаксации первого порядка $G_1(t)$ содержит мгновенную составляющую в виде дельта-функции [2], при этом выражение деформации через напряжение имеет аналогичный вид

$$\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{K}_n\sigma(t) \tag{1.3}$$

Здесь операторы $\widehat{K}_n$ определены формулой (1.2). В работе [3] предлагался конкретный способ разрешения функциональных уравнений типа (1.1) с использованием преобразования Фурье исходного и обратного соотношений. Были построены Фурье-образы выражений первых трех ядер K_n через заданные ядра G_n, $n=1,\ 2,\ 3$.

Если заменить линейный интегральный оператор $\widehat{G}_1$ на оператор $\widehat{G}_1^0=\widehat{P}_s(d/dt)+\widehat{G}_1$, где $P_s(x)$—полином s-го порядка по x с постоянными коэффициентами, то можно использовать указанное представление решения (1.3) и получить рекуррентное соотношение, связывающее Фурье-образы ядер решения K_n^* со всеми Фурье-образами заданных ядер G_m^* порядка, не превосходящего n [4].

Предполагая поведение материала при сжатии и растяжении одинаковым, используем частный случай рекуррентного соотношения для ядер нечетного порядка

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)})G_1^{0*}\left(\sum_{l=1}^{2n+1}\omega_l\right) + \sum_{m=1}^{n}\sum_{|J|=n-m} K^*_{(j,1)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(j,1)}) \times$$

$$\times K^*_{(j,2m+1)}(\omega_{(j,2m-1)+1}, \ldots, \omega_{(n)})G^*_{(m)}\left(\sum_{l=1}^{2j_1+1}\omega_l, \ldots, \sum_{l=(j,1)+\ldots+(j,2m-1)+1}^{2n+1}\omega_l\right) = \delta_{1,(m)} \tag{1.4}$$

Здесь $K_n^*(\omega_1, \ldots, \omega_n)$—трансформанты Фурье ядер решения $K_n(t_1, \ldots, t_n)$.

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)}) = (2\pi)^{-n}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} K_{(n)}(t_1, \ldots, t_{(n)})\prod_{j=1}^{2n+1}\exp(-i\omega_j t_j)dt_j$$

$\delta_{1,(n)}$ — символ Кронекера, $G_1^{0*}(\omega) = P_s(-i\omega) + G_1^*(\omega)$, индексы в скобках следует понимать здесь и ниже как равенства $(n) = 2n+1$, $(J, m) = 2j_m+1$, $|J| = j_1 + \ldots + j_{2m+1}$—длина мультииндекса J. Внутренняя сумма в выражении (1.4) берется по целым неотрицательным решениям уравнения $|J| = n-m$ и равна нулю при $m > n$. Если функции $G_n(t_1, \ldots, t_n)$ являются сепарабельными с коэффициентами a_n

$$G_{(n)}(t_1, \ldots, t_{(n)}) = a_{(n)}\prod_{j=1}^{2n+1} G_1(t_j),\ a_1 = 1,$$

то Фурье-образы функций K_n при условии $\hat{P}_s(d/dt) \equiv 0$ можно найти в замкнутом виде, исключая последовательно из рекуррентного равенства (1.4) ядра K_m для $m > 1$. Таким образом, получим

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)}) = (2\pi)^{-n} f_n(a_1, \ldots, a_{(n)})\, K_1^*\left(\sum_{l=1}^{2n+1}\omega_l\right) \tag{1.5}$$

причем

$$f_n(1, \ldots, 1) = (-1)^n 2^{2n+1}(2n+1)!!/(2n+2)!!$$

Наличие в физическом соотношении (1.1) только одного нелинейного оператора $\hat{G}_3$ с сепарабельным ядром и условие $\hat{P}_s(d/dt) \neq 0$ приводят к следующему выражению для Фурье-образов ядер решения:

$$K^*_{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_{(n)}) = (-1)^n (a_3/2\pi)^n K_1^*\left(\sum_{l=1}^{2n+1}\omega_l\right)\prod_{l=1}^{2n+1}K_1^*(\omega_l)G_1^*(\omega_l) \times$$

$$\times F\left\{G_1^*\left(\sum_{l=1}^{m}\omega_l\right),\ K_1^*\left(\sum_{l=1}^{m}\omega_l\right)\right\},\quad 3 \leqslant m \leqslant 2n+1$$

