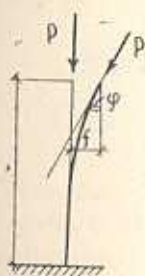


УДК 624.046.3

## КОНСОЛЬНЫЙ УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ, НАГРУЖЕННЫЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

РЖАНИЦЫН А. Р.

1. Стержень, нагруженный силой, всегда направленной по касательной к оси стержня на его свободном конце (фиг. 1), представляет собой неконсервативную систему. Действительно, работа, производимая внешней силой при переходе стержня из начального вертикального положения в искривленное, характеризуемое прогибом  $f$  и углом поворота  $\varphi$  его верхнего конца, будет различной при различных путях деформирования.



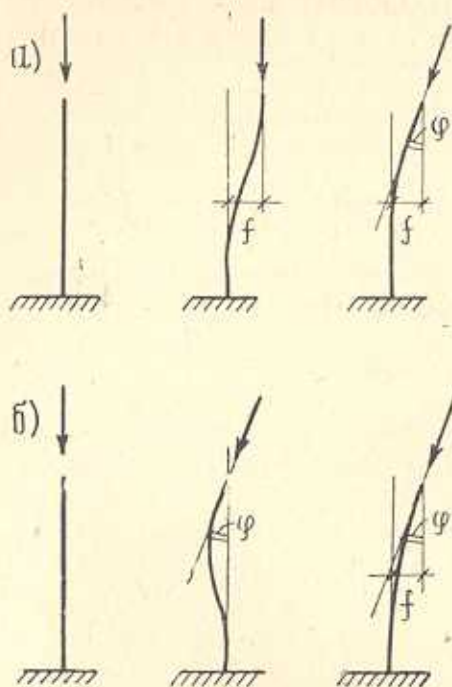
Фиг. 1

Например, если сначала вызвать поступательное перемещение верхнего конца на расстояние  $f$  по горизонтали без поворота, а затем повернуть этот конец на угол  $\varphi$  (фиг. 2а), то работа следящей силы на этих перемещениях будет равна нулю. Если же сначала произвести поворот  $\varphi$ , а затем поступательное смещение  $f$ , то на втором этапе деформирования следящая сила произведет работу  $P \sin \varphi f$  (фиг. 2б). Таким образом, работа внешней силы здесь зависит от пути деформирования и на замкнутом цикле может приобрести отличное от нуля значение.

Поскольку для неконсервативных систем отсутствует понятие потенциальной энергии, то нельзя исходить из условия ее минимума, выражающегося в виде уравнений равновесия. Для следящей силы уравнение равновесия вообще невозможно составить, так как внешняя сила, создавая положительный внешний момент, не может уравновесить отрицательный момент внутренних сил (фиг. 1). Формальное решение задачи изгиба стержня путем приравнивания нулю определителя системы уравнений, выражающих граничные условия через произвольные постоянные общего интеграла дифференциального уравнения изгиба, приводит здесь к абсурдному результату о невозможности потери устойчивости стержня при любой его длине.

Для правильного решения задачи следует ввести силы инерции или силы диссипации (поглощения энергии). При этом решение будет зависеть от условий распределения масс и вязких сопротивлений по длине стержня.

2. Возьмем сначала наиболее простую задачу о поведении уп-



Фиг. 2



Фиг. 3

ругого консольного стержня, нагруженного следящей силой и имеющего на конце невесомое тело, движению которого оказывает сопротивление некоторая вязкая среда с усилием, пропорциональным скорости (фиг. 3)

$$Q = -n\dot{y}(l) \quad (2.1)$$

Тогда граничные условия на верхнем конце стержня будут:

$$y''(l) = 0; \quad -EJy'''(l) = -n\dot{y}(l) \quad (2.2)$$

Будем искать решение в форме

$$y = v(x) \exp(\lambda t) \quad (2.3)$$

при этом граничные условия (2.2) после сокращения на  $\exp(\lambda t)$  получают вид

$$v''(l) = 0; \quad EJv'''(l) = n\lambda v(l) \quad (2.4)$$

Подставляя в них выражения общего интеграла уравнения изогнутой оси стержня и его производных

