ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 539.376

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ

ГОРБАЧЕВ В. И., ПОБЕДРЯ Б. Е.

В настоящее время в теории разрушения композитов наиболее распространенным является феноменологический подход, основанный на критериях разрушения эквивалентной однородной анизотропной среды [1—5]. Материальные константы, входящие в каждый из критериев, определяются из серии довольно сложных экспериментов. При таком подходе трудно изучить влияние геометрических и механических свойств компонентов на характеристики прочности композита.

В данной работе предложен способ вывода критерия прочности композита в целом, основанный на идее осреднения, и учитывающий феноменологические критерии разрушения каждого компонента в отдельности. Для случая слоистого композита при хрупком разрушении слоев даны явные выражения пределов прочности в разных направлениях и выписан критерий разрушения при сложном напряженном состоянии.

1. Рассмотрим композиционный материал с периодической структурой, т. е. такой материал, в котором можно выделить типичный много раз повторяющийся элемент (ячейку периодичности). Для простоты выберем прямоугольную декартову систему координат. В зависимости от строения композита, имеющего периодическую структуру, его механические характеристики могут быть периодическими функциями одной, двух или трех координат x_i.

Будем считать, что выполняются обычные правила суммирования [6] и производная обозначается индексом после запятой.

Предположим, что композит является упругим. Тогда связь между напряжениями σ и деформациями ε описывается обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij}=J_{ijkl}(\vec{x})\sigma_{kl} \tag{1.1}$$

где тензоры модулей упругости $\underline{C}$ и податливости $\underline{J}$ являются взаимообратимыми

$$\underline{C}:\underline{J}=\underline{J}:\underline{C}=\underline{\Delta}$$

$$(C_{ijkl}J_{klmn}=J_{ijkl}C_{klmn}=\Delta_{ijmn}) \tag{1.2}$$

а $\underline{\Delta}$ — единичный тензор четвертого ранга

$$\Delta_{ijkl}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.3}$$

Как известно, квазистатическая задача теории упругости [7]

$$(C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l})_{,j}+X_i=0 \tag{1.4}$$

$$u_i|_{\Sigma_1}=u_i^0,\ C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}n_j|_{\Sigma_2}=S_i^0 \tag{1.5}$$

методом осреднения

$$u_i(\vec{x})=\sum_{q=0}\alpha^q\sum_{p=0}^{q}N_{ijk_1\ldots k_p}^{(p)}(\vec{\xi})w_{j,k_1\ldots k_p}^{(q-p)},\quad N_{ij}^{(0)}=\delta_{ij} \tag{1.6}$$

(где $\vec{\xi}=\vec{x}/\alpha$ — так называемые быстрые переменные [8], а α—малый геометрический параметр) сводится к двум рекуррентным последовательностям задач [9].

Первая из этих последовательностей заключается в решении задач теории упругости для однородной среды с приведенным тензором $\underline{h}$ (иначе тензором эффективных модулей упругости)

$$h_{ijkl}w_{k,lj}^{(p)}+X_i^{(p)}=0 \tag{1.7}$$

$$w_i^{(p)}|_{\Sigma_1}=u_i^{(p)},\quad h_{ijkl}w_{k,lj}^{(p)}n_j|_{\Sigma_2}=S_i^{(p)}\quad(p=0,1,2,\ldots) \tag{1.8}$$

а вторая последовательность в решении задач теории упругости для неоднородной среды на ячейке периодичности

$$(C_{ijml}N_{mnk_1\ldots k_{p+1},l}^{(p+1)})_{,j}+X_{ink_1\ldots k_{p+1}}^{(p+1)}=0 \tag{1.9}$$

$$\langle N_{mnk_1\ldots k_{p+1},l}^{(p+1)}\rangle=0,\quad\langle N_{mnk_1\ldots k_{p+1}}^{(p+1)}\rangle=0\quad(p=0,1,2,\ldots) \tag{1.10}$$

