ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 5, 1985 Механика

УДК 539.3

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ЖЕСТКОГО КОНУСА В ХРУПКИЙ МАТЕРИАЛ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

АЛОЯН М. А.

Рассматривается задача проникания тонкого жесткого конуса с большой скоростью в полупространство, заполненное хрупким материалом (например, горной породой).

При решении задачи предполагается, что скорость конуса существенно больше скоростей звука в среде и область возмущенного движения среды состоит из трех частей. В первой области материал не разрушен, во второй области из-за хрупких свойств материал разрушен и образованы многочисленные трещины, расположенные в меридиональных плоскостях, в третьей, примыкающей к конусу, области материал разрушен до мельчайших частиц. Поверхности раздела указанных областей—осесимметрические заостренные поверхности, вершины которых совпадают с вершиной жесткого конуса.

Для математического описания деформирования и движения материала в этих областях принимается модель, предложенная С. С. Григоряном в работах [3, 4, 6].

Сверхзвуковое установившееся движение конуса в упругой среде рассмотрено в [7, 8]. Задача о проникании тонкого тела вращения в упругую среду рассмотрена в работах [9, 10].

1. Пусть тонкий жесткий конус проникает в полупространство с постоянной скоростью v_k и пусть ось конуса перпендикулярна к поверхности полупространства. В этом случае задача имеет осевую симметрию и поэтому в возмущенной области уравнения движения и компоненты тензора малой деформации будут

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=\rho_0\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=\rho_0\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_\varphi=\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \gamma_{r\varphi}=\gamma_{\varphi z}=0,\quad \gamma_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{1.2}$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты точки, σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz}— компоненты тензора напряжений, u_r, $u_\varphi=0$, u_z—смещения точки в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно, ε_r, ε_φ, ..., γ_{rz} — компоненты тензора малой деформации; ρ_0—плотность невозмущенной среды, t—время. Начало цилиндрической системы координат выбирается в точке касания вершины конуса со свободной поверхностью полупространства в момент времени $t=0$.

Согласно предложенной в работе [6] модели деформирование материала в неразрушенном состоянии описывается уравнениями линейной теории упругости

$$\sigma_r=2\mu\varepsilon_r+\lambda\theta,\quad \sigma_z=2\mu\varepsilon_z+\lambda\theta,\quad \sigma_\varphi=2\mu\varepsilon_\varphi+\lambda\theta,\quad \tau_{rz}=\mu\gamma_{rz},\quad \theta=\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z \tag{1.3}$$

Здесь λ, μ—коэффициенты Ламе, θ—объемная деформация.

Подставляя (1.3) с учетом (1.2) в систему (1.1), получим уравнения движения среды в неразрушенной области в перемещениях

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+a_1\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+a_2\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+a_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+a_2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{a_1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{a_2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$a_1=\frac{\mu}{\lambda+2\mu},\quad a_2=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu},\quad c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}$$

В случае, когда тонкий конус проникает в полупространство с большой сверхзвуковой скоростью, движение в среде подобно случаю, описанному в [1, 2], в основном происходит в радиальном направлении и поэтому, следуя [5], будем предполагать, что компоненты вектора смещения и скорости во всех трех областях имеют порядки

$$u_r\sim u_0,\quad u_z\sim\varepsilon u_0,\quad v_r\sim v_0,\quad v_z\sim\varepsilon v_0 \tag{1.5}$$

а производные различных искомых функций оцениваются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial r}\sim\frac{1}{l},\quad \frac{\partial}{\partial z}\sim\frac{\varepsilon}{l},\quad \frac{\partial}{\partial t}\sim\frac{1}{t_0} \tag{1.6}$$

где u_0, v_0, l, t_0—характерные значения смещения, скорости, длины и времени соответственно, $\varepsilon=c_1/v_k$—малый параметр. Оператор полной производной $d/dt=\partial/\partial t+v_i\,\partial/\partial x_i$ с учетом (1.5) и (1.6) примет вид

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+O\left(\varepsilon^2\frac{v_0}{l}\right) \tag{1.7}$$

Соотношениями (1.5)—(1.7) будем оценивать порядки величин различных членов уравнений, описывающих движение среды в указанных выше трех областях.