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4; \quad y' = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_4 \quad (2.5)$$

$$y'' = -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx; \quad y''' = -k^3 C_1 \cos kx + k^3 C_2 \sin kx; \quad k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

С учетом (2.3) получим, обозначая  $kt = v$ :

$$C_1 \sin \nu + C_2 \cos \nu = 0; EJk^3 [-C_1 \cos \nu + C_2 \sin \nu] - n\lambda [C_1 (\sin \nu - \nu) + C_2 (\cos \nu - 1)] = 0$$

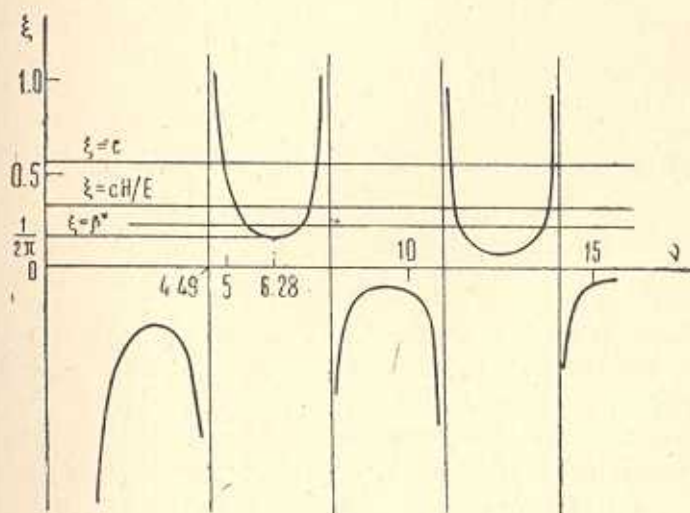
или, поскольку  $EJk^3 = Pk$

$$C_1 \sin \nu + C_2 \cos \nu = 0; C_1 (-Pk \cos \nu - n\lambda \sin \nu + n\lambda \nu) + C_2 (Pk \sin \nu - n\lambda \cos \nu + n\lambda) = 0$$

Приравняв нулю определитель этой системы уравнений, будем иметь

$$Pk + n\lambda (\sin \nu - \nu \cos \nu) = 0; \quad \lambda = \frac{Pk}{n(\nu \cos \nu - \sin \nu)} \quad (2.6)$$

График изменения  $\lambda$  в функции от  $\nu$  показан на фиг. 4.



Фиг. 4

При малых  $\nu$  (то есть малых  $l$  при заданных  $P$  и  $EJ$ )  $\lambda$  отрицательно, что означает устойчивость вертикального положения стержня.

При  $\nu=0$   $\lambda=-\infty$ , при  $\nu=\frac{\pi}{2}$   $\lambda=-\frac{Pk}{n}$ . Максимум  $\lambda$  достигается при

$$\nu \sin \nu = 0 \quad (2.7)$$

то есть при  $\nu=\pi$ ; при этом  $\lambda=-Pk/(n\pi)$ .

Дальнейшее увеличение  $\nu$  приводит к увеличению устойчивости, но при

$$\nu \cos \nu = \sin \nu; \quad \nu = \operatorname{tg} \nu \quad (2.8)$$

то есть при  $\nu=4,4934$  происходит скачкообразный переход через минус бесконечность, что означает мгновенное выпучивание стержня. Если это состояние стержня удастся каким-либо способом перейти, то при больших длинах прогибы будут возрастать во времени по экспоненциальному закону. С увеличением параметра длины до значения  $\nu=2\pi$ , являющегося следующим корнем уравнения (2.7), интенсивность возрастания прогибов будет снижаться, а затем снова повышаться до значения  $\nu=7,7253$ , являющегося вторым значением

корня уравнения (2.8), когда произойдет новый перескок уже в область отрицательных  $\lambda$  и устойчивых движений стержня. Таким образом, при переходе через каждый новый корень уравнения (2.8) будет происходить скачкообразная смена устойчивых движений стержня на неустойчивые или наоборот. Как видим, картина потери устойчивости стержня здесь резко отличается от того, что имеет место в консервативных системах.