При этом входные данные в задаче (1.7), (1.8) и в задаче (1.9), (1.10) определяются из предыдущих приближений. В нулевом приближении (то есть при $p=0$) из (1.7), (1.8) получается задача по, так называемой, теории эффективного модуля для определения «осредненного» поля перемещений $\vec{v}=\vec{w}^{(0)}$

$$h_{ijkl}v_{k,lj}+X_i=0 \tag{1.11}$$

$$v_i|_{\Sigma_1}=u_i^0,\quad h_{ijkl}v_{k,l}n_j|_{\Sigma_2}=S_i^0 \tag{1.12}$$

После решения задачи (1.9), (1.10) при $p=0$

$$(C_{ijml}N_{mnk_1,l}^{(1)})_{,j}+C_{ijnk_1,j}=0 \tag{1.13}$$

$$\langle N_{mnk_1,l}\rangle=0,\quad\langle N_{mnk_1}\rangle=0 \tag{1.14}$$

определяется тензор $\underline{h}$ [9]

$$h_{ijkl}=\langle C_{ijkl}+C_{ijmn}N_{mkl,n}^{(1)}\rangle \tag{1.15}$$

и обратный к тензору $\underline{h}$ эффективный тензор податливостей $\underline{H}$ [9]. Можно решать задачу теории упругости при ее постановке в напряжениях [9]. Тогда в качестве решения задачи по теории эффективного модуля получаем тензор напряжений $\underline{\tau}$.

2. Введем тензор концентрации напряжений A и тензор концентрации деформаций B, такие что

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\vec{x})\tau_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = B_{ijkl}(\vec{x})e_{kl} \tag{2.1}$$

то есть эти тензоры показывают как напряжения (деформации) в компонентах композита связаны с напряжениями (деформациями), вычисленными по теории эффективного модуля.

Поскольку напряжения и деформации теории эффективного модуля связаны законом Гука

$$\tau_{ij} = h_{ijkl}e_{kl}, \quad e_{ij} = H_{ijkl}\tau_{kl} \tag{2.2}$$

а напряжения и деформации в компонентах также подчиняются закону Гука (1.1), то между тензорами концентрации можно установить связь вида

$$\begin{aligned} \underline{A}(\vec{x}) &= \underline{C}(\vec{x}) : \underline{B}(\vec{x}) : \underline{H} \\ \underline{B}(\vec{x}) &= \underline{J}(\vec{x}) : \underline{A}(\vec{x}) : \underline{h} \end{aligned} \tag{2.3}$$

или в координатной форме

$$A_{ijkl}(\vec{x}) = C_{ijpq}(\vec{x})B_{pqmn}(\vec{x})H_{mnkl}$$

$$B_{ijkl}(\vec{x}) = J_{ijpq}(\vec{x})A_{pqmn}(\vec{x})h_{mnkl} \tag{2.4}$$

Тензоры концентрации в отличие от тензоров эффективных модулей не симметричны по паре индексов. При однородной деформации $\underline{e}$ тензор $\underline{B}$ (а также и $\underline{A}$) будет просто периодической функцией координат $\vec{x}$ и представляется в виде

$$B_{ijkl}(\vec{x}) = \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N^{(1)}_{mkl,n}(\vec{x}) \tag{2.5}$$

а функции $N^{(1)}_{mkl}$ определяются из решения задачи (1.13), (1.14).

3. Перейдем к выводу критерия разрушения композита в целом, если известны критерии разрушения каждой фазы. Примем, что критерий разрушения компонентов композита представляется общей зависимостью вида [5]

$$P_{ij}(\vec{x})\sigma_{ij} + P_{ijkl}(\vec{x})\sigma_{ij}\sigma_{kl} + P_{ijklmn}(\vec{x})\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.1}$$

где $P_{i_1 \ldots i_{2q}}(\vec{x})$ — тензоры ранга $2q$, $q = 1, 2, \ldots$, называемые тензорами прочности по напряжениям.