Отбрасывая в (1.3) члены порядка ε^2 и выше, получим

$$\begin{gathered}\sigma_r=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\frac{u_r}{r},\qquad \sigma_\varphi=\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}+(2\mu+\lambda)\frac{u_r}{r}\\ \sigma_z=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right),\quad \tau_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right),\quad \theta=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Отбрасывая в уравнениях (1.4) члены порядка ε^2 и выше, получаем упрощенную систему уравнений движения среды в первой области

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+a_3\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{a_3}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

где

$$a_3=\frac{\lambda+\mu}{\mu},\quad c_2^2=\frac{\mu}{\rho_0} \tag{1.9}$$

Упрощенная система уравнений распалась на два уравнения. Первое уравнение системы (1.9) совпадает с точным уравнением плоской осесимметричной задачи. Решение этого уравнения $u_r(r, z, t)$ зависит от координаты z как от параметра. Точно также и в решение $u_z(r,z,t)$ второго уравнения системы (1.9) переменное z входит как параметр.

Системой определяющих параметров задачи являются λ, μ, ρ_0, α, v_k, r, z, t, где α—угол между образующей конуса с его осью. На основании П—теоремы [11]—решение первого уравнения системы (1.9) можно написать в виде

$$u_r=c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)f_1\left(\xi,\ \eta,\ \frac{\lambda}{c_1^2\rho_0},\ \frac{\mu}{c_1^2\rho_0},\ \alpha\right) \tag{1.10}$$

то есть перемещение u_r от переменных r, z и t зависят только через комбинации

$$\xi=\frac{r}{c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)},\quad \eta=\frac{z}{c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)}$$

поэтому решение задачи автомодельно.

Подставляя (1.10) в первое уравнение системы (1.9), получим

$$\xi^2(1-\xi^2)\frac{d^2f_1}{d\xi^2}+\xi\frac{df_1}{d\xi}-f_1=0 \tag{1.11}$$

Общее решение (1.11) есть $f_1(\xi)=[A_1+B_1(\varphi(\xi)-\psi(\xi))]\xi$ и согласно (1.10) решение первого уравнения системы (1.9) будет

$$u_r=c_1\left(t-\frac{z}{v_k}\right)[A_1+B_1(\varphi(\xi)-\psi(\xi))]\xi \tag{1.12}$$

где $\varphi(\xi)=\ln\frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$, $\psi(\xi)=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2}$, A_1 и B_1—произвольные постоянные.

Подставляя (1.12) во второе уравнение системы (1.9), получим уравнение для определения $u_z(r, z)$. Однако, как это видно из (1.8), для определения компонент тензора напряжений в первой области нет необходимости определять $u_z(r, z)$. Эта функция нужна только для определения τ_{rz}, порядок которого—$O\left(\varepsilon,\ \frac{\mu u_0}{l}\right)$.

Подставляя (1.12) в (1.8), получаем следующие формулы для определения нормальных напряжений в первой области

$$\sigma_r = 2(\lambda+\mu)A_1 + 2B_1[(\lambda+\mu)\varphi(\xi) + \mu\psi(\xi)]$$

$$\sigma_\varphi = 2(\lambda+\mu)A_1 + 2B_1[(\lambda+\mu)\varphi(\xi) - \mu\psi(\xi)], \quad \sigma_z = 2\lambda B_1\varphi(\xi) \tag{1.13}$$

2. Во второй области материал среды разрушен и образованы многочисленные трещины, расположенные в меридиональных плоскостях, поэтому в этой области везде $\sigma_\varphi = 0$. Будем считать, что в этой области допустимо описание движения уравнениями сплошной среды [6[. Поэтому уравнения движения опять будут (1.1), но с учетом условия $\sigma_\varphi = 0$. Компоненты тензора напряжений определятся из (1.3), а компоненты тензора деформаций — из (1.2), кроме деформации ε_φ. Из (1.3) с учетом условия $\sigma_\varphi = 0$ получим

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_r + \varepsilon_z)$$

и поэтому, отбрасывая члены порядка ε^2 и выше, получим

$$\theta = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{2.1}$$

Отбрасывая члены порядка ε^2 и выше, для компонент тензора напряжений во второй области получим

$$\sigma_r = 4\mu a_2 \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \sigma_z = 2\lambda a_1 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в первое из уравнений движения (1.1) при условии $\sigma_\varphi = 0$ и отбрасывая члены порядка ε^2 и выше, получаем следующее уравнение для определения u_r:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

где $c_3^2 = 4a_2\mu/\rho_0$.