Здесь $F\{\cdot\}$—некоторая нелинейная функция Фурье-образов ядер $G_1(t)$ и $K_1(t)$, вид которой не приводим ввиду громоздкости. Формулы (1.5) и (1.6) будут использованы при построении решений рассматриваемых задач.

2. Пусть длинный полый цилиндр с внутренним a и внешним b радиусами, изготовленный из нелинейного наследственно-упругого материала, подвергается действию равномерно распределенного на внутренней границе давления $q(t)$. Цилиндр по внешней границе скреплен с упругой оболочкой толщины h. В предположении объемной несжимаемости, осевой симметрии и плоской малой деформации радиальные колебания описываются следующей краевой задачей [5]:

$$\partial\sigma_r/\partial r + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = \rho\ddot{x}(t)/\rho_0 r, \quad \sigma_r(a/b, t) = -q(t)/2G \tag{2.1}$$

$$\sigma_r(1, t) = -\Delta x(t) - h\rho_1\ddot{x}(t)/b\rho_0, \quad \varepsilon_r = -ax(t)/br^2, \quad \varepsilon_\varphi = ax(t)/br^2$$

где σ_r и σ_φ—отнесенные к удвоенному модулю сдвига цилиндра $2G$ радиальное и окружное напряжения, ε_r и ε_φ—соответствующие деформации, $r=r'/b$ и $t=Bt'$—безразмерные координаты, r' и t'—радиальная координата и время, $B=(2G/ab\rho_0)^{1/2}$, $\rho_0=\rho\ln(b/a)+\rho_1 h/b$, ρ и ρ_1—плотности материалов цилиндра и оболочки, $\Delta=ahE_1/2Gb^2(1-\nu_1^2)$, E_1 и ν_1—модуль упругости и коэффициент Пуассона оболочки, $x(t)$—безразмерное радиальное перемещение цилиндра. В качестве реологических уравнений для σ_r и σ_φ выбираем соотношение (1.1) с одним нелинейным оператором $\hat{G}_3$ и, таким образом, замыкаем систему уравнений (2.1).

Проинтегрируем первое уравнение системы (2.1) по r на интервале $[a/b, 1]$ и исключим напряжения с помощью остальных уравнений. Таким образом, задачу (2.1) сведем к интегрированию нелинейного интегродифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) + \Delta x(t) + \lambda(\hat{G}_1 + \lambda_1\hat{G}_3)x(t) = A(t) \tag{2.2}$$

где

$$\lambda = (b^2 - a^2)/ab, \quad \lambda_1 = 1 + \lambda^2/3, \quad A(t) = q(t)/2G$$

Уравнение (2.2) относится к рассмотренному в пункте 1 типу с оператором

$$\hat{G}_1^0 = d^2/dt^2 + \Delta + \lambda\hat{G}_1$$

Ядро оператора $\hat{G}_1$ выбираем в виде $G_1(t) = \delta(t) - WR(t)$, а ядро оператора $\hat{G}_3$ считаем сепарабельным с коэффициентом a_3. Значения параметров, входящих в уравнение (2.2), выбираем такими, что выполняются неравенства

$$\max|A(t)| < \lambda W < \alpha, \quad \alpha = \lambda\lambda_1 a_3 \tag{2.3}$$

В известной авторам литературе уравнения вида (2.2) рассматривались с малым параметром при нелинейном операторе и малым коэффициентом W и решались обычно методом осреднения. Однако, по условию (2.3) вязкость и нелинейность в системе нельзя считать малыми, поэтому используем методику, изложенную в части 1.