Иногда критерий прочности удобнее записывать в деформациях

$$Q_{ij}(\vec{x})\varepsilon_{ij} + Q_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + Q_{ijklmn}(\vec{x})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.2}$$

где $Q_{i_1 \ldots i_{2q}}(\vec{x})$ — тензоры ранга $2q$, $q = 1, 2, \ldots$, называемые тензорами прочности по деформациям.

Если материал ведет себя упруго вплоть до разрушения (хрупкое разрушение) или рассматриваются упругопластические простые процессы, то критерии (3.1) и (3.2) эквивалентны между собой, Подставим в (3.1) напряжения σ_{ij}, выраженные с помощью тензора концентрации напряжений (2.1) через напряжения, вычисленные по теории эффективного модуля, и результат осредним. Тогда получим

$$P^*_{ij}\bar{\sigma}_{ij} + P^*_{ijkl}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{kl} + P^*_{ijklmn}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{kl}\bar{\sigma}_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.3}$$

где $P^*_{i_1\ldots i_{2q}}$ $(q=1, 2\ldots)$ называются эффективными тензорами прочности по напряжениям

$$P^*_{i_1\ldots i_{2q}} = \langle P_{l_1\ldots l_{2q}} A_{l_1 l_2 i_1 i_2} \ldots A_{l_{2q-1} l_{2q} i_{2q-1} i_{2q}} \rangle \quad (q=1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Аналогично для критерия (3.2) имеем

$$Q^*_{ij} e_{ij} + Q^*_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + Q^*_{ijklmn} e_{ij} e_{kl} e_{mn} + \ldots = 1 \tag{3.5}$$

где $Q^*_{i_1\ldots i_{2q}}$ $(q=1, 2\ldots)$ называются эффективными тензорами прочности по деформациям

$$Q^*_{i_1\ldots i_{2q}} = \langle Q_{l_1\ldots l_{2q}} B_{l_1 l_2 i_1 i_2} \ldots B_{l_{2q-1} l_{2q} i_{2q-1} i_{2q}} \rangle \quad (q=1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

Легко показать, что если эквивалентны критерии (3.1), (3.2), то критерии (3.3), (3.5) также эквивалентны.

4. Рассмотрим хрупкое разрушение слоистого композита с изотропными слоями (ось x_3 перпендикулярна слоям). В этом случае

$$C_{ijkl}(x_3) = \frac{E(x_3)}{1+\nu(x_3)}\left[\Delta_{ijkl} + \frac{\nu(x_3)}{1-2\nu(x_3)}\delta_{ij}\delta_{kl}\right] \tag{4.1}$$

где $E(x_3)$ и $\nu(x_3)$—модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Предположим, что поле макродеформаций (а значит и поле макронапряжений) однородно, а критерий разрушения материала слоев имеет вид

$$P_{ijkl}(x_3)\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1 \tag{4.2}$$

где

$$P_{ijkl}(x_3) = \frac{1}{2\tau_b^2(x_3)} I_{ijkl}, \quad I_{ijkl} = \Delta_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{4.3}$$

τ_b—предел прочности материала слоя при чистом сдвиге. Критерий (4.2) с тензором прочности по напряжениям (4.3) является критерием энергии формоизменения и указывает на то, что наступление разрушения не зависит от величины гидростатического давления.

Из задачи (1.13), (1.14) находим

$$N^{(1)}_{mkl,3} = C^{-1}_{m3n3}\left[\langle C^{-1}_{n3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\rangle - C_{n3kl}\right] \tag{4.4}$$

Отсюда и из (1.15) получим известные выражения для компонент тензора эффективных модулей упругости [9] слоистого композита

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl}\rangle - \langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3kl}\rangle + $$
$$+ \langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\rangle\langle C^{-1}_{n3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\rangle \tag{4.5}$$

Обращая (4.5), найдем тензор эффективных модулей податливости $\underline{H}$ для слоистого композита.

