ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 3, 1985 Механика

УДК 539.3

О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО ТЕЛА

ГАСПАРЯН Г. О., ЛОМАКИН Е. В., МАЗИНГ Р. И.

В [1] предложена модель изотропного разномодульного тела, упругие характеристики которого непрерывно зависят от вида напряженного или деформированного состояния. В основу построения модели положено предположение о существовании потенциала деформаций или напряжений, зависящего соответственно от параметра вида напряженного состояния (равного отношению среднего напряжения к интенсивности напряжений) или деформированного состояния (равного отношению объемной деформации к интенсивности деформаций) и включающего в себя как частный случай потенциал для классического упругого тела. Данная модель в отличие от модели [7, 8] учитывает зависимость диаграмм деформирования материала от вида напряженного состояния и позволяет описать дилатансные явления.

На простых примерах [2—4] показано, что учет таких свойств материала может в определенных случаях привести к существенному перераспределению напряжений в теле. Решение более сложных задач в связи с нелинейностью определяющих соотношений наталкивается на значительные математические трудности и возможно только приближенными численными методами.

В данной работе детализируются некоторые свойства модели изотропного разномодульного тела [1] и исследуется сходимость метода последовательных приближений.

1. Рассмотрим потенциал напряжений для изотропного разномодульного тела [2], который с помощью элементарных преобразований можно привести к виду

$$U=\frac{K}{2}\left[\varepsilon^2-2\varphi(\gamma)\,\varepsilon\varepsilon_0+\beta\varepsilon_0^2\right] \tag{1.1}$$

где $\gamma=\varepsilon/\varepsilon_0$ — параметр вида деформированного состояния, $\varepsilon=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ — объемная деформация, $\varepsilon_0=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$ — интенсивность деформаций, $e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}$ — девиатор деформаций, $\beta=3G/K$, K и G — константы, $\varphi(\gamma)$ — безразмерная функция вида деформированного состояния, определяемая из экспериментов. При $\varphi(\gamma)\equiv 0$ потенциал (1.1) совпадает с потенциалом для классического упругого тела.

Преимущество записи потенциала (1.1) по сравнению с предложенным в [2] состоит в том, что член, учитывающий разномодульность материала, входит аддитивно, а это облегчает анализ сходимости приближеных методов решения краевых задач.

Зависимость напряжений от деформаций можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = K\left[1-\frac{1}{\gamma}\psi'(\gamma)\right]\varepsilon\delta_{ij}+\frac{2}{3}K\left[\beta-2\psi(\gamma)+\gamma\psi'(\gamma)\right]e_{ij} \tag{1.2}$$

где $\psi(\gamma)=\gamma\varphi(\gamma)$, штрихом обозначено дифференцирование по аргументу функции. При пропорциональном нагружении $\gamma=\mathrm{const}$ и зависимость напряжений от деформаций оказывается линейной.
Из (1.2) найдем

$$\sigma=K\left[1-\frac{1}{\gamma}\psi'(\gamma)\right]\varepsilon,\quad \sigma_0=K\left[\beta-2\psi(\gamma)+\gamma\psi'(\gamma)\right]\varepsilon_0 \tag{1.3}$$

где $\sigma=\frac{1}{3}\sigma_{ii}$ — среднее напряжение, $\sigma_0=\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$ — интенсивность напряжений, $S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}$ — девиатор напряжений.

Заметим, что введенный параметр вида деформированного состояния γ принимает значения на всей числовой оси. При этом выражения (1.2) и (1.3) в общем случае могут содержать особенности при $\gamma\to0$ и $\gamma\to\infty$. Для их раскрытия потребуем, чтобы конечным деформациям соответствовали конечные напряжения или, иными словами, исключим из рассмотрения класс отвердевающих материалов, которые, вообще говоря, могут быть описаны предложенным потенциалом напряжений (1.1).