Полагая правую часть уравнения (2.2) равной $A\sin\omega t$, стационарное решение ищем в виде (1.3). Учитывая вид функции $A(t)$, имеем

$$x(t)=(A/2i)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha A^2/2)^n\sum_{m=0}^{2n+1}(-1)^{n+m}\widehat{C}_{(n)}^{m}K_{(n)}\exp[i\omega(2n-2m+1)t] \quad (2.4)$$

Здесь i—мнимая единица, а операторы $\widehat{C}_n^m$ определены выражением

$$\widehat{C}_n^m K_n=\sum K_n^*(\underbrace{-\omega,\ldots,-\omega}_{m},\ \underbrace{\omega,\ldots,\omega}_{n-m}) \quad (2.5)$$

Сумма в формуле (2.5) берется по перестановкам аргументов группы $-\omega$ с аргументами группы ω. Число членов в сумме равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{m}$.

Решение (2.4) с учетом равенства (1.6) допускает оценку

$$|x(t)|\leqslant AM_1\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{2n}\alpha_0^n/(2n+1) \quad (2.6)$$

где

$$\alpha_0=A^2M_0^3\alpha,\quad M_1=\max|K_1^*(\omega)|,\quad M_0=\max|K_1^*(\omega)G_1^*(\omega)|$$

Условие сходимости ряда (2.6) определяет возможные значения параметра нелинейности α_3 как функцию амплитуды A и частоты вынуждающей силы $\omega : \alpha_0 < 4/27$. При получении оценки (2.6) использовалось выражение для функции $F\{\cdot\}$ из (1.6) в случае $G_1^{0*}(\omega)=G_1^*(\omega)$

$$F\{G_1^*, K_1^*\}=3\binom{3n-1}{n-1}/(2n+1)$$

Учет первых двух членов равенства (2.4) дает следующий вид приближенного решения:

$$x(t)=A|K_1^*(\omega)|[\sin(\omega t+\varphi)+3\alpha_1\sin(\omega t+\varphi_1)]+A|K_1^*(3\omega)|\alpha_1\sin(3\omega t+\varphi_3) \quad (2.7)$$

где

$$\alpha_1=\alpha A^2|K_1^*(\omega)G_1^*(\omega)|/4,\quad \mathrm{tg}\varphi=\mathrm{Im}[K_1^*(\omega)]/\mathrm{Re}[K_1^*(\omega)]$$

$$\mathrm{tg}\varphi_1=\mathrm{Im}[K_1^{*2}(\omega)G_1^*(\omega)]/\mathrm{Re}[K_1^{*2}(\omega)G_1^*(\omega)]$$

$$\mathrm{tg}\varphi_3=\mathrm{Im}[K_1^*(3\omega)K_1^{*3}(\omega)G_1^{*3}(\omega)]/\mathrm{Re}[K_1^*(3\omega)K_1^{*3}(\omega)G_1^{*3}(\omega)]$$

Построенное решение (2.4) позволяет вычислить деформации по формулам (2.1), а затем и напряжения в любом приближении. Структура решения такова: первый член является решением линейной задачи, следующий дает поправку к первому и третью гармонику и так далее.

Прохождение через резонанс не влечет неограниченного роста амплитуды колебаний и максимум амплитуды первой гармоники достигается несколько левее частоты $\omega_0=(\lambda+\Delta)^{1/2}$. С ростом геометрического фактора λ максимум снижается и ширина пика растет. При частоте внешней силы вблизи $\omega_0/3$ амплитуда поправочного члена основной гармоники становится меньше амплитуды третьей гармоники и, таким образом, искажение формы колебаний может оказаться существенным. Так, для слабосингулярного ядра Ржаницына

$$G_1(t)=\delta(t)-\nu\beta^\eta t^{1-\eta}e^{-\beta t}/\Gamma(\eta)$$

при следующих значениях параметров $\beta=0{,}05$, $\eta=0{,}15$, $\nu=0{,}66$, $\lambda=3{,}75$, $\Delta=0{,}89$, $B=9469{,}575\ \text{с}^{-1}$, $A=18{,}75\cdot10^{-4}$, $\omega=\omega_m/3=0{,}6903$, где ω_m—резонансная частота для линейной вязкоупругой задачи, амплитуда третьей гармоники больше амплитуды поправочного члена основной гармоники примерно в десять раз.