Компоненты тензора концентрации деформаций $\underline{B}$ следуют из формул (2.5) и (4.4)

$$B_{ijkl}=\Delta_{ijkl}+\Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}[<C^{-1}_{n3p3}>^{-1}<C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}>-C_{n3kl}] \qquad (4.6)$$

Отсюда видно ,что

$$B_{ijkl}=\Delta_{ijkl} \quad \text{при} \quad i,\ j=1,2 \qquad (4.7)$$

для остальных компонент после подстановки (4.1) в (4.6) имеем

$$B_{3333}=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}/<\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}>$$

$$B_{3311}=B_{3322}=-\frac{\nu}{1-\nu}+B_{3333}<\frac{\nu}{1-\nu}>,\ B_{1313}=B_{2323}=\frac{1+\nu}{2E}/<\frac{1+\nu}{E}> \qquad (4.8)$$

Используя зависимости (2.4) и (4.6), найдем выражения для компонент тензора концентрации напряжений в слоистом композите

$$A_{ijkl}=(C_{ijmn}-C_{ijp3}C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}+C_{ijp3}C^{-1}_{p3q3}<C^{-1}_{q3t3}>^{-1}<C^{-1}_{t3r3}C_{r3mn}>)H_{mnkl} \qquad (4.9)$$

Отсюда и из (4.5) следует, что

$$A_{i3kl}=A_{3ikl}=\Delta_{i3kl} \qquad (4.10)$$

Остальные компоненты тензора концентрации напряжений определяются по следующим формулам:

$$A_{1111}=A_{2222}=\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{<E/(1-\nu^2)>-\nu<E\nu/(1-\nu^2)>}{<E/(1-\nu)><E/(1+\nu)>}$$

$$A_{1122}=A_{2211}=\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{\nu<E/(1-\nu^2)>-<E\nu/(1-\nu^2)>}{<E/(1-\nu)><E/(1+\nu)>} \qquad (4.11)$$

$$A_{1133}=A_{2233}=\frac{\nu}{1-\nu}-\frac{E}{1-\nu}\,\frac{<\nu/(1-\nu)>}{<E/(1-\nu)>},\quad A_{1212}=\frac{1}{2}\,\frac{E/(1+\nu)}{<E/(1-\nu)>}$$

Между коэффициентами A_{ijkl} имеется зависимость

$$A_{1111}-A_{1122}=2A_{1212} \qquad (4.12)$$

Для определения коэффициентов эффективного тензора прочности по напряжениям в формуле (3.4) положим $q=2$, подставим в нее тензор прочности слоев (4.3) и вычисленные коэффициенты тензора $\underline{A}$ (4.10), (4.11). В результате получим следующие неравные нулю компоненты тензора прочности

$$P^*_{1111}=P^*_{2222}=\frac{1}{6}<\left(\frac{A_{1111}-A_{1122}}{\tau_b}\right)^2+\left(\frac{A_{1111}}{\tau_b}\right)^2+\left(\frac{A_{1122}}{\tau_b}\right)^2>$$

$$P^*_{1133}=P^*_{2233}=-\frac{1}{6}<\frac{(1-A_{1133})(A_{1111}+A_{1122})}{\tau_b^2}>$$

$$P^*_{1122}=-\frac{1}{6}<\left(\frac{A_{1111}-A_{1122}}{\tau_b}\right)^2-2\frac{A_{1111}A_{1122}}{\tau_b^2}>$$

$$P^*_{3333}=\frac{1}{3}<\left(\frac{1-A_{1133}}{\tau_b}\right)^2>,\quad P^*_{1313}=P^*_{2323}=\frac{1}{4}<1/\tau_b^2>$$

$$P^*_{1212}=<\left(\frac{A_{1212}}{\tau_b}\right)^2> \tag{4.13}$$

Между компонентами эффективного тензора прочности имеет место зависимость, аналогичная (4.12)

$$P^*_{1111}-P^*_{1122}=2P^*_{1212} \tag{4.14}$$

Следовательно, эффективный тензор прочности слоистого композита также, как эффективный тензор модулей упругости, обладает пятью независимыми коэффициентами, а плоскость, параллельная слоям, является плоскостью изотропии упругих и прочностных свойств.