3. Предположим теперь, что вместо вязкого сопротивления на конце стержня имеется сосредоточенная масса  $m$ , которая создает инерционную силу  $-m\ddot{y}(l)$ . При этом, положив

$$y = v(x) \sin \omega t \quad (3.1)$$

получим на верхнем конце граничные условия

$$v''(l) = 0; \quad EJv'''(l) = -\omega^2 m v(l)$$

Проведенное выше решение здесь остается в силе, но с заменой  $n\lambda$  на  $-\omega^2$ , то есть будет

$$\omega^2 = \frac{Pk}{m(\sin \nu - \nu \cos \nu)} \quad (3.2)$$

В зонах устойчивого движения квадрат частоты  $\omega^2$  будет положительным, а сама частота — действительной. В зонах неустойчивости  $\omega^2$  отрицательно, а частота — мнимая, что соответствует аperiodическому движению по экспоненциальному закону. При  $\nu$ , являющихся корнями уравнения (2.8), происходит скачкообразный переход от устойчивых движений с бесконечно большой частотой к неустойчивым с бесконечной скоростью выпучивания или наоборот.

При наличии и массы и сопротивления, задаваясь движением в форме (2.3), получим в (2.4) вместо  $n\lambda$  величину  $n\lambda + m\lambda^2$  и вместо (2.6) уравнение

$$n\lambda + m\lambda^2 = \frac{Pk}{\nu \cos \nu - \sin \nu}$$

Обозначая

$$\frac{Pk}{\nu \cos \nu - \sin \nu} = \xi \quad (3.3)$$

получим

$$\lambda = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 + 4m\xi}}{2m} \quad (3.4)$$

При малых длинах стержня  $\xi$  отрицательно и оба значения  $\lambda$  (3.4) тоже отрицательны, что означает устойчивые движения по затухающему экспоненциальному закону. При большой массе  $m$  значения  $\lambda$  могут стать комплексными, но действительная их часть, равная  $-n/(2m)$ , остается отрицательной. Движение при этом происходит по закону затухающих колебаний. После перехода  $\nu$  через величину 4,4934 один из корней  $\lambda$  становится положительным, что соответствует неустойчивому движению по закону возрастающих коле-

баний. В данном случае мы имеем ту же картину, что и при отсутствии массы, но движения могут происходить не только по экспоненциальному закону, но и по закону затухающих или возрастающих колебаний.

Критические силы  $P$  или длины  $l$ , соответствующие корням уравнения (2.8), разграничивают области устойчивости и неустойчивости, однако переход через них вызывает не плавное, а скачкообразное изменение характера движения от абсолютной устойчивости к мгновенному выпучиванию и наоборот. Поэтому такой переход должен сопровождаться разрушением стержня, если на время его не будут введены дополнительные связи, изменяющие расчетную схему стержня. Как видно из (3.3), критические силы не зависят от величины массы  $m$  и сопротивления  $n$  на конце стержня.

4. Примем теперь вместо простого закона вязкости (2.1) более общую наследственную зависимость упруго-ползучей среды

$$Q = -EJy'''(l) = c \left[ y(l) - \int_{-\infty}^l R(t-\tau)y(t, \tau)d\tau \right] \quad (4.1)$$

где  $c$  — мгновенный коэффициент упругости, а  $R(t-\tau)$  — резольвента ядра ползучести, представляющая собой функцию разности рассматриваемого момента времени  $t$  и момента  $\tau$  — элементарного перемещения верхнего конца стержня  $y(\tau)d\tau$ .