Рассматривая автомодельное решение уравнения (2.3), представим его в виде

$$u_r = c_3\left(t - \frac{z}{v_k}\right) f_2\left(\xi, \eta, \frac{\lambda}{c_1^2\rho_0}, \frac{\mu}{c_1^2\rho_0}, \alpha\right) \tag{2.4}$$

где

$$\xi = \frac{r}{c_3\left(t - \frac{z}{v_k}\right)}, \quad \eta = \frac{z}{c_3\left(t - \frac{z}{v_k}\right)}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), имеем

$$\xi(1-\xi^2)\frac{d^2 f_2}{d\xi^2} + \frac{df_2}{d\xi} = 0$$

Подставляя общее решение этого уравнения в (2.4), получим

$$u_r = c_3\left(t - \frac{z}{v_k}\right)[A_2(\xi^2\psi(\xi) - \varphi(\xi)) + B_2] \tag{2.5}$$

где A_2 и B_2—произвольные постоянные.

Подставляя (2.5) в (2.2), получаем следующие формулы для определения нормальных напряжений во второй области

$$\sigma_r = 4\mu a_2 A_2 \xi\psi(\xi), \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_z = 2\mu a_1 A_2 \xi\psi(\xi) \tag{2.6}$$

3. Будем считать, что в третьей области материал полностью разрушен путем скола до мельчайших частиц и находится в состоянии пластического течения. Для такого состояния разрушенного материала можно применить модель мягкого грунта, предложенную в работах [3, 4]. В работе [4] дается следующая зависимость между компонентами девиатора тензора напряжений и девиатора тензора скоростей деформаций

$$G\left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij}\right) = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik}\Omega_{jk} - S_{jk}\Omega_{ik} + \Lambda S_{ij} \tag{3.1}$$

где

$$e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 2\Omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

G—модуль сдвига, Λ—положительный множитель, v_i—компоненты скорости точек среды, δ_{ij}—символ Кронекера.

Уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho\frac{dv_r}{dt}, \quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_r}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho\frac{dv_z}{dt} \tag{3.2}$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.3}$$

условие пластичности

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij} = F(p) \tag{3.4}$$

и соотношения (3.1) образуют полную замкнутую систему уравнений для решения задачи.

Функция $F(p)$—положительная неубывающая функция своего аргумента. Опытом установлено [12], что $F(p) = (kp + b)^2$, где k и b—постоянные.

Будем считать, что материал в третьей области разрушен и раздавлен до максимальной плотности, и, таким образом, он несжимаем. Тогда $\rho = a\rho_0$, где $a \simeq 1{,}3$—коэффициент максимального уплотнения [13].

Уравнение неразрывности с учетом несжимаемости материала принимает вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.5) и принимая во внимание условие на поверхности конуса $v_r = v_k \operatorname{tg}\alpha$, при $r = r_k$ получаем

$$v_r = v_k \operatorname{tg}\alpha \frac{r_k}{r} \tag{3.6}$$

где $r_k = (v_k t - z)\operatorname{tg}\alpha$ — радиус поперечного сечения конуса на глубине z.

Интегрируя (3.6) с учетом условия на конусе $u_r = r_k$ при $r = r_k$, получаем, следуя [9], выражение для радиального смещения

$$u_r = r - \sqrt{r^2 - r_k^2} \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.1) при помощи (1.5) и (1.6) с учетом осевой симметрии задачи получаем следующие оценки для напряжений [5]:

$$S_{rr} \sim S_{\varphi\varphi} \sim S_{zz} \sim p \sim \sigma_0, \quad S_{rz} \sim \varepsilon\sigma_0 \tag{3.8}$$

где σ_0 — характерное значение напряжения.

Оценив порядки членов системы уравнений задачи соотношениями (1.5), (1.6), (1.7), (3.8), отбросив члены порядка ε^2 и выше, учитывая (3.5), получаем следующую упрощенную систему уравнений:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = a\rho_0\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = a\rho_0\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{3.9}$$

$$2G\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{dS_{rr}}{dt} + \Lambda S_{rr}, \quad -2G\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{dS_{\varphi\varphi}}{dt} + \Lambda S_{\varphi\varphi}, \quad 0 = \frac{dS_{zz}}{dt} + \Lambda S_{zz} \tag{3.10}$$

$$G\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{d\tau_{rz}}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)S_{rr} + \Lambda\tau_{rz}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(S_{rr}^2 + S_{\varphi\varphi}^2 + S_{zz}^2\right) = (kp + b)^2 \tag{3.11}$$

Первые три уравнения системы (3.10) допускают решение $S_{rr} = -S_{\varphi\varphi}$, $S_{zz} = 0$. Отсюда получаем