Введем технические пределы прочности: σ_L и σ_P — пределы прочности при растяжении (сжатии) вдоль и поперек слоев, τ_L и τ_P — пределы прочности при чистом сдвиге вдоль и поперек слоев, σ_p — предел прочности при всестороннем гидростатическом давлении. Технические переменные связаны с компонентами тензора прочности по формулам

$$\sigma_P=1/\sqrt{P^*_{3333}},\quad \sigma_L=1/\sqrt{P^*_{1111}},\quad \tau_P=\frac{1}{2\sqrt{P^*_{1313}}},\quad \tau_L=\frac{1}{2\sqrt{P^*_{1212}}}$$

$$\sigma_p=1/\sqrt{P^*_{3333}+4P^*_{1111}+4P^*_{1133}-4P^*_{1212}}=$$

$$=\sqrt{3}/\sqrt{<\frac{1}{\tau_b^2}\left[\frac{E}{1-\nu}\,\frac{<(1-2\nu)/(1-\nu)>}{<E/(1-\nu)>}-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right]^2>} \tag{4.15}$$

С использованием технических пределов условие разрушения слоистого композита примет вид

$$\frac{\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2}{\sigma_L^2}+\frac{\sigma_{33}^2}{\sigma_P^2}+\frac{\sigma_{12}^2}{\tau_L^2}+\frac{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2}{\tau_P^2}+\left(\frac{2}{\sigma_L^2}-\frac{1}{\tau_L^2}\right)\sigma_{11}\sigma_{22}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_p^2}+\frac{1}{\tau_L^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sigma_P^2}-\frac{4}{\sigma_L^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22})\sigma_{33}=1 \tag{4.16}$$

Таким образом, разрушение слоистого композита может наступить и от всестороннего давления, несмотря на то, что материал каждого слоя в отдельности не разрушается при всестороннем давлении.

Аналогично можно получить критерий разрушения слоистого композита в деформациях. Для этого необходимо положить

$$Q_{ijkl}(x_3)=\frac{2}{\gamma_b^2(x_3)}I_{ijkl} \tag{4.17}$$

где $\gamma_b(x_3)$ — предел прочности материала по деформациям при чистом сдвиге, связанный с пределом прочности $\tau_b(x_3)=G(x_3)\cdot\gamma_b(x_3)$ ($G(x_3)$ — модуль сдвига), и воспользоваться формулой (3.6). В результате получим выражения для коэффициентов эффективного тензора прочности по деформациям

$$Q^*_{1111} = Q^*_{2222} = \frac{2}{3} \left< \frac{1}{\gamma_b^2} \left[1 + B^2_{3311} + (B_{3311} - 1)^2 \right] \right>$$

$$Q^*_{1133} = Q^*_{2233} = \frac{2}{3} \left< \frac{B_{3333}(2B_{3311} - 1)}{\gamma_b^2} \right>$$

$$Q^*_{1122} = \frac{2}{3} \left< \frac{1}{\gamma_b^2} \left[2B_{3311}(B_{3311} - 1) - 1 \right] \right>, \quad Q^*_{3333} = \frac{4}{3} \left< \left(\frac{B_{3333}}{\gamma_b} \right)^2 \right>$$

$$Q^*_{1313} = Q^*_{2323} = 4 \left< \left(\frac{B_{1313}}{\gamma_b} \right)^2 \right> \quad Q^*_{1212} = \left< 1/\gamma_b^2 \right> \tag{4.18}$$