После подстановки в (4.1) формы движения (2.3) получим:

$$EJv'''(l)e^{\lambda t} = c \left[ v(l)e^{\lambda t} - \int_{-\infty}^l R(t-\tau) \cdot v(l)e^{\lambda \tau} d\tau \right] =$$

$$= c \left[ v(l)e^{\lambda t} - \int_0^{\infty} R(\theta) \cdot v(l)e^{-\lambda(\theta-t)} d\theta \right] = c \left[ v(l)e^{\lambda t} - v(l)e^{\lambda t} \int_0^{\infty} R(\theta)e^{-\lambda\theta} d\theta \right]$$

или

$$EJv'''(l) = c[v(l) - R^*(\lambda)v(l)] \quad (4.2)$$

где  $R^*(\lambda)$  — изображение Лапласа резольвенты  $R(\theta)$ ;  $\theta = t - \tau$ .

Выражение (4.2) отличается от второго условия (2.4) только тем, что в нем произведена замена  $n\lambda$  на  $c[1 - R^*(\lambda)]$ . Поэтому можно сразу написать вместо (2.6)

$$c[1 - R^*(\lambda)] = \xi \quad (4.3)$$

где

$$\xi = \frac{Pk}{\nu \cos \nu - \sin \nu}$$

Задаваясь значениями  $\nu = l\sqrt{P/EJ}$ , из графика на фиг. 4 или непосредственным вычислением найдем  $\xi$  и затем, решив уравнение (4.3), величину  $\lambda$ , знак которой укажет на то, будет ли стержень устойчивым ( $\lambda < 0$ ) или неустойчивым ( $\lambda > 0$ ).

Для экспоненциального ядра ползучести резольвента имеет вид [1]

$$R(\theta) = \frac{E-H}{\gamma H} \exp(-\theta/\gamma)$$

где  $E$ —мгновенный,  $H$ —длительный модули упругости,  $\gamma$ —время релаксации,  $\theta = t - \tau$ , а ее изображение —

$$R^*(\lambda) = \frac{E-H}{H\lambda\gamma + E}$$

Уравнение (4.3) здесь принимает вид

$$\frac{\xi}{c} = 1 - \frac{E-H}{H\lambda\gamma + E} = \frac{H\lambda\gamma + H}{H\lambda\gamma + E}$$

откуда

$$H\lambda\gamma = \frac{E\xi - Hc}{c - \xi}$$

Условия отрицательности  $\lambda$  будут

$$\xi < Hc/E; \xi < c \text{ или } \xi > Hc/E; \xi > c$$

Поскольку всегда  $H < E$ , эти условия можно записать в виде

$$\xi < Hc/E \text{ или } \xi > c$$

Проведем на графике зависимости  $\xi$  от  $\nu$  две горизонталы:  $\xi = Hc/E$  и  $\xi = c$  (фиг. 4). Тогда пересечения этих горизонталей с кривой  $\xi(\nu)$  ограничат области неустойчивости, которые возможны лишь в тех интервалах, где функция  $\xi(\nu)$  положительна.

Для сингулярного ядра вида

$$K(\theta) = \frac{A \exp(-\beta\theta)}{T^q \theta^{1-q}}; \quad (0 < q < 1)$$

где  $A$ ,  $T$  и  $q$ —некоторые положительные константы, имеем изображение [1]

$$K^*(\lambda) = \frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda + \beta)T]^q}$$

где  $\Gamma(q)$ —гамма функция  $q$ . Изображение резольвенты этого ядра будет

$$R^*(\lambda) = \frac{K^*(\lambda)}{1 + K^*(\lambda)} = \frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda + \beta)T]^q + A\Gamma(q)}$$

Далее из уравнения (4.3) получаем

$$\frac{\xi}{c} = 1 - \frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda + \beta)T]^q + A\Gamma(q)} = \frac{[(\lambda + \beta)T]^q}{[(\lambda + \beta)T]^q + A\Gamma(q)}$$

и

$$\frac{c}{\xi} = 1 + \frac{A\Gamma(q)}{[(\lambda + \beta)T]^q}$$

Отсюда следует

$$[(\lambda + \beta)T]^q = \frac{A\Gamma(q)}{c/\xi - 1}; \quad \lambda = \frac{1}{T} \sqrt[q]{\frac{A\Gamma(q)\xi}{c - \xi}} - \beta \quad (4.4)$$