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi), \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_\varphi), \quad S_{rr} = -S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \tag{3.12}$$

Из условия пластичности (3.11) получаем следующую зависимость между σ_r и σ_φ

$$\sigma_\varphi = b_1\sigma_r + b_0 \tag{3.13}$$

где $\quad b_1 = \dfrac{1-k}{1+k}, \qquad b_0 = \dfrac{2b}{1+k}.$

Подставляя σ_φ из (3.13), v_r из (3.6) в первое из уравнений движения (3.9) и рассматривая автомодельное решение, получаем следующее дифференциальное уравнение для определения σ_r:

$$\frac{d\sigma_r}{d\xi}+\frac{\alpha_1}{\xi}\sigma_r=\frac{\alpha_2}{\xi}-\frac{\alpha_3}{\xi^3} \qquad (3.14)$$

где $\xi=r/(v_k t-z)$, $\alpha_1=1-b_1$, $\alpha_2=b_0+a\rho_0 v_k^2\mathrm{tg}^2\alpha$, $\alpha_3=a\rho_0 v_k^2\mathrm{tg}^4\alpha$.

Проинтегрировав это уравнение, получаем

$$\sigma_r=\frac{C}{\xi\alpha_1}+\frac{\alpha_3}{2-\alpha_1}\frac{1}{\xi}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \qquad (3.15)$$

Определив из условия на конусе $\sigma_r=\sigma_{rk}$ при $r=r_k$ значение постоянной интегрирования C и подставив в (3.15), получим

$$\sigma_r=\left(\frac{\xi_k}{\xi}\right)^{\alpha_1}\sigma_{rk}+\frac{\alpha_3}{2-\alpha_1}\left[\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{\xi_k^2}\left(\frac{\xi_k}{\xi}\right)^{\alpha_1}\right]+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[1-\left(\frac{\xi_k}{\xi}\right)^{\alpha_1}\right] \qquad (3.16)$$

где σ_{rk}—неизвестное пока значение напряжения σ_r на конусе, а $\xi_k=r_k/(v_k t-z)=\mathrm{tg}\alpha$.

4. Область возмущенного движения среды от области невозмущенного состояния отделяется конической поверхностью, на которой везде $\xi=r/c_1(t-z/v_k)=1$, а $u_r=0$. Учитывая это условие, из (1.12) получаем $A_1=0$.

Первый фронт разрушения, то есть поверхность раздела первой, неразрушенной, и второй, разрушенной меридионально расположенными трещинами, областей, является конической поверхностью, радиус круглого сечения которой на глубине z обозначим через r_1. Тогда для точек этой поверхности со стороны первой области $\xi_1=r_1/c_1(t-z/v_k)$, а со стороны второй области $\xi_2'=r_1/c_3(t-z/v_k)$ и $c_3\xi_2'=c_1\xi_1$.

На первом фронте разрушения имеем условия

$$\sigma_{\varphi 1}=\sigma_* \qquad (4.1)$$

$$u_{r1}=u_{r2} \qquad (4.2)$$

$$\rho_1\dot{r}_1(v_{r1}-v_{r2})=\sigma_{r2}-\sigma_{r1} \qquad (4.3)$$

где σ_*—значение растягивающего напряжения, при котором происходит отрыв по главной площадке, $\dot{r}_1$—скорость распространения первого фронта разрушения. Индексами 1, 2 и 3 обозначены величины в первой, второй и в третьей областях соответственно.

Второй фронт разрушения, то есть поверхность раздела второй и третьей областей, также является конической поверхностью, радиус круглого сечения которой на глубине z обозначим через r_2. Тогда для точек второго фронта разрушения со стороны второй области $\xi_2=r_2/c_3(t-z/v_k)$, а со стороны третьей области $\xi_3'=r_2/(v_k t-z)$ и $v_k\xi_3'=c_3\xi_2$.

Разрушение в третьей области происходит путем скола, поэтому на втором фронте разрушения со стороны второй области достигается условие [6]

$$\sigma_r-\sigma_z=-2\tau_* \qquad (4.4)$$

где τ_*—критическое значение касательных напряжений.

На втором фронте разрушения имеем также следующие условия:

$$u_{r2} = u_{r3} \tag{4.5}$$

$$\rho_2 \dot{r}_2 (v_{r2} - v_{r3}) = \sigma_{r3} - \sigma_{r2} \tag{4.6}$$

где $\dot{r}_2$ — скорость распространения второго фронта разрушения, $\rho_2 = \rho_0/(1-\theta_2)$, θ_2—объемная деформация во второй области.