Причем

$$Q^*_{1111} - Q^*_{1122} = 2Q^*_{1212} \tag{4.19}$$

Коэффициенты B_{ijkl} определяются по формулам (4.7) и (4.8). Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$Q^*_{ijkl} = P^*_{pqmn} h_{pqij} h_{mnkl} \tag{4.20}$$

Критерий разрушения в деформациях для слоистого композита примет вид

$$Q^*_{1111}(e^2_{11} + e^2_{22}) + Q^*_{3333} e^2_{33} + 4Q^*_{1212} e^2_{12} + 4Q^*_{1313}(e^2_{13} + e^2_{23}) +$$
$$+ 2(Q^*_{1111} - 2Q^*_{1212}) e_{11} e_{22} + 2Q^*_{1133}(e_{11} + e_{22}) e_{33} = 1 \tag{4.21}$$

Отметим, что приведенные выше рассуждения можно использовать и при определении начала пластических деформаций в композиционном материале, а критерии (4.16) и (4.21) можно рассматривать как критерии пластичности в слоистом композите. При этом во всех формулах последнего раздела необходимо τ_b и γ_b заменить на τ_s и γ_s — пределы текучести по напряжениям и деформациям при чистом сдвиге. Тогда σ_F, σ_L, σ_p, τ_F, τ_L, определяемые по формулм (4.15), являются техническими пределами текучести.

ԿՈՄՊՈԶԻՏՆԵՐԻ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ՈՐՈՇ ՉԱՓԱՆԻՇՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ի. ԳՈՐԲԱՉԵՎ, Բ. Ե. ՊՈԲԵԴՐՅԱ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկված է, միջինացման իդեայի վրա հիմնված և յուրաքանչյուր կոմպոզիտի առանձին-առանձին քայքայման ֆենոմենոլոգիական չափանիշի հաշվառմամբ, կոմպոզիցիոն նյութերի ամրության չափանիշների արտածման եղանակով: Շերտավոր կոմպոզիտների դեպքի համար, շերտերի փխրուն քայքայման դեպքում, տրվում են լարումների և դեֆորմացիաների ամրության տենզորների բացահայտ արտահայտություններ շերտերի երկրաչափական և մեխանիկական բնութագրիչների միջոցով: Գտնված են տարբեր ուղղություններով շերտավոր կոմպոզիտների ամրության սահմանի համար բանաձևեր և դուրս է բերված լարվածային վիճակի դեպքում ամրության չափանիշ:

ON SOME CRITERIA OF COMPOSITE FRACTURE

V. I. GORBACHEV, B. E. POBEDRYA

S u m m a r y

Method of criterion derivation of composite fracture has been suggested. This method is based on the idea of averaging. Formulas of strength tensors are derived for layer composite under brittle fracture of layers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. Л.: Машиностроение, 1980. 246 с.
2. *Гольденблат И. И., Копнов В. А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 190 с.
3. *Ву Э. М.* Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. В сб. «Композиционные материалы», т. 2. «Механика композиционных материалов». М.: Мир, 1978, с. 401—492.
4. *Ву Э. М.* Прочность и разрушение композитов. В сб. «Композиционные материалы», т. 5, «Разрушение и усталость». М.: Мир, 1978, с. 206—267.
5. *Малмейстер А. К.* Геометрия теорий прочности. «Механика полимеров», 1966, № 4, с. 519—527.
6. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд. МГУ, 1974. 206 с.
7. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд. МГУ, 1981, с. 343.
8. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами. ДАН СССР, 1975, 221, № 3, с. 516—519.
9. *Победря Б. Е., Горбачев В. И.* О статических задачах упругих композитов. Вестник МГУ,сер. матем. и мех., 1977, № 5, с. 101—110.

НПО ЦНИИТМАШ

Поступила в редакцию
11.II.1983