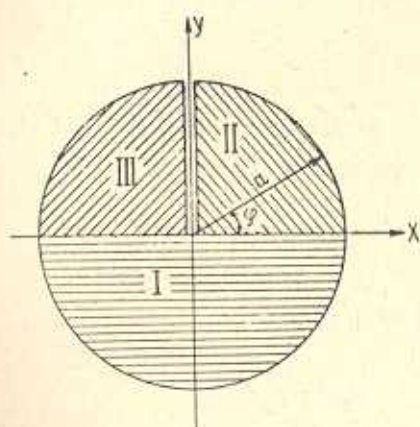


УДК 539.319

КРУЧЕНИЕ СОСТАВНОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

ԱՐՄՅՈՆՅԱՆ Լ. Ա., ԱՓԻԿՅԱՆ Զ. Դ.

Рассмотрим задачу о кручении призматического составного стержня с сечением в виде круга с радиальной трещиной между материалами (фиг. 1).



Փիգ. 1

В полярных координатах  $r, \varphi$  функции напряжений  $U_m(r, \varphi)$  ( $m=1, 2, 3$ ) удовлетворяют уравнению Пуассона [1]

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \varphi^2} = -2G_m \quad (m=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

при граничных и контактных условиях

$$U_m(a, \varphi) = 0, \quad m=1, 2, 3$$

$$U_m\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad m=2, 3$$

$$U_1(r, 0) = U_2(r, 0), \quad U_3(r, \pi) = U_1(r, -\pi)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_1} \frac{\partial U_1(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{1}{G_2} \frac{\partial U_2(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} \\ \frac{1}{G_3} \frac{\partial U_3(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi} &= \frac{1}{G_1} \frac{\partial U_1(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $G_m$  ( $m=1, 2, 3$ ) — модули сдвига материалов тел.

С целью сведения задачи к решению гармонического уравнения положим

$$\frac{U_m(r, \varphi)}{G_m} = \Phi_m(t, \varphi) - \frac{a^2 e^{2t}}{2} \quad (1.3)$$

где  $t = \ln r/a$  и функции  $\Phi_m(t, \varphi)$  ( $m=1, 2, 3$ ) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.4) ищем в виде ряда и интеграла Фурье

$$\Phi_1(t, \varphi) = \int_0^{\infty} [C_1(z) \operatorname{sh} z \varphi + D_1(z) \operatorname{ch} z \varphi] \sin z t dz + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} e^{kt} \sin k \varphi$$

$$(-\pi < \varphi < 0, \quad -\infty < t < 0)$$

$$\Phi_2(t, \varphi) = \int_0^{\infty} \left[ C_2(z) \operatorname{sh} z \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + D_2(z) \operatorname{ch} z \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \sin z t dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} e^{2kt} \sin 2k \varphi \quad \left( 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < t < 0 \right) \quad (1.5)$$

$$\Phi_3(t, \varphi) = \int_0^{\infty} \left[ C_3(z) \operatorname{sh} z \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) + D_3(z) \operatorname{ch} z \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \sin z t dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(3)} e^{2kt} \sin 2k \varphi \quad \left( \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad -\infty < t < 0 \right)$$

Удовлетворяя условиям (1.2), для определения постоянных  $A_k^{(m)}$ ,  $C_m$ ,  $D_m$  ( $m=1, 2, 3$ ) получаем следующие выражения:

$$A_k^{(m)} = (-1)^m (1 - (-1)^k) \frac{a^2}{k\pi} \quad (m=1, 2, 3)$$

$$D_m(z) = -\frac{a^2 z}{\pi(4+z^2)} \quad (m=2, 3)$$

$$D_1(z) = -\frac{a^2}{\pi} \left( \frac{z}{4+z^2} + 8\mu_2(\mu_3+1) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} \operatorname{sh} \frac{3\pi z}{4}}{z(4+z^2) \Delta \operatorname{ch} \frac{\pi z}{4}} \right) \quad (1.6)$$

$$C_1(z) = \frac{a^2}{\pi} \left( \frac{z}{4+z^2} \operatorname{th} \frac{\pi z}{4} - \frac{\operatorname{sh} \frac{3\pi z}{4}}{z \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{4}} + 8(\mu_3+1) \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{2} \operatorname{sh} \frac{3\pi z}{4}}{z(4+z^2) \Delta \operatorname{ch} \frac{\pi z}{4}} \right)$$

$$C_m(z) = \frac{a^2}{\pi} \left( \frac{z}{4+z^2} \operatorname{th} \frac{\pi z}{4} - 8(\mu_{\bar{n}-m} + 1) \frac{\operatorname{sh} \frac{3\pi z}{4}}{z(4+z^2) \Delta \operatorname{ch} \frac{\pi z}{4}} \right) \quad (m=2, 3)$$