3. Уравнение движения одномерной сплошной среды в безразмерных переменных $t=\beta t'$, $x=x'\beta/c$ имеет вид

$$\partial^2\varepsilon/\partial t^2=\partial^2\sigma/\partial x^2 \tag{3.1}$$

Здесь β^{-1}—время релаксации системы, $c=\sqrt{E/\rho}$—скорость звука в упругой среде, плотность которой равна ρ и упругий модуль E, x'—координата в направлении распространения волны.

Пусть к границе среды $x=0$ приложено напряжение

$$\sigma(0,t)=P\sin\omega t \tag{3.2}$$

где $\sigma(x,t)$ задано соотношением (1.1) с нечетными n.

Присоединяя к уравнениям (3.1), (3.2) условие на бесконечности

$$\varepsilon(\infty,t)=0 \tag{3.3}$$

получим краевую задачу с нелинейным граничным условием (3.2), [6].

Решение задачи (3.1)—(3.3) разыскиваем в виде ряда [7]

$$\varepsilon(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{2n+1}\varepsilon_{(n)}(x,t) \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_{(n)}(x,t)=\sum_{m=-n-1}^{n}A_{(n)}^{(m)}(x)\exp[i(2m+1)\omega t] \tag{3.5}$$

где $A_{(n)}^{-(m)}=\overline{A_{(n)}^{(m)}}$, черта означает комплексное сопряжение.

Подставляя выражение (3.4) в уравнение движения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях P, получим систему уравнений относительно функций $\varepsilon_{(n)}(x,t)$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{G}_1\right)\varepsilon_{(n)}(x,t)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{|m|=n-r}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty G_{(r)}(t_1,\ldots,t_{(r)})\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x^2}\prod_{j=1}^{2r+1}\varepsilon_{(m_j)}(x,t-t_j)dt_j \tag{3.6}$$

Подставляя в выражение (3.6) соотношение (3.5), умножая уравнения на $\exp[-i\omega(2m+1)t]$ и интегрируя по t на интервале $[0,2\pi/\omega]$, получим следующую краевую задачу для функций $A_{(n)}^{(k)}(x)$:

$$\left[G_1^*((2k+1)\omega)\frac{d^2}{dx^2}+(2k+1)^2\omega^2\right]A_{(n)}^{(k)}(x)=-\sum_{r=1}^{n}\sum_{|m|=n-r}\times$$

$$\times\sum_{|p|=k-r}a_{(r)}\frac{d^2}{dx^2}\prod_{j=1}^{2r+1}A_{(m_j)}^{(p_j)}(x)G_j^*((2p_j+1)\omega) \tag{3.7}$$

$$A_{(n)}^{(k)}(0)=i(-1)^{k+1}f_n2^{-2n-1}\binom{2n+1}{n-k}K_1^*((2k+1)\omega),\quad A_{(n)}^{(k)}(\infty)=0,$$

$$-n-1\leqslant k\leqslant n \tag{3.8}$$

Краевое условие (3.8) получается из сравнения выражений (3.4)—(3.5) при $x=0$ и (2.4); в последнем вместо функции $x(t)$ надо поставить граничное значение деформации $\varepsilon(0, t)$ и учесть равенство (1.5). Для $n=0$ и $n=1$ эти уравнения имеют вид:

$$A_1^{\pm 1''}(x)+\omega^2 K_1^*(\pm\omega)A_1^{\pm 1}(x)=0, \quad A_1^{\pm 1}(0)=\mp iK_1^*(\pm\omega)/2, \; A_1^{\pm 1}(\infty)=0 \quad (3.9)$$

$$A_3^{\pm 1''}(x)+\omega^2 K_1^*(\pm\omega)A_3^{\pm 1}(x)=-2\pi(\widehat{C}_3^{1;2}G_3)K_1^*(\pm\omega)\frac{d^2}{dx^2}A_1^{\pm 1}(x)|A_1^1(x)|^2$$