Следует отметить, что конечность соотношений (1.3) не нарушится, если к функции вида деформированного состояния добавить произвольную константу или член вида $a\gamma^2$, где a — некоторая постоянная. Введение таких добавочных членов приведет лишь к изменению входящих в потенциал (1.1) коэффициентов при ε^2 и ε_0^2, оставляя без изменения вид потенциала и член, учитывающий разномодульность материала.

Исследуем поведение σ и σ_0 при деформированном состоянии чистого сдвига, когда $\varepsilon\to0$ и, следовательно, $\gamma\to0$. Конечность σ и σ_0 будет обеспечена, если

$$\psi'(\gamma)\to C_1 \quad \text{при} \quad \gamma\to0 \tag{1.4}$$

Здесь и далее C_i — некоторые константы, соответствующие предельным значениям указанных функций.

С учетом (1.4) и сделанного выше замечания можно без ограничения общности положить (0) = 0, и тогда из (1.3) найдем

$$\sigma=-KC_1\varepsilon_0,\quad \sigma_0=K\beta\varepsilon_0 \tag{1.5}$$

то есть в общем случае создание чисто сдвиговых деформаций в теле невозможно без наложения всестороннего растяжения (сжатия), величина которого определяется интенсивностью сдвиговых деформаций.

Отметим, что условие (1.4) заведомо будет выполняться для всякой функции $\psi(\gamma)$, аналитической в нуле.

Рассмотрим случай чисто объемной деформации, когда $\varepsilon_0 \to 0$ и значит $\gamma \to \infty$. Конечность σ и σ_0 будет обеспечена, если

$$\frac{\psi(\gamma)}{\gamma} \to C_2 \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует

$$\psi'(\gamma) \to C_2 \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty \tag{1.7}$$

При этом из (1.3) легко получить

$$\sigma = K\varepsilon, \quad \sigma_0 = -KC_2\varepsilon \tag{1.8}$$

то есть в общем случае для создания чисто объемной деформации на тело должно быть наложено не только гидростатическое давление, но и сдвиговые напряжения, интенсивность которых определяется величиной объемной деформации.

Условия (1.6), (1.7) требуют, чтобы на бесконечности функция вида деформированного состояния $\psi(\gamma)$ была близка к линейной.

Равенства (1.5) и (1.8) показывают, что модель разномодульного тела, свойства которого определяются заданием упругого потенциала в виде (1.1), позволяет описать дилатансные явления.

Простейшей функцией, удовлетворяющей условиям (1.4) и (1.6), будет линейная функция, которая с учетом сделанного ранее замечания может быть записана в виде

$$\psi(\gamma) = C_0\gamma \tag{1.9}$$

При этом соотношения (1.5) и (1.8) сохраняют свой вид с заменой констант C_1 и C_2 на C_0.

2. Одним из возможных методов решения краевых задач для физически нелинейных сред является метод последовательных приближений, вариант которого—метод упругих решений—впервые был предложен для деформационной теории пластичности А. А. Ильюшиным [5] и получил строгое обоснование в [6] и дальнейшее развитие в работах [7, 8]. Некоторые общие вопросы сходимости методов последовательных приближений для сред с нелинейными определяющими соотношениями рассмотрены в [9].

Сходимость метода последовательных приближений для модели [7], приводящей к нелинейной теории и являющейся формальным обобщением деформационной теории пластичности при активном нагружении, исследовалась в [8]. В основе модели лежит предположение о том, что интенсивность напряжений и среднее напряжение являются функциями двух аргументов: интенсивности деформаций и объемной деформации. Введение потенциала в виде (1.1) позволяет отказаться от ограничений $\sigma(0, \varepsilon_0) = 0$, $\sigma_0(\varepsilon, 0) = 0$, сделанных в [7], то есть описать материалы с более широкими свойствами и несколько упростить получающиеся при анализе сходимости оценки.