где

$$\Delta = \Delta(z) = (1+\mu_2)(1+\mu_3) \operatorname{ch} \pi z + 1 - \mu_2 \mu_3; \quad \mu_2 = \frac{G_2}{G_1}; \quad \mu_3 = \frac{G_3}{G_1} \quad (1.7)$$

Подставляя значения (1.6) в (1.5), находим

$$\Phi_m(t, \varphi) = \frac{a^2}{2} + \frac{4a^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_m(z, \varphi) \sin zt dz}{z(4+z^2)\Delta(z)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}} =$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{2a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_m(z, \varphi) \exp(izt) dz}{z(4+z^2)\Delta(z)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}} \quad (m=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

где

$$\Delta_1(z, \varphi) = \Delta(z) \operatorname{ch} z \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + 2(\nu_3 + 1) \operatorname{sh} \frac{3\pi z}{4} \left( \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2} \operatorname{sh} z \varphi - \nu_2 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} \operatorname{ch} z \varphi \right)$$

$$\Delta_2(z, \varphi) = \Delta(z) \operatorname{ch} z \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) - 2(\nu_3 + 1) \operatorname{sh} \frac{3\pi z}{4} \operatorname{sh} z \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad (1.9)$$

$$\Delta_3(z, \varphi) = \Delta(z) \operatorname{ch} z \left( \varphi - \frac{3\pi}{4} \right) - 2(\nu_2 + 1) \operatorname{sh} \frac{3\pi z}{4} \operatorname{sh} z \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

Используя формулы для определения касательных напряжений [1]

$$\tau_{rz} = \frac{G\theta e^{-t}}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \tau_{z\varphi} = -\frac{G\theta e^{-t}}{a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - a^2 e^{2t} \right) \quad (1.10)$$

получаем

$$\tau_{rz}^{(m)}(t, \varphi) = \frac{2G_m \theta a}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta_m(z, \varphi)}{z(4+z^2)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}} \frac{\exp(t(iz-1))}{\Delta(z)} dz$$

$$\tau_{z\varphi}^{(m)}(t, \varphi) = -G_m \theta a \left[ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_m(z, \varphi) \exp(t(iz-1))}{(4+z^2)\Delta(z)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{4}} dz - e^t \right] \quad (1.11)$$

(m = 1, 2, 3)

Для исследования поведения касательных напряжений в центре круга применим теорему о вычетах и представим (1.11) в виде бесконечного ряда

$$\tau_{rz}^{(m)}(t, \varphi) = 4G_m \theta a \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta_m(z_1, \varphi)}{z_1(4+z_1^2)\operatorname{ch}\frac{\pi z_1}{4}} \frac{\exp(t(iz_1-1))}{\Delta'(z_1)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Выч} (f_1^{(m)}(t, \varphi, z), \tilde{z}_k) \right] \quad (1.12)$$

$$\tau_{z\varphi}^{(m)}(t, \varphi) = G_m \theta a e^t - 4iG_m \theta a \left[ \frac{\Delta_m(z_1, \varphi) \exp(t(iz_1-1))}{(4+z_1^2)\Delta'(z_1)\operatorname{ch}\frac{\pi z_1}{4}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Выч} (f_2^{(m)}(t, \varphi, z), \tilde{z}_k) \right]$$

здесь  $f_k^{(m)}(t, \varphi, z)$  ( $k=1, 2$ ) — подынтегральная функция в (1.11),  $\tilde{z}_k = z_k$  ( $k \geq 2$ );  $\tilde{z}_1 = -2i$ ;  $\tilde{z}_k = 2(2k-1)i$  ( $k \leq 0$ ), а  $z_k = \xi_k - i\eta_k$  — корни уравнения

$$\Delta(z) = 0 \quad (1.13)$$

которые расположены в порядке возрастания положительных значений  $\gamma_k$ . Легко доказать, что все корни уравнения (1.13) мнимые, то есть  $\xi_k = 0$ , причем

$$\gamma_k = \frac{1}{\pi} \arccos h + 2(k-1), \quad h = \frac{\mu_2 \mu_3 - 1}{(\mu_2 + 1)(\mu_3 + 1)} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

Очевидно, что среди чисел  $\gamma_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) первое положительное число  $-\gamma_1$ , причем  $\gamma_1 < 1$ .