$$A_3^{\pm 1}(0)=\mp ia_3 3K_1^*(\pm\omega)/8, \quad A_3^{\pm 1}(\infty)=0$$

$$A_3^{\pm 3''}(x)+9\omega^2 K_1^*(\pm 3\omega)A_3^{\pm 3}(x)=-2\pi(\widehat{C}_3^{0;3}G_3)K_1^*(\pm 3\omega)\frac{d^2}{dx^2}(A_1^{\pm 1}(x))^3$$

$$A_3^{\pm 3}(0)=\mp ia_3 K_1^*(\pm 3\omega)/8, \quad A_3^{\pm 3}(\infty)=0$$

Решая уравнения (3.9) при условии сепарабельности ядра оператора $\widehat{G}_3$, по формулам (3.5) построим деформации

$$\varepsilon_1(x, t)=|K_1^*(\omega)|\exp(-\gamma_1 x)\sin(\theta_1+\psi_1)$$

$$\varepsilon_3(x, t)=\frac{3a_3}{16}\frac{|K_1^*(\omega)|\exp(-\gamma_1 x)}{\sin(\psi_1/2)\sqrt{1+3\sin^2(\psi_1/2)}}[\sin(\theta_1+\beta_1)+$$

$$+\exp(-2\gamma_1 x)(1+8\sin^2(\psi_1/2))\sin(\theta_1+\beta_2)]+\frac{a_3}{4}\frac{|K_1^*(3\omega)|}{\sqrt{1-2\delta\cos(\psi_3-\psi_1)+\delta^2}}\times$$

$$\times[\delta\exp(-\gamma_3 x)\sin(\theta_3+\psi_3+\beta_3)-\exp(-3\gamma_1 x)\sin(3\theta_1+\psi_1+\beta_1)]$$

где $\gamma_n=n\omega\operatorname{Re}(-K_1^*(n\omega))^{1/2}$—коэффициенты затухания волн, $\theta_n=n\omega(t-x/c_n)$—волновая переменная, $\delta=|G_1^*(\omega)|/|G_1^*(3\omega)|$, $c_n=1/\operatorname{Im}(-K_1^*(n\omega))^{1/2}$—фазовая скорость волн

$$G_1^*(n\omega)=|G_1^*(n\omega)|(\cos\psi_n-i\sin\psi_n), \qquad \operatorname{tg}\beta_1=-\operatorname{ctg}(\psi_1/2)\frac{2\cos^2\psi_1-4\cos\psi_1-1}{2(\cos^2\psi_1-\cos\psi_1-1)}$$

$$\operatorname{tg}\beta_3=\frac{\sin(2\psi_3-\psi_1)-\delta\sin\psi_3}{\cos(2\psi_3-\psi_1)-\delta\cos\psi_3}, \qquad \operatorname{tg}\beta_2=-\operatorname{ctg}(\psi_1/2)\frac{8\cos^2\psi_1-20\cos\psi_1+11}{2(4\cos^2\psi_1-6\cos\psi_1-1)}$$

Характеристические многочлены уравнений (3.7) для любого n имеют корни вида $(2k+1)\omega\sqrt{-K_1^*((2k+1)\omega)}$, определяющие коэффициенты затухания γ_k и скорости волн c_k. Следовательно, уравнения для функций $A_{(n)}^{(k)}$ с одинаковыми индексами k дают вклады в $\varepsilon_n(x, t)$ в виде волн, распространяющихся со скоростью c_k. Поскольку же правые части этих уравнений содержат функции $A_{(m)}^{(k)}$ с меньшими нижними индексами, чем левые, то в $\varepsilon_{(n)}(x, t)$ войдут и волновые члены с фазовыми скоростями c_m для $m<k$.