Заметим, что применение метода последовательных приближений требует выполнения теоремы о единственности решения, что в данном случае эквивалентно требованию выпуклости потенциала (1.1). Выпуклость потенциала, записанного в несколько иной форме [2], исследовалась в работе [10]. Выпуклость будет гарантирована, если в каждой точке будет выполнено

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} > 0$$

Из (1.1) после несложных выкладок, используя неравенство $(\delta\varepsilon_0)^2 \leqslant \frac{2}{3} \delta e_{ij} \delta e_{ij}$, получим квадратичную форму переменных $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon_0$

$$\frac{1}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} \geqslant (1-\psi'')(\delta\varepsilon)^2 - 2(\psi' - \gamma\psi'')\delta\varepsilon\delta\varepsilon_0 +$$

$$+ [\beta - (2\psi - 2\gamma\psi' + \gamma^2\psi'')](\delta\varepsilon_0)^2$$

Приведем ее к каноническому виду

$$\frac{1}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} > (1-\psi'') \left\{ \left(\delta\varepsilon - \frac{\psi' - \gamma\psi''}{1-\psi''} \delta\varepsilon_0 \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta - [2\psi - 2\gamma\psi' + (\beta + \gamma^2)\psi''] + (2\psi\psi'' - \psi'^2)}{(1-\psi'')^2} (\delta\varepsilon_0)^2 \right\} \tag{2.1}$$

Квадратичная форма в правой части неравенства (2.1) положительно определена, если

$$1-\psi'' > 0, \qquad \beta - [2\psi - 2\gamma\psi' + (\beta+\gamma^2)\psi''] + (2\psi\psi'' - \psi'^2) > 0 \tag{2.2}$$

Упростим второе неравенство (2.2). Раскрыв скобки и перегруппировав члены, получим

$$(\beta - 2\psi + \gamma^2)(1-\psi'') > (\psi' - \gamma)^2$$

откуда с учетом первого неравенства (2.2) следует

$$\beta - 2\psi + \gamma^2 > 0, \quad 1 - \frac{(\psi' - \gamma)^2}{\beta - 2\psi + \gamma^2} > \psi'' \tag{2.3}$$

Первое условие (2.3) означает, что функция $\psi(\gamma)$ ограничена сверху параболой.

Таким образом, при выполнении условий (2.2) или, что равносильно, (2.3) будет гарантирована единственность решения краевой задачи.

В случае представления (1.9) эти требования сведутся к очевидному условию

$$\beta - C_0^2 > 0 \tag{2.4}$$

3. Исследуем сходимость метода последовательных приближений для краевых задач, основанных на использовании законов (1.2) и укажем условия, позволяющие находить обобщенные решения этих задач.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad x \in \Omega \tag{3.1}$$

$$u_i = 0 \quad x \in \Sigma_1, \quad \sigma_{ij} n_j = T_i \quad x \in \Sigma_2 \tag{3.2}$$

Здесь Ω — объем, занятый телом и ограниченный поверхностью $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Напряжения и деформации связаны соотношением (1.2). Входящая в (1.2) функция $\psi(\gamma)$ удовлетворяет условиям (1.4), (1.6) и (2.2) или (2.3).

Подставляя (1.2) в уравнения равновесия (3.1) и граничные условия (3.2), получим систему квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно перемещений u_i при соответствующих граничных условиях, решение которой будем искать методом последовательных приближений, определив рекуррентные соотношения следующим образом:

$$\left(K - \frac{2}{3} G\right) \varepsilon^{(n+1)}_{,i} + 2G \varepsilon^{(n+1)}_{ij,j} = -F_i + K(\psi'^{(n)} \varepsilon_0^{(n)})_{,i} +$$

$$+ \frac{2}{3} K \left[(2\psi^{(n)} - \gamma^{(n)} \psi'^{(n)}) e^{(n)}_{ij} \right]_{,j} \tag{3.3}$$

$$u_i^{(n+1)} = 0 \quad x \in \Sigma_1, \quad \left(K - \frac{2}{3} G\right) \varepsilon^{(n+1)} n_i + 2G \varepsilon^{(n+1)}_{ij} n_j =$$

$$= T_i + K(\psi'^{(n)} \varepsilon_0^{(n)} n_i) + \frac{2}{3} K \left[(2\psi^{(n)} - \gamma^{(n)} \psi'^{(n)}) e^{(n)}_{ij} n_j \right] \quad x \in \Sigma_2 \tag{3.4}$$

Решение поставленной задачи получается как предел последовательности $u_i^{(n)}$ при $n \to \infty$.