Характер напряженного состояния в центре круга определяется величиной  $\gamma_1$ . В данной задаче в центре круга всегда имеется концентрация напряжений.

Представляет интерес изучение коэффициентов особенности для обоих касательных напряжений при различных направлениях приближения к центру круга и сравнение этих значений с порядком особенности напряжений.

В табл. 1 приведены значения порядка особенности напряжений. Как видно из таблицы, при увеличении  $\mu_2$  или  $\mu_3$  порядок увеличивается. Это значит, что при увеличении жесткости первого материала порядок особенности уменьшается.

Таблица 1

$\mu_2 \backslash \mu_3$	0,01	0,1	1	10	100
0,01	0,063	0,144	0,337	0,474	0,5
0,1	0,144	0,195	0,366	0,5	0,526
1	0,337	0,366	0,5	0,634	0,663
10	0,474	0,5	0,634	0,805	0,856
100	0,5	0,526	0,663	0,856	0,937

Определяя коэффициенты при особенности для напряжений  $\tau_{z\varphi}^{(m)}$  и  $\tau_{rz}^{(m)}$  ( $m=1, 2, 3$ ), получаем

$$K_m = -\frac{4iG_m}{G_1} \frac{\Delta_m(z_1, \varphi)}{(4+z_1^2)\Delta'(z_1)\text{ch} \frac{\pi z_1}{4}}, \quad R_m = \frac{4G_m}{G_1} \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta_m(z_1, \varphi)}{z_1(4+z_1^2)\Delta'(z_1)\text{ch} \frac{\pi z_1}{4}} \quad (1.15)$$

или более подробно

$$K_1 = \frac{8 \sin \frac{3\pi\gamma_1}{4} \left( \mu_2 \sin \frac{\pi\gamma_1}{2} \cos \gamma_1 \varphi - \cos \frac{\pi\gamma_1}{2} \sin \gamma_1 \varphi \right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_2+1) \cos \frac{\pi\gamma_1}{4} \sin \pi\gamma_1}$$

$$K_2 = \frac{8\mu_2 \sin \frac{3\pi\gamma_1}{4} \sin \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_2+1) \cos \frac{\pi\gamma_1}{4} \sin \pi\gamma_1}, \quad K_3 = \frac{8\mu_3 \sin \frac{3\pi\gamma_1}{4} \sin \gamma_1 \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_3+1) \cos \frac{\pi\gamma_1}{4} \sin \pi\gamma_1} \quad (1.16)$$

$$R_1 = \frac{8 \sin \frac{3\pi\gamma_1}{4} \left( \mu_2 \sin \frac{\pi\gamma_1}{2} \sin \gamma_1 \varphi + \cos \frac{\pi\gamma_1}{2} \cos \gamma_1 \varphi \right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_2+1) \cos \frac{\pi\gamma_1}{4} \sin \pi\gamma_1} \quad (1.17)$$

$$R_2 = \frac{8\mu_2 \sin \frac{3\pi\gamma_1}{4} \cos \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_2+1) \cos \frac{\pi\gamma_1}{4} \sin \pi\gamma_1}, \quad R_3 = \frac{8\mu_2 \sin \frac{3\pi\gamma_1}{4} \cos \gamma_1 \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)}{\pi(4-\gamma_1^2)(\mu_2+1) \cos \frac{\pi\gamma_1}{4} \sin \pi\gamma_1}$$

В табл. 2 и 3 приведены значения коэффициентов при особенностях для касательных напряжений. В табл. 2 первая строка относится к случаю  $\varphi = -\pi/2$ , вторая  $-\varphi = -\pi/4$ , третья  $-\varphi = 0$ . В табл. 3 первая строка относится к  $\varphi = 0$ , вторая  $-\varphi = \pi/4$ , третья  $-\varphi = \pi/2$ .