Таким образом, граничное возмущение распадается на ряд волн сложной формы, движущихся с различными скоростями. Спектр волны скорости c_n ограничен снизу гармоникой частоты $n\omega$. Анализ зависимости c_n от частоты ω при различных значениях параметра сингулярности η и дефекта упругого модуля ν для слабосингулярного ядра Ржаницына позволяет сделать следующие выводы.

При значениях η вблизи нуля кривые $c_n(\omega)$ растут медленно и расстояние между ними для различных n мало при всех ω. Следовательно, при малых η в среде распространяется волновой пакет со скоростями составляющих $\sqrt{1-\nu}<c_n<1$. При малых значениях ν его можно интерпретировать как волну, движущуюся с упругой скоростью. Эта же картина имеет место для любых η и ν, но при достаточно больших частотах ω.

При значениях параметров ν и η вблизи единицы можно указать такие значения ω, при которых c_3-c_1 и $c_5-c_3 \gg c_{2n+1}-c_{2n-1}$, $n\geqslant 3$. Следовательно, в этом случае возмущение распадается на две уединенные волны и расплывающийся волновой пакет со скоростями гармоник от c_5 до 1.

При $\eta=1$ и $\omega\to\infty$ коэффициенты затухания $\gamma_n\to\nu/2$ для всех значений n, при $\eta<1$ неограниченно растут. При небольших частотах γ_n для первых номеров n малы и, таким образом, уединенные волны могут иметь большую крутизну фронта и при малых x распространяются почти, не меняя формы.

Итак, рассмотрены две динамические задачи нелинейной наследственной упругости, к уравнениям которых нельзя применить обычно используемый в таких случаях метод осреднения. Предлагаемый здесь алгоритм позволяет строить решение в любом приближении. Единственность решения в классе аналитических функционалов следует из единственности разрешимости рекуррентного соотношения (1.4), существование решения вытекает из сходимости ряда (1.3) или же из оценки (2.6).

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

Ա. Պ. ԲԻՐԴԻՆ, Մ. Ի. ՌՈԶՈՎՍԿԻ

Ամփոփում

Զարգացվում է ժառանգական առաձգականության ոչ գծային դինամիկ խնդիրների լուծման մեթոդ։ Այն դեպքում, երբ ոչ գծայնության և մածուցիկության գործակիցները չի կարելի համարել փոքր, կառուցված են երկու՝ գլանի տատանումների և կիսաանվերջ միջավայրում ալիքների մասին դինամիկ խնդիրների լուծումները։

VOLTERRA SERIES METHOD IN DYNAMICAL PROBLEMS OF NONLINEAR HEREDITARY ELASTICITY

A. P. BYRDIN, M. I. ROSOVSKY

Summary

A solution method for nonlinear dynamical problems of hereditary elasticity is developed. The solution of two dynamical problems—oscil-

lation of cylindres and waves in semi-infinite media—are found in the case where coefficients of nonlinearity and viscosity are not considered as small values.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука. 1977. 384 с.
2. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязко-упругости.—В сб.: Упругость и неупругость. М.: МГУ, 1973, вып. 8, с. 95—173.
3. *Nakada O.* Theory of Non-linear Responses. Journal of the Physical Society of Japan, 1960, 15, № 12, p. 2280—2288.
4. *Бырдин А. П., Россихин Ю. А.* О рассеянии энергии при периодическом возбуждении нелинейных наследственно-упругих систем.—В сб.: Физика структуры и свойств твердых тел. Куйбышев: КГУ, 1979, вып. 3, с. 200—204.
5. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязко-упругих материалов.—М.: Наука, 1972. 328 с.
6. *Астафьев В. И., Мешков С. И.* Вынужденные колебания полубесконечного стержня из нелинейного наследственно-упругого материала.—Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 4, с. 93—98.
7. *Бырдин А. П., Розовский М. И.* Смешанная динамическая задача для нелинейного наследственно-упругого стержня.—В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы 2 Всесоюзной конф.. Днепропетровск: ДГУ, 1981, с. 44—45.

Воронежский политехнический институт
Днепропетровский горный институт им. Артема

Поступила в редакцию
10.VI.1983