Общая схема доказательства сходимости метода последовательных приближений аналогична используемой в работах [6, 8]. Рассмотрим линейное множество M вектор-функций $\mathbf{u}$ (u_1, u_2, u_3), дважды непрерывно дифференцируемых в области Ω и удовлетворяющих первому условию (3.2). Следует отметить, что если граничные условия заданы в напряжениях, то рассматриваемые вектор-функции $\mathbf{u}$ должны удовлетворять условиям отсутствия перемещений тела как жесткого целого. Очевидно, что классическое решение $\mathbf{u}$ краевой задачи (3.1), (3.2) принадлежит этому множеству.

Рассмотрим произвольные элементы $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3) \in M$, $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3) \in M$ и определим скалярное произведение следующим образом:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = \int_\Omega [K \varepsilon(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{v}) + 2G e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v})] d\Omega \tag{3.5}$$

Пополняя множество M предельными элементами так, чтобы существовало скалярное произведение (3.5), получим полное гильбертово пространство H функций с суммируемыми квадратами производных. Норма элемента в H определяется по формуле

$$\|\mathbf{u}\|_0 = \sqrt{\int_\Omega (K \varepsilon^2 + 3G \varepsilon_0^2) d\Omega} \tag{3.6}$$

Обобщенным решением краевой задачи назовем вектор-функцию $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3) \in H$, удовлетворяющую равенству

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})d\Omega - \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega - \int_{\Sigma_2} T_i v_i d\sum = 0 \tag{3.7}$$

для произвольной вектор-функции $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3) \in H$. Заметим, что если некоторая функция является обобщенным решением поставленной задачи, то при этом выполняются все условия равновесия тела, если их сформулировать с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа, и обобщенное решение будет классическим, если оно дважды непрерывно дифференцируемо в Ω. Первый интеграл в (3.7) существует в силу свойств пространства H, а для существования второго и третьего интегралов, как показано в [6], следует потребовать, чтобы

$$F_i \in L_p(\Omega) \quad p > \frac{6}{5}, \quad T_i \in L_q(\Sigma_2) \quad q > \frac{4}{3}$$

где $L_r(G)$ — нормированное пространство функций, суммируемых в степени r по области G.

Рассматривая (3.3) как вектор-уравнение, умножим его на вектор-функцию $\mathbf{v} \in H$ и проинтегрируем по области Ω с учетом граничных условий (3.4). В результате получим

$$(\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v})_2 = A(\mathbf{v}) + K\int_{\Omega}\Big\{ \varepsilon_0^{(n)}(\mathbf{u})\varphi'^{(n)}(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{v}) +$$

$$+ \frac{2}{3}[2\varphi^{(n)}(\mathbf{u}) - \gamma^{(n)}(\mathbf{u})\varphi'^{(n)}(\mathbf{u})]e_{ij}^{(n)}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{v})\Big\} d\Omega \tag{3.8}$$

где $A(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Sigma_2} T_i v_i d\sum$

Записав аналогичное уравнение для n-го приближения через $(n-1)$-е, вычитая его из (3.8) и полагая $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}$, найдем

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_2^2 = K\int_{\Omega}\Big\{ (\varepsilon_0^{(n)}\varphi'^{(n)} - \varepsilon_0^{(n-1)}\varphi'^{(n-1)})(\varepsilon^{(n+1)} - \varepsilon^{(n)}) +$$

$$+ \frac{2}{3}[(2\varphi^{(n)} - \gamma^{(n)}\varphi'^{(n)})e_{ij}^{(n)} - (2\varphi^{(n-1)} - \gamma^{(n-1)}\varphi'^{(n-1)})e_{ij}^{(n-1)}](e_{ij}^{(n+1)} - e_{ij}^{(n)})\Big\} d\Omega$$

Оценим сверху полученную норму разности двух последующих приближений.