Таблица 2

		Значения $K_1$					Значения $R_1$				
$\mu_2$	$\mu_1$	0,01	0,1	1	10	100	0,01	0,1	1	10	100
0,01		0,442	0,449	0,412	0,353	0,340	-0,001	-0,083	-0,232	-0,319	-0,333
		0,328	0,404	0,473	0,451	0,441	0,296	0,215	0,004	-0,150	-0,178
		0,044	0,182	0,408	0,474	0,475	0,440	0,419	0,239	0,044	0,005
0,1		0,449	0,446	0,402	0,340	0,325	0,083	0,000	-0,180	-0,278	-0,293
		0,300	0,360	0,439	0,420	0,410	0,345	0,264	0,034	-0,127	-0,155
		0,020	0,134	0,369	0,437	0,438	0,457	0,425	0,239	0,044	0,005
1		0,412	0,402	0,340	0,261	0,242	0,232	0,180	0,000	-0,117	-0,136
		0,242	0,267	0,314	0,283	0,269	0,406	0,350	0,130	-0,038	-0,068
		0,008	0,067	0,240	0,282	0,278	0,473	0,435	0,240	0,044	0,005
10		0,353	0,340	0,261	0,144	0,107	0,319	0,278	0,117	0,000	-0,020
		0,196	0,207	0,217	0,143	0,109	0,433	0,387	0,186	0,022	-0,008
		0,005	0,044	0,155	0,108	0,109	0,475	0,437	0,240	0,043	0,005
100		0,340	0,325	0,242	0,107	0,047	0,333	0,293	0,136	0,020	0,000
		0,186	0,196	0,198	0,104	0,047	0,437	0,392	0,195	0,032	0,002
		0,005	0,040	0,140	0,100	0,045	0,475	0,437	0,240	0,043	0,005

Значения  $R_3$  и  $K_3$  получаются соответственно из  $R_2$  и  $K_2$  при замене  $\mu_2$  на  $\mu_3$  и, наоборот.

Можно доказать, что  $K_1, K_2, K_3, R_2, R_3$  не обращаются в нуль в соответствующих промежутках изменения  $\varphi$ , а  $R_1$  обращается в нуль только для одного значения  $\varphi$  из  $(-\pi, 0)$ . Обращение  $K_1, K_2, K_3, R_1, R_2, R_3$  в нуль эквивалентно следующим условиям:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 \varphi = \mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi\gamma_1}{2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\mu_2 \pi}{\gamma_1}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\mu_2 \pi}{\gamma_1}; \quad \operatorname{ctg} \gamma_1 \varphi = -\mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi\gamma_1}{2}; \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\gamma_1} - \frac{\mu_2 \pi}{\gamma_1}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\gamma_1} + \frac{\mu_2 \pi}{\gamma_1} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Легко видеть, что углы  $\frac{\pi}{2} - \frac{\mu_2 \pi}{\gamma_1}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\gamma_1} - \frac{\mu_2 \pi}{\gamma_1}$  не лежат в ин-

тервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , а углы  $\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{\tau_1}$ ,  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\tau_1} + \frac{n\pi}{\tau_1}$  — в интервале  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  ни при каком целом  $n$ .

Докажем, что первое из уравнений (1.18) не имеет корня в интервале  $(-\pi, 0)$ . В самом деле, общее решение указанного уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_k = \varphi_0 + \frac{k\pi}{\tau_1}, \quad (k=0; \pm 1; \pm 2; \dots)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{\tau_1} \operatorname{arctg} \left( \mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \tau_1}{2} \right)$$

Таблица 3

		Значения $K_2$					Значения $R_2$				
		$\mu_2$	0.01	0.1	1	10	100	0.01	0.1	1	10
0.01		0.044	0.182	0.408	0.474	0.475	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
		0.030	0.116	0.235	0.259	0.257	0.033	0.146	0.410	0.591	0.620
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.045	0.187	0.473	0.644	0.672
0.1		0.020	0.134	0.369	0.437	0.438	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
		0.013	0.083	0.210	0.236	0.235	0.016	0.113	0.386	0.570	0.602
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.020	0.141	0.440	0.617	0.646
1		0.008	0.067	0.240	0.282	0.278	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
		0.005	0.038	0.130	0.147	0.144	0.009	0.070	0.314	0.479	0.531
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.009	0.080	0.340	0.520	0.550
10		0.005	0.044	0.155	0.108	0.109	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
		0.003	0.024	0.081	0.070	0.055	0.007	0.058	0.274	0.453	0.484
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.062	0.286	0.456	0.486
100		0.005	0.040	0.140	0.100	0.045	0.005	0.042	0.239	0.437	0.475
		0.003	0.022	0.073	0.050	0.024	0.007	0.056	0.269	0.440	0.485
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.059	0.270	0.446	0.475

Так как  $0 < \tau_1 < 1$ , то  $\varphi_k > 0$  при  $k=0, 1, 2, \dots$ . С другой стороны, при  $k=-2, -3, -4, \dots$  имеем

$$\varphi_k \leq \varphi_{-1} = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\tau_1} < -\pi$$

Остается доказать, что  $\varphi_{-1}$  тоже не лежит в интервале  $(-\pi, 0)$ . Если  $\mu_2 \mu_3 < 1$ , то  $h < 0$  и  $-(\mu_2 + 1)h < 1$  или  $1 < \frac{1+h}{-\mu_2 h}$ , откуда

$$\sqrt{\frac{1-h}{1+h}} < \frac{\sqrt{1-h^2}}{-\mu_2 h}. \quad \text{Из последнего неравенства получаем}$$

$$\mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \tau_1}{2} < \operatorname{tg} (\arccos(-h))$$

или

$$\operatorname{arctg} \left( \mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \tau_1}{2} \right) < \arccos(-h)$$

откуда  $\tau_1 \varphi_0 < \pi - \pi \tau_1$ . Окончательно получаем

$$\varphi_{-1} = \varphi_0 - \frac{\pi}{\gamma_1} < -\pi$$

Наконец, докажем, что уравнение

$$\operatorname{ctg} \gamma_1 \varphi = -\mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma_1}{2}$$

имеет ровно один корень, лежащий в промежутке  $(-\pi, 0)$ . Все корни последнего уравнения даются формулой

$$\varphi = \psi_k = \frac{\pi}{\gamma_1} k + \psi_0 \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$$

где

$$\psi_0 = -\frac{1}{\gamma_1} \operatorname{arccctg} \left( \mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma_1}{2} \right)$$

Ясно, что  $\psi_k > 0$  при  $k = 1, 2, 3, \dots$  и  $\psi_k < -\pi$  при  $k = -1, -2, -3, \dots$ . Для проверки остался только корень  $\psi_0$ . Покажем, что

$$-\pi < \psi_0 < 0 \quad \text{или} \quad 0 < -\gamma_1 \psi_0 < \pi \gamma_1.$$

Неравенство  $0 < -\gamma_1 \psi_0$  очевидное. Докажем неравенство

$$-\gamma_1 \psi_0 < \pi \gamma_1 \quad (1.19)$$

При  $\frac{1}{2} \leq \gamma_1 < 1$  имеем

$$\pi \gamma_1 \geq \frac{\pi}{2} > -\gamma_1 \psi_0$$

то есть неравенство (1.19) выполняется. При  $0 < \gamma_1 < \frac{1}{2}$  имеем

$$h > 0, (\mu_2 + 1)h < \mu_2 \quad \text{или} \quad \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} < \mu_2 \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}$$

Из последнего неравенства найдем

$$\operatorname{ctg} \pi \gamma_1 < \mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma_1}{2}$$

откуда

$$\pi \gamma_1 > \operatorname{arccctg} \left( \mu_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma_1}{2} \right) \quad \text{или} \quad \pi \gamma_1 > -\gamma_1 \psi_0$$

Таблица 4

$\mu_2 \backslash \mu_1$	0.01	0.1	1	10	100
0.01	90°	77°45'	45°45'	10°	1°10'
0.1	102°15'	90°	52°	11°25'	1°20'
1	134°15'	128°	90°	24°	3°
10	170°	168°35'	156°	90°	17°10'
100	178°50'	178°40'	177°	162°50'	90°

Итак, в промежутке  $(-\pi, 0)$  существует единственный угол  $\varphi = \varphi_0$ , для которого  $R_1 = 0$ .

В табл. 4 приведены значения угла  $-\varphi_0$ .

В табл. 5 приведены значения касательных напряжений для различных упругих характеристик на некоторых радиальных линиях.

Таблица 5

$\mu_1=10; \mu_2=10$

$r/a \backslash \varphi$		$\tau_{rz} (r, \varphi)/(G_1 \theta a)$				$\tau_{z\varphi} (r, \varphi)/(G_1 \theta a)$			
		0,001	0,1	0,5	1	0,001	0,1	0,5	1
0		-0,0100	0,0037	0,1703	0	-0,0282	-0,0845	-0,0165	1,4543
-45		-0,0045	0,0077	0,0452	0	-0,0291	-0,0595	0,0108	1,0675
-90		0	0	0	0	-0,0294	-0,0516	0,0033	1,0266
-135		0,0045	-0,0077	-0,0452	0	-0,0291	-0,0595	0,0108	1,0675
-180		0,0100	-0,0037	-0,1703	0	-0,0282	-0,0845	-0,0165	1,4543

$\mu_1=10; \mu_2=1$

$r/a \backslash \varphi$		$\tau_{rz} (r, \varphi)/(G_1 \theta a)$				$\tau_{z\varphi} (r, \varphi)/(G_1 \theta a)$			
		0,001	0,1	0,5	1	0,001	0,1	0,5	1
0		-0,0039	0,0105	0,1730	0	-0,0178	-0,1080	-0,0647	1,3883
245		0,0024	0,0282	0,0570	0	-0,0178	-0,0830	-0,0443	0,9906
-90		0,0073	0,0370	0,0284	0	-0,0163	-0,0715	-0,0688	0,9192
-135		0,0117	0,0486	0,0283	0	-0,0136	-0,0668	-0,0934	0,8763
-180		0,0150	0,0676	0,0461	0	-0,0097	-0,0614	-0,1262	0,8200

$\mu_1=1; \mu_2=1$

$r/a \backslash \varphi$		$\tau_{rz} (r, \varphi)/(G_1 \theta a)$				$\tau_{z\varphi} (r, \varphi)/(G_1 \theta a)$			
		0,001	0,1	0,5	1	0,001	0,1	0,5	1
0		-0,0060	-0,0487	-0,0372	0	-0,0060	-0,0655	-0,1407	0,7926
-45		-0,0032	-0,0221	-0,0139	0	-0,0078	-0,0715	-0,1192	0,8385
-90		0	0	0	0	-0,0084	-0,0727	-0,1129	0,8488
-135		0,0032	0,0221	0,0139	0	-0,0078	-0,0715	-0,1192	0,8385
-180		0,0060	0,0478	0,0372	0	-0,0060	-0,0655	-0,1407	0,7996

ՀԱՌՍՎԱԶՅԻՆ ՀՍՔՈՎ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՉՈՂԻ ՈՒՐՄԱՆ ԿՆԻՐԸ

Լ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ժ. Գ. ԱԳԿՅԱՆ

### Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկված է շառավղային ճաբ ունեցող երեք նյութերից կազմված բաղադրյալ պրիզմատիկ կլոր ձողի ոլորման խնդիրը:

Խնդիրը լուծված է լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ: Անհայտ գործակիցների որոշման համար ստացված են վերջավոր արտահայտություններ: Ուսումնասիրված է լարումների եզակիության կարգը և գործակիցը և-



րեք նյութերի միացման կետի շրջակայքում: Հաշվված են լարումների արժեքները շառավղային դժերի վրա: Կատարված է թվային ուսումնասիրության անալիզ:

## THE TORSION OF A COMPOSED CIRCULAR ROD WITH A RADIAL CRACK

L. A. HARUTIUNIAN, J. G. APIKIAN

### S u m m a r y

The problem of the torsion of a composed prismatic circular rod, formed out three different materials with a radial crack between them is considered.

The problem is solved with the aid of stress function. In order to determine the unknown coefficients, finite expressions are obtained. The order and the coefficient on singularity of stresses in the neighbourhood of the point of joint of three materials are studied.

The values of stresses on the radial lines are calculated. The analysis of numerical investigation is carried out.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
18.V.1983