Из условия (4.1) находим значение постоянной B_1

$$B_1 = \frac{1}{a_3\varphi(\xi_1) - \psi(\xi_1)} \frac{\sigma_*}{2\mu}$$

Из условий (4.4) и (4.5) получаем значения постоянных

$$A_2 = -\frac{\tau_*}{\mu\xi_2\psi(\xi_2)}$$

$$B_2 = [\varphi(\xi_2) - \xi_2^2\psi(\xi_2)]A_2 + \xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - \left(\frac{v_k}{c_3}\xi_k\right)^2}$$

Неизвестные значения ξ_1 и ξ_2, которыми определяются границы указанных выше трех областей, определяются из условий (4.2) и (4.3), которые приводятся к следующей системе двух трансцендентных уравнений

$$\left[\sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right)^2} - \varphi\left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right)\right]A_2 + B_2 - \frac{c_1}{c_3}[\varphi(\xi_1) - \psi(\xi_1)]\,\xi_1 B_1 = 0$$

$$\left[\varphi\left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right) - \psi\left(\frac{c_1}{c_3}\xi_1\right)\right]\xi_1 A_2 - \xi_1 B_2 + 2\frac{c_1}{c_3}\left\{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 [a_3\varphi(\xi_1) + \psi(\xi_1)] - \xi_1^2\psi(\xi_1)\right\}B_1 = 0$$

Неизвестное значение σ_{rk} определяется из условия (4.6), которое приводится к следующему виду:

$$\sigma_{rk} = \rho_0 c_3^2 \left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1} \frac{\xi_2}{1 - 2a_1\xi_2\psi(\xi_2)A_2}\left(B_2 - A_2\varphi(\xi_2) - \frac{v_k^2\xi_k^2}{c_3^2\xi_2}\right) +$$

$$+ \mu a_2 A_2 \left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1} \xi_2\psi(\xi_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[1 - \left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1}\right] + \frac{\alpha_3}{2-\alpha_1}\left[\frac{1}{\xi_k^2} - \left(\frac{v_k}{c_3\xi_2}\right)^2\left(\frac{c_3\xi_2}{v_k\xi_k}\right)^{\alpha_1}\right]$$

Сила сопротивления полупространства, действующая на конус, равна работе сил σ_{rk} при проникании конуса в среду на единицу длины

$$R = \int_0^{v_k\xi_k t} \sigma_{rk}\, 2\pi r_k\, dr_k = \pi(v_k\xi_k t)^2 \sigma_{rk}$$

5. На основе полученных результатов рассмотрен численный пример. Рассматривается случай, когда тонкий конус ($\alpha = 5°40'$, $\operatorname{tg}\alpha = \xi_k = 0{,}1$) со сверхзвуковой скоростью $v_k = c_1/\varepsilon$ ($\varepsilon = 0{,}3$) проникает в полупространство, материал которого—гранит: коэффициент Пуассона $\sigma = 0{,}3$, модуль Юнга $E = 22200{,}0$ МПа, $\rho_0 = 2500$ кг/м³, $\sigma_* = 4{,}5$ МПа, $\tau_* = 75{,}0$ МПа. Результаты вычисления на ЭВМ следующие:

$\xi_1=0{,}431451$, $\xi_2=0{,}443213$, $B_1=-0{,}018997$, $A_2=-0{,}004343$, $B_2=-0{,}000176$, $c_1=3390{,}30$ м/с, $c_2=1812{,}20$ м/с, $c_3=3063{,}15$ м/с. Напряжения на первом фронте разрушения со стороны первой области имеют значения: $\sigma_r=-27{,}46$ МПа, $\sigma_z=-6{,}89$ МПа, $\sigma_\varphi=4{,}5$ МПа; со стороны второй области следующие: $\sigma_r=-205{,}8$МПа, $\sigma_z=-61{,}76$МПа, $\sigma_\varphi=0$. Напряжения на втором фронте разрушения со стороны второй области: $\sigma_r=-214{,}29$ МПа, $\sigma_z=-64{,}29$ МПа, $\sigma_\varphi=0$; со стороны третьей области следующие: $\sigma_r=-3084{,}11$МПа, $\sigma_z\cong-\sigma_\varphi=-1028{,}05$МПа. На поверхности конуса $\sigma_{rk}=-3813{,}26$ МПа, $\sigma_z\cong-\sigma_\varphi=-1271{,}09$ МПа.