После несложных преобразований, учитывая неравенство $\varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}) \geqslant |\varepsilon_0^{(n)} - \varepsilon_0^{(n-1)}|$ и используя теорему о среднем значении, получим

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}\|_2^2 \leqslant K\int_{\Omega}\{|\varphi''(\gamma_1)|\,|\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(n-1)}| + |\varphi'(\gamma_2) - \gamma_2\varphi''(\gamma_2)|\,\varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)})\} \times$$

$$\times(\varepsilon^{(n+1)}-\varepsilon^{(n)})d\Omega+K\int\limits_{\Omega}\{|\psi'(\gamma_3)-\gamma_3\psi''(\gamma_3)|\,|\varepsilon^{(n)}-\varepsilon^{(n-1)}|+$$

$$+|\,|2\varphi^{(n-1)}-\gamma^{(n-1)}\varphi'^{(n-1)}|+|\gamma_4(\psi'(\gamma_4)-\gamma_4\psi''(\gamma_4))|\,|\varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n)}-\mathbf{u}^{(n-1)})\}\times$$

$$\times\varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)})d\Omega$$

где $\gamma_1=\dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0^{(n)}},\quad \varepsilon^*\in[\varepsilon^{(n-1)},\ \varepsilon^{(n)}];\quad \gamma_3=\dfrac{\varepsilon^{**}}{\varepsilon_0^{(n)}},\quad \varepsilon^{**}\in[\varepsilon^{(n-1)},\ \varepsilon^{(n)}]$

$$\gamma_2=\frac{\varepsilon^{(n-1)}}{\varepsilon_0^{*}},\quad \varepsilon_0^{*}\in[\varepsilon_0^{(n-1)},\ \varepsilon_0^{(n)}];\quad \gamma_4=\frac{\varepsilon^{(n-1)}}{\varepsilon_0^{**}},\quad \varepsilon_0^{**}\in[\varepsilon_0^{(n-1)},\ \varepsilon_0^{(n)}]$$

Воспользовавшись дважды неравенством Буняковского, получим

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)}\|_2^2\leqslant\int\limits_{\Omega}\Big[\sqrt{K(\varepsilon^{(n)}-\varepsilon^{(n-1)})^2+3G\varepsilon_0^2(\mathbf{u}^{(n)}-\mathbf{u}^{(n-1)})}\times$$

$$\times\sqrt{KA_1^2+\frac{K^2}{3G}B_1^2}\,|\varepsilon^{(n+1)}-\varepsilon^{(n)}|+\sqrt{K(\varepsilon^{(n)}-\varepsilon^{(n-1)})^2+3G\varepsilon_0^2(\mathbf{u}^{(n)}-\mathbf{u}^{(n-1)})}\times$$

$$\times\sqrt{KA_2^2+\frac{K^2}{3G}B_2^2}\cdot\varepsilon_0(\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)})\Big]d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}\sqrt{K(\varepsilon^{(n+1)}-\varepsilon^{(n)})^2+3G\varepsilon_0^2(\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)})}\sqrt{K(\varepsilon^{(n)}-\varepsilon^{(n-1)})^2+3G\varepsilon_0^2(\mathbf{u}^{(n)}-\mathbf{u}^{(n-1)})}\times$$

$$\times\sqrt{A_1^2+\frac{K}{3G}(A_2^2+B_1^2)+\left(\frac{K}{3G}\right)^2B_2^2}\,d\Omega$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1=|\psi''(\gamma_1)|,\quad B_1=|\psi'(\gamma_2)-\gamma_2\psi''(\gamma_2)| \tag{3.9}$$

$$A_2=|\psi'(\gamma_3)-\gamma_3\psi''(\gamma_3)|,\quad B_2=|2\varphi^{(n-1)}-\gamma^{(n-1)}\varphi'^{(n-1)}|+|\gamma_4[\psi'(\gamma_4)-\gamma_4\psi''(\gamma_4)]|$$