$\lambda$  будет отрицательным, если

$$\frac{A\Gamma(q)\xi}{c - \xi} < (\beta T)^q$$

При  $\xi < c$

$$A\Gamma(q)\xi < (c - \xi)(\beta T)^q; \quad [A\Gamma(q) + (\beta T)^q]\xi < c(\beta T)^q; \quad \xi < \frac{c(\beta T)^q}{A\Gamma(q) + (\beta T)^q} \quad (4.5)$$

При  $\xi > c$  знак неравенства (4.4) меняется и решающим будет  $\xi > c$ . В интервале, где  $\frac{c(\beta T)^q}{A\Gamma(q) + (\beta T)^q} < \xi < c$ , движение стержня неустойчиво.

Из (4.4) следует, что при  $\xi = c$   $\lambda$  меняет знак, переходя через бесконечность, а при

$$A\Gamma(q)\xi - (\beta T)^q(c - \xi) = 0; \quad \xi = \frac{(\beta T)^q \cdot c}{A\Gamma(q) + (\beta T)^q}$$

плавно переходит через нуль. Таким образом, здесь, кроме описанных выше критических состояний мгновенного перехода к неустойчивости или к устойчивости, появляются обычные критические состояния, соответствующие отсутствию движения ( $\lambda = 0$ ).

Если на конце консоли имеется также масса  $m$ , то условие (4.1) получит вид:

$$Q = -EJy'''(l) = c \left[ y(l) - \int_{-\infty}^l R(t - \tau)y(l, \tau)d\tau \right] + mi\dot{y}$$

а условие (4.2) —

$$EJv'''(l) = cv(l)[1 - R^*(\lambda)] + m\lambda^2$$

Уравнение (4.3) при этом несколько усложнится и запишется в виде

$$c[1 - R^*(\lambda)] + m\lambda^2 = \xi$$

5. Возьмем теперь задачу об устойчивости стержня, на конце которого имеется безынерционное тело, создающее сопротивление вязкой среды и поступательному смещению  $y(l)$  и повороту  $y'(l)$ , пропорциональные соответствующим скоростям  $\dot{y}(l)$  и  $\dot{y}'(l)$ . При этом на верхнем конце стержня будут следующие граничные условия:

$$EJy''(l) + gy'(l) = 0; \quad EJy'''(l) - n\dot{y}(l) = 0 \quad (5.1)$$

где  $n$  и  $g$  — коэффициенты пропорциональности вязкого сопротивления, зависящие от формы и размеров безынерционного тела.

С учетом (2.3) получаем

$$EJv''(l) + g\lambda v'(l) = 0; \quad EJv'''(l) - n\lambda v(l) = 0$$

Отсюда следует:

$$EJ(-k^2 C_1 \sin v - k^2 C_2 \cos v) + g\lambda [k C_1 (\cos v - 1) + k C_2 \sin v] = 0$$

$$EJ(-k^3 C_1 \cos v + k^3 C_2 \sin v) - n\lambda [C_1 (\sin v - v) + C_2 (\cos v - 1)] = 0$$

Определитель этой системы уравнений, в которой неизвестными являются  $C_1$  и  $C_2$ , приравняем нулю.

$$\begin{vmatrix} E J k \sin \nu + g \lambda (1 - \cos \nu); & E J k \cos \nu + g \lambda \sin \nu \\ -E J k^3 \cos \nu + n \lambda (\nu - \sin \nu); & E J k^3 \sin \nu + n \lambda (1 - \cos \nu) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель, получаем уравнение

$$E^2 J^2 k^4 + E J k n \lambda (\sin \nu - \nu \cos \nu) + E J k^3 g \lambda \sin \nu + g n \lambda^2 (2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu) = 0 \quad (5.2)$$

или

$$\frac{1}{\lambda^2} + \left[ \frac{g k}{P} \sin \nu + \frac{n}{k P} (\sin \nu - \nu \cos \nu) \right] \frac{1}{\lambda} + \frac{g n}{P^2} (2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu) = 0$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2P} \left\{ g k \sin \nu + \frac{n}{k} (\sin \nu - \nu \cos \nu) \pm \sqrt{\left[ g k \sin \nu + \frac{n}{k} (\sin \nu - \nu \cos \nu) \right]^2 - 4 n g (2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu)} \right\} \quad (5.3)$$

Значение  $1/\lambda$  может быть действительным, положительным или отрицательным и комплексным с положительной или отрицательной действительной частью; в особых случаях оно может быть мнимым. При переходе к обратной величине  $\lambda$  знак действительной части комплексного числа сохраняется согласно формуле

$$\frac{1}{\alpha \pm \beta i} = \frac{\alpha \mp \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Отрицательная действительная часть соответствует зоне устойчивости, положительная — неустойчивости. Действительные корни соответствуют движению по экспоненциальному закону, комплексные — затухающим или нарастающим колебаниям. Переход действительных значений  $1/\lambda$  через нуль (то есть  $\lambda$  — через бесконечность) соответствует скачкообразным переходам от устойчивых к неустойчивым движениям, как было описано выше. Переход действительной части комплексного корня  $\lambda$  через нуль соответствует плавному переходу от затухающих колебаний к нарастающим или наоборот. При чисто мнимых корнях стержень совершает гармонические колебания.

При  $g=0$  уравнение (5.3) приводит к формуле (2.6), а при  $n=0$  — к формуле

$$\lambda = -\frac{P}{g k \sin \nu}$$

Последняя формула дает критические состояния стержня при  $\nu = \pi, 2\pi \dots$

Сопротивление среды можно заменить инерционным сопротивлением массы, помещенной на конце стержня; при этом следует вместо  $l m$  поставить  $-m \omega^2$  (где  $m$  — масса,  $\omega$  — частота колебаний), а вместо  $l g$  взять  $-I \omega^2$  (где  $I$  — момент инерции массы при ее повороте вокруг конца стержня). Тогда получаем



$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{2P} \left\{ Iks \sin \nu + \frac{m}{k} (\sin \nu - \nu \cos \nu) \pm \sqrt{\left[ Iks \sin \nu + \frac{m}{k} (\sin \nu - \nu \cos \nu) \right]^2 - 4m(2 - 2\cos \nu - \nu \sin \nu)} \right\}$$

Здесь положительная действительная часть  $\omega^2$  соответствует устойчивому колебательному движению, отрицательная действительная часть — неустойчивому колебательному или, при отсутствии мнимой части, апериодическому движению по экспоненциальному закону. Наконец, для упруго-наследственной среды величины  $n\lambda$  и  $g\lambda$  надо заменить на  $c_1[1 - R_1^*(\lambda)]$  и  $c_2[1 - R_2^*(\lambda)]$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — мгновенные упругие модули при поступательном смещении и повороте конца стержня, а  $R_1^*(\lambda)$  и  $R_2^*(\lambda)$  — соответствующие им изображения резольвент ядер ползучести.

б. Рассмотренные задачи можно обобщить на случаи иных дифференциальных уравнений изгиба стержня. Так, например, можно рассмотреть стержень на упругом основании с одним или двумя коэффициентами постели, нагруженный на свободном конце следящей сжимающей силой, учесть влияние сдвигов в тонкой стенке стержня двутаврового сечения, учесть силы инерции распределенной по длине стержня массы и т. д. Во всех этих случаях дифференциальное уравнение оси стержня имеет вид

$$y^{IV} + ay'' + by = 0 \quad (6.1)$$

а его общее решение —

$$y = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + C_3 Y_3(x) + C_4 Y_4(x)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  — произвольные постоянные.

Комбинируя частные решения  $Y_i(x)$ , можно общее решение уравнения (6.1) представить в виде

$$y = y_0 U_0(x) + y_0' U_1(x) + y_0'' U_2(x) + y_0''' U_3(x)$$

где  $y_0, y_0', y_0''$  и  $y_0'''$  — значения функции  $y$  и ее производных в начальной точке оси стержня, то есть при  $x=0$ .  $U_i(x)$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) — так называемые, функции Коши, обладающие тем свойством, что при  $x=0$  все их производные, кроме  $i$ -й, обращаются в нуль, а  $i$ -я производная равна единице (нулевой производной считается сама функция).

Для консольного стержня, жестко закрепленного в точке  $x=0$ ,  $y_0 = y_0' = 0$  и

$$y = y_0'' U_2(x) + y_0''' U_3(x)$$

Взяв условия на верхнем конце стержня в виде (2.4), получим

$$y_0'' U_2'(l) + y_0''' U_3'(l) = 0$$

$$EJ[y_0'' U_2'''(l) + y_0''' U_3'''(l)] - n\lambda[y_0'' U_2(l) + y_0''' U_3(l)] = 0$$

или

$$y_0'' U_2'' + y_0''' U_3'' = 0$$

$$y_0'' (EJU_2''' - n\lambda U_2) + y_0''' (EJU_3''' - n\lambda U_3) = 0 \quad (6.2)$$

(аргумент  $l$  в функциях  $U_i(l)$  для упрощения записей опускаем).

Приравняем нулю определитель системы уравнений (6.2)

$$EJ(U_2''U_3'''' - U_2''''U_3'') - \mu(U_2'U_3 - U_2U_3') = 0$$

и получим

$$\frac{EJ}{\mu} = \frac{U_2''U_3 - U_2U_3'}{U_2''''U_3'' - U_2''U_3''''} \quad (6.3)$$

Подобным же образом можно рассмотреть случай вязкого сопротивления повороту конца стержня. При этом получаем

$$v'''(l) = 0; EJv''(l) + g\lambda v'(l) = 0; y_0''U_2'''' + y_0''''U_3'''' = 0$$

$$EJ(y_0''U_2'' + y_0''''U_3'') + g\lambda(y_0''U_2' + y_0''''U_3') = 0$$

или

$$y_0''U_2'''' + y_0''''U_3'''' = 0$$

$$y_0''(EJU_2'' + g\lambda U_2') + y_0''''(EJU_3'' + g\lambda U_3') = 0$$

отсюда

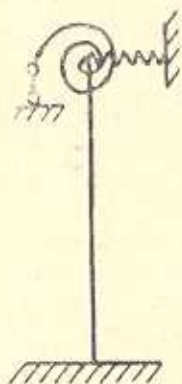
$$EJ(U_2''''U_3'' - U_2''U_3''''') + g\lambda(U_2''''U_3' - U_2''U_3''''') = 0$$

и

$$\frac{EJ}{g\lambda} = \frac{U_2''''U_3'' - U_2''U_3''''}{U_2''''U_3' - U_2''U_3''''} \quad (6.4)$$

В качестве функций  $U_i(x)$  можно брать не только функции Коши, но и любые решения уравнения (6.1), удовлетворяющие граничным условиям на нижнем конце стержня, причем место постоянных  $y_0''$  и  $y_0''''$  должны занять другие соответствующие произвольные постоянные.

Заменив в формулах (6.3) и (6.4) сопротивления среды  $\mu$  или  $g$  на массу  $m$  или момент инерции массы  $I$  по вышеприведенным правилам, получим решения для стержня, несущего на конце массу, а введя изображения ядер ползучести, придем к решению задачи устойчивости для стержня, имеющего на конце сопротивление в упруго-ползучей среде.



Фиг. 5

7. Сопротивления движению конца стержня в вязкой среде или силы инерции сосредоточенной массы можно заменить упругими связями, препятствующими горизонтальному смещению и повороту конца стержня (фиг. 5). При этом уравнение (5.3) получит вид

$$E^2J^2k^4 + EJK\beta(\sin v - v \cos v) + EJK^2\alpha \sin v + \alpha\beta(2 - 2\cos v - v \sin v) = 0 \quad (7.1)$$

где  $\alpha$  — коэффициент упругости защемления, а  $\beta$  — коэффициент упругости опирания конца стержня.

Введя безразмерные величины

$$\beta^* = \frac{\beta}{EJK^2} = \frac{\beta}{kP}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{EJK} = \frac{\alpha k}{P}$$

вместо (7.1) будем иметь

$$1 + \beta^*(\sin \nu - \nu \cos \nu) + \alpha^* \sin \nu + \alpha^* \beta^*(2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu) = 0$$

откуда

$$\beta^* = - \frac{1 + \alpha^* \sin \nu}{\sin \nu - \nu \cos \nu + \alpha^*(2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu)} \quad (7.2)$$

В случае  $\alpha = 0$ , то есть отсутствия упругого защемления верхнего конца

$$\beta^* = (\nu \cos \nu - \sin \nu)^{-1}$$

Здесь мы снова можем воспользоваться графиком фиг. 4. Статическая потеря устойчивости возникает при значении  $\nu$ , соответствующем точкам пересечения кривой  $\xi(\nu)$  с горизонталью  $\xi = -\beta^*$ . Первая такая точка находится в интервале  $4,4934 < \nu < 6,2832$  или, при  $\beta^* < 1/2\pi$ , в более отдаленных участках изменения  $\nu$ , соответствующих положительным значениям  $\xi$ . Однако, еще ранее при наличии хотя бы очень малой массы или вязкого сопротивления на конце стержня, а именно при  $\nu = 4,4934$ , произойдет динамическая потеря устойчивости стержня.

В случае  $\alpha = \infty$  верхний конец стержня не будет поворачиваться и следящая сила превратится в обычную силу постоянного направления.

При любом  $\alpha$  можно найти условие минимума  $\beta^*$  из выражения (7.2)

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial \nu} = 0; \quad [\sin \nu - \cos \nu + \alpha^*(2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu)] \alpha^* \cos \nu - \\ - (1 + \alpha^* \sin \nu) [\nu \sin \nu + \alpha^*(\sin \nu - \nu \cos \nu)] = 0$$

Это условие выполняется при  $\nu = 2j\pi$  ( $j = 1, 2, 3 \dots$ ) независимо от величины  $\alpha^*$ , и минимумы  $\beta^*$  при любых  $\alpha^*$  будут равны

$$\min \beta^* = \frac{1}{2j\pi}$$

Если  $\beta^* < \frac{1}{2j\pi}$ , то потеря статической устойчивости невозможна с числом полуволи, меньшим  $2j$ .

Во всех случаях статическая потеря устойчивости должна происходить в зонах динамической неустойчивости, то есть она практически невозможна.

ՀԵՏԵՎՈՂ ՈՒԺՈՎ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ԿՈՆՍՈՒԱՅԻՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԶՈՂ

Ա. Բ. ՌԺԱՆՅԻՆ

Ս. Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Հեռանդը ուժով բևեռավորված ձողի կայունությունը դիտարկվում է այն ենթադրությամբ, որ նրա ծայրում առկա է՝ 1) ճնշման մածուցիկ դիմադրություն, 2) կենտրոնացված զանգվածներ, 3) առաձգական-ժառանգական

գիմադրության, 4) առաձգական հենում, ինչպես նաև մածուցիկ և իներցիոն գիմադրության կոմբինացիա:

Գտնված են կայուն և անկայուն շարժումների գոտիները: Միջանկյալ, կրիտիկական վիճակներին համապատասխանում են մարման պարձակցի կամ տատանման սեփական հաճախականության անցմամբ անվերջությունով:

## CONSOLE ELASTIC BAR LOADED BY FOLLOWED FORCE

A. R. RZHANITSIN

### S u m m a r y

The problem of stability of the bar, loaded by followed force is solved with assumptions that on the free edge there are: 1) viscous damping, 1) lumped mass, 3) elasto-hereditary resistance, 4) elastic support and combination of the viscous and inertial resistances. Zones of stable and non-stable movements are found. Critical loads correspond to transfer infinity by the damping coefficient or natural frequency.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968.
2. Ржаницын А. Р. Устойчивость неконсервативных систем с двумя степенями свободы. В сб. «Механика твердого тела», Труды II-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. М.: Наука, 1966.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Изд. Мир, 1971.
5. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию  
6.1. 1984