В момент $t=10^{-5}$с после начала проникания глубина проникания составляет $v_k t=0{,}113$ м. На глубине $z=0{,}04$ м $r_k=\xi_k(v_k t-z)=0{,}0073$ м, $r_1=\xi_1 c_1(t-z/v_k)=0{,}00944$ м, $r_2=\xi_2 c_2(t-z/v_k)=0{,}00877$ м, радиус фронта возмущения $r_0=c_1(t-z/v_k)=0{,}02190$ м. Сила сопротивления полупространства $R=1529{,}0$ кН.

Таким образом, первая, вторая и третья области, которые при $z=\text{const}$ являются круговыми кольцами, на глубине $z=0{,}04$ м имеют ширину соответственно 0,01246 м, 0,00067 м и 0,00147 м. Отсюда видно, что объем первой области значительно больше объема второй и третьей областей вместе взятых. Сравнивая полученные значения напряжений, заключаем, что конические поверхности, разделяющие три области, являются поверхностями сильного разрыва.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность С. С. Григоряну за постановку задачи и помощь при ее решении.

ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ ԲԱՐԱԿ ԿՈՇՏ ԿՈՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՓԽՐՈՒՆ ՆՅՈՒԹԻ ՄԵՋ

Մ. Հ. ԱԼՈՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բարակ կոշտ կոնի թափանցումը կիսատարածության մեջ մեծ գերձայնային արագությամբ։ Կիսատարածության նյութը փխրուն է (օրինակ լեռնային ապար)։ Խնդիրը լուծելիս ենթադրվում է, որ կիսատարածության շարժման մեջ գտնվող մասը բաղկացած է երեք տիրույթներից։ Առաջին տիրույթում նյութը քայքայված չէ։ Երկրորդ տիրույթում առաջացել են միջօրեական հարթություններով զատված բազմաթիվ ճաքեր։ Երրորդ տիրույթում նյութը լրիվ քայքայված է և վերածված է ավազի։

Խնդրի լուծման համար օգտագործված է գրունտների և կարծր ապարների համար Ս. Ս. Գրիգորյանի առաջարկած մոդելը։

Բոլոր երեք տիրույթներում գտնված են խնդրի հավասարումների ավտոմոդել լուծումները։ Որոշված են լարումները և կիսատարածության դիմադրության ուժը։ Լուծված է թվային օրինակ։

THE PENETRATION OF A THIN RIGID CONE WITH SUPERSONIC SPEED INTO FRIABLE MATERIAL

M. H. ALOYAN

Summary

The penetration of a rigid thin cone with great supersonic speed into half-space is considered. The material of half-space is friable (such as rock type). In the problem, it is assumed that the moving part of the half-space consists of three regions. The material of the first region is not destroyed. In the second region numerous cracks are formed which are distributed on the meridional planes. In the third region the material is completely destroyed and is reduced into sand. For the solution of the problem the model of soil and bed-rock offered by S. S. Grigorian is used. In all three regions the automodel solutions of the equations of the problem are found. The strength and resistance force of half-space are determined. The numerical example is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes W. D.* On hypersonic similitude Quart,—Appl. Math., 1947, vol. 5. № 1, p. 34—39.
2. *Черный Г. Г.* Движения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
3. *Григорян С. С.* Об общих уравнениях динамики грунтов.—ДАН СССР, 1959, т. *124*, №2, с. 285—287.
4. *Григорян С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов.—ПММ, 1960, т. *24*, вып. 6, с. 1057—1072.
5. *Григорян С. С.* О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов.—ПММ, 1962, т. *26*, вып. 5, с. 944—946.
6. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород.—ПММ, 1967, т. *31*, вып. 4, с. 643—669.
7. *Кусукава К.* К теории ударных волн.—Сб. переводов, «Механика», 1952, вып. 4, с. 155—161.
8. *Апикян Ж. Г.* Движение жесткого конуса в упругой среде со сверхзвуковой скоростью.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. *23*, №1, с. 44—49.
9. *Багдоев А. Г.* Проникание тонкого тела вращения в упругую среду.—Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1977, т. *30*, №5, с. 17—37.
10. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №3, с. 75—84.
11. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Издательство Наука, 1972. 440 с.
12. *Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Кошелев Л. И., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В.* Измерение волн напряжений в мягких грунтах.—ПМТФ, 1963, № 2, с. 135—141.
13. *Талобр Ж.* Механика горных пород. М.: Госгортехиздат, 1960. 430 с.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
19.V. 1983