Учитывая (3.6) и применяя интегральное неравенство Буняковского, последнее неравенство приведем к виду

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)}\|_2^2\leqslant\mu_n\|\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)}\|_2\,\|\mathbf{u}^{(n)}-\mathbf{u}^{(n-1)}\|_2 \tag{3.10}$$

где

$$\mu_n=\max_{\Omega}\sqrt{A_1^2+\frac{K}{3G}(B_1^2+A_2^2)+\left(\frac{K}{3G}\right)^2B_2^2} \tag{3.11}$$

Из (3.10) при $\|\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)}\|_2\neq0$ получим

$$\|\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)}\|_2\leqslant\mu_n\|\mathbf{u}^{(n)}-\mathbf{u}^{(n-1)}\|_2 \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует [11], что последовательные приближения сходятся к обобщенному решению, если

$$0<\mu_n\leqslant\lambda<1 \tag{3.13}$$

Условие (3.13) с учетом (3.11) и (3.9) означает, что должны быть выполнены следующие неравенства:

$$|\varphi''(\gamma)|\leqslant a,\quad \sqrt{\frac{K}{3G}}\,|\varphi'(\gamma)-\gamma\varphi''(\gamma)|\leqslant b$$

$$\frac{K}{3G}\{|2\varphi(\gamma)-\gamma\varphi'(\gamma)|+|\gamma[\varphi'(\gamma)-\gamma\varphi''(\gamma)]|\}\leqslant c,\quad \sqrt{a^2+2b^2+c^2}\leqslant\lambda<1 \qquad (3.14)$$

В случае представления (1.9), когда потенциал (1.1) принимает вид

$$U=\frac{K}{2}\left(\varepsilon^2-2C_0\varepsilon\varepsilon_0+\beta\varepsilon_0^2\right)$$

условия (3.14) существенно упрощаются

$$\max_{\gamma}\sqrt{\frac{2K}{3G}C_0^2\left(1+\frac{2K}{3G}\gamma^2\right)}\leqslant\lambda<1$$

При этом C_0 должно удовлетворять (2.4).

Первые два неравенства из (3.14) накладывают существенные ограничения на вид функции $\varphi(\gamma)$, не противоречащие сделанным выше предположениям о поведении функции и ее производных при $\gamma\to 0$ и $\gamma\to\infty$ и требованиям выпуклости потенциала. Третье неравенство (3.14) при $\gamma\to\infty$, то есть при чисто объемном деформировании в общем случае может не выполняться, и, следовательно, сходимость метода в этом случае может не иметь места.

В этом заключается характерное свойство рассматриваемой модели разномодульного тела. Условия сходимости накладывают ограничения не только на вид функции деформированного состояния, описывающей разномодульность материала, но и на вид деформированного состояния.

Эти заключения сделаны для произвольного трехмерного деформированного состояния. В случае плоского деформированного состояния, когда параметр γ ограничен ($|\gamma|\leqslant 3$), область сходимости метода последовательных приближений будет значительно шире.

ԻԶՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Գ. Օ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ե. Վ. ԼՈՄԱԿԻՆ, Ռ. Ի. ՄԱՑԻՆԳ

Ամփոփում

Ներկա հոդվածում դիտարկվում են լարվածային վիճակից դեֆորմացիոն բնութագրիչների անընդհատ կախվածությամբ իզոտրոպ տարամոդուլ մարմինների մոդելի համար որոշ կապակցությունների մի քանի հատկություններ: Հետազոտված է տարամոդուլ մարմինների համար հաջորդական մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտությունը: