ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 539.3 : 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ С КВАДРАТИЧНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

ТОПЧЯН Д. Х.

Нелинейные волны в упругих средах с квадратичной нелинейностью рассмотрены в [1], [2], [3]. Для нестационарных волн квадратичная нелинейность является определяющей. Вместе с тем для волн с медленно меняющимися амплитудой и фазой в диспергирующих средах, типичным примером которых можно считать волны в пластинах при наличии изгибных возмущений, существенное влияние на различные вопросы, связанные с распространением, дифракцией и устойчивостью волн, оказывает кубическая нелинейность [4], [5]. Приведенное в [6] значение кубического коэффициента для металлов настолько велико, что кубическая нелинейность по порядку оказывается большей, чем квадратичная нелинейность [1]. Во всех случаях желательно при рассмотрении вопросов устойчивости распространения [7] квазимонохроматических волн в пластинах наряду с кубической [8] учитывать и квадратичную нелинейность. Настоящая статья содержит рассмотрение вопросов устойчивости одномерных изгибных волн в пластинах с учетом квадратичной и кубической, а также геометрической нелинейности. Рассматривается высокочастотное приближение, хотя и предположено, что толщина пластины меньше длины волны, что позволяет применить длинноволновое приближение, с точки зрения теории пластин, или $kh \ll 1$, где k—волновое число, h—толщина пластин. Показана неустойчивость в адиабатическом приближении изгибных нелинейных волн в пластинах.

Рассматриваются волны в геометрически и физически нелинейных упругих пластинах с преобладанием изгибных деформаций.

Используем теорию Кирхгофа, согласно которой вертикальное перемещение пластины u_z зависит только от x, y, t. Здесь x, y, z—лагранжевы координаты, причем z перпендикулярен к пластине.

Для простоты рассмотрим одномерные волны по x и t, хотя полученное дисперсионное соотношение верно и для двумерных волн. Деформация по оси x

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \qquad (1)$$

кроме того, имеет место

$$\varepsilon_x + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)\varepsilon_x}{1-\nu} \tag{2}$$

где ν—коэффициент Пуассона, u—продольное перемещение в срединной плоскости.

Внутренняя энергия по пятиконстантной нелинейной теории упругости [3] имеет вид

$$U = \bar{\mu}\varepsilon_x^2 + \varkappa\varepsilon_x^3, \qquad \bar{\mu} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \tag{3}$$

$$\varkappa = \frac{A}{3}\left\{1 - \frac{\nu^3}{(1-\nu)^3}\right\} + B\left\{1 + \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2}\right\}\frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{C}{3}\,\frac{(1-2\nu)^3}{(1-\nu)^3}$$

где A, B, C — коэффициенты, характеризующие нелинейность. Заметим, что модули Лямэ λ и μ выражаются через ν и модуль юнга E

$$\lambda = E\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4}$$

Ищем перемещения в виде [8]

$$u_z = a\sin\tau, \quad u = u_0 + b\sin 2\tau, \quad \tau = kx - \omega t \tag{5}$$

Подставляя (1) в (3) и интегрируя по z в пределах от $-h/2$ до $h/2$, получим внутреннюю энергию

$$\overline{U} = \bar{\mu}\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 + \bar{\mu}h\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^4\right\} + \frac{\varkappa h^3}{4}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^2 \tag{6}$$

Введем осредненный лагранжиан

$$\overline{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L\,d\tau \tag{7}$$

где $L = \overline{U} - \overline{T}$—осредненный по z лагранжиан, а кинетическая энергия

$$\overline{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 dz = \frac{\rho h}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 \tag{8}$$

Здесь отброшено малое инерционное слагаемое $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$.

Подставляя (5) в (6), (7), (8) и осредняя по τ, получим

$$\overline{L} = \frac{\bar{\mu}h^3}{24}a^2k^4 + \bar{\mu}h\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + 2b^2k^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial u_0}{\partial x}a^2k^2 + \right.$$

$$+\frac{1}{2}ba^2k^3+\frac{3}{32}a^4k^4\Big]+\frac{\varkappa h^3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_0}{\partial x}a^2k^4-\frac{1}{2}ba^2k^5+\frac{1}{16}a^4k^6\right)-\frac{1}{4}\rho h\omega^2a^2 \tag{9}$$

Варьируя $\overline{L}$ по u_0, получим

$$2\overline{\mu}h\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\overline{\mu}hk^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}a^2+\frac{\varkappa h^3k^4}{8}\frac{\partial}{\partial x}a^2=0 \tag{10}$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{k^2}{4}a^2-\frac{\varkappa h^2k^4a^2}{16\overline{\mu}} \tag{11}$$

Варьируя $\overline{L}$ по b, найдем

$$b=-\frac{a^2}{8}k+\frac{1}{32}\frac{\varkappa h^2k^3a^2}{\overline{\mu}} \tag{12}$$

Варьируя $\overline{L}$ по a, получим

$$\frac{\overline{\mu}h^3}{24}k^4+\frac{1}{2}\overline{\mu}hk^2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\overline{\mu}h}{2}bk^3+\frac{3}{16}a^2k^4\overline{\mu}h+$$

$$+\frac{\varkappa h^3}{8}\frac{\partial u_0}{\partial x}k^4-\frac{1}{8}\varkappa h^3k^5b+\frac{1}{32}\varkappa h^3a^2k^6-\frac{\rho h}{4}\omega^2=0 \tag{13}$$

Подставляя сюла $\dfrac{\partial u_0}{\partial x}$ и b, получим

$$\frac{\rho h}{4}\omega^2=\frac{\overline{\mu}h^3}{24}k^4-\frac{3}{256}\frac{\varkappa^2h^5k^8a^2}{\overline{\mu}} \tag{14}$$

Обозначим через ω_0 линейную частоту

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\overline{\mu}h^2}{6\rho}}k^2 \tag{15}$$

Учитывая малость a, можно найти

$$\omega=\omega_0-\frac{3}{128}\frac{\varkappa^2h^4k^8a^2}{\overline{\mu}\rho\omega_0} \tag{16}$$

Отсюда можно получить, записывая нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega=\omega_0+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0a^2 \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=-\frac{3}{128}\frac{\varkappa^2h^4k^8}{\overline{\mu}\rho\omega_0} \tag{18}$$

Таким образом, для квадратичной нелинейной среды получается, что имеет место распространение волн, имеющих медленно меняющиеся амплитуду и фазу. Причем можно провести сравнение со случаем нелинейно-кубической среды [8], в которой показано, что имеет место неустойчивость волновых пакетов, даваемых (4).

Условие устойчивости для уравнений медленных модуляций имеет вид [8]:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \tag{19}$$

Преобразуя $\varkappa$, можно получить

$$\varkappa = \frac{(1-2\nu)\{A(1-\nu+\nu^2)+3B(1-2\nu+2\nu^2)+C(1-2\nu)^2\}}{3(1-\nu)^3} \tag{20}$$

Для несжимаемого материала $\nu=\dfrac{1}{2}$; $\varkappa=0$; $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=0$, то есть нарушается условие медленно меняющихся параметров волн и требуется учесть слагаемые четвертой степени по ε_x в U.

Для $\nu=\dfrac{1}{3}$, взяв металлическую пластину, данные для которой даны в [3] стр. 305, получается $\varkappa \sim -5\cdot 10^{12}\dfrac{\text{г}}{\text{см сек}^2}$ и условие неустойчивости выполняется.

Таким образом, так же, как и для кубической нелинейности имеет место неустойчивость для волн огибающих, описываемых уравнениями модуляций.

Отметим, что для указанных $\varkappa$ в (18) для $kh \ll 1$ первое слагаемое в скобке является главным по порядку, причем при отбрасывании геометрической нелинейности это слагаемое уменьшается вдвое и меняется знак. Таким образом, для квадратичной нелинейности, в отличие от кубической [8], учет геометрической нелинейности при всех значениях амплитуд необходим.

В работе [6] дано значение упругого модуля третьего порядка в виде $\mu\gamma_2$, где для металлов $\gamma_2 \approx -10^6$. Для упругой области ε_x имеет порядок 10^{-3} и кубическая нелинейность становится сравнимой с линейным слагаемым, что вряд ли допустимо. Для $\varepsilon_x \sim 10^{-4}$ кубическое слагаемое по порядку превосходит рассматриваемую квадратичную нелинейность. Таким образом, или указанное в [6] значение γ_2 для металлов завышенное, или следует наряду с квадратичной нелинейностью в рассматриваемых задачах теории модуляции учитывать кубическую нелинейность.

Для простоты, как и в работе [8], здесь ограничимся учетом кубических слагаемых в приближении [6]. Возьмем вместо (3) внутреннюю энергию в виде

$$U = \bar{\mu}\varepsilon_x^2 + \varkappa\varepsilon_x^3 + \frac{3}{8}\mu\gamma_2\psi_0^4 \tag{21}$$

где ψ_0 — интенсивность деформации, и для рассматриваемой одномерной задачи

$$\psi_0^2 = \frac{8}{9}\,\frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}\,\varepsilon_x^2 \tag{22}$$

В (6) за счет кубического слагаемого добавляется

$$\frac{1}{270}\,\mu\gamma_2\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2 h^5}{(1-\nu)^4}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)^4 \tag{23}$$

В (9) прибавится

$$\frac{1}{720}\,\mu\gamma_2\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}\,a^4k^8h^5$$

В уравнении (13) добавится

$$\frac{1}{360}\,\mu\gamma_2\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4}\,h^5a^2k^8$$

и то же самое добавится в правую часть (14). При этом вместо (18) получится

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = -\frac{3}{128}\,\frac{\varkappa^2h^4k^8}{\bar{\mu}\rho\omega_0} + \frac{1}{180}\,\frac{\mu\gamma_2k^8h^4}{\rho\omega_0}\,\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} \tag{24}$$

Для общности рассмотрения также следует учитывать инерционные слагаемые в $\overline{T}$ от продольных скоростей

$$\frac{\rho h}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - 2b\omega\cos 2\tau\right)^2$$

При этом в (9) добавится слагаемое

$$-\frac{\rho h}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + 2b^2\omega^2\right\}$$

Проводя варьирование по u_0, где учтено, что [5] $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \approx$ $\approx (\omega_0'(k))^2\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$, и по b, получим (11) и (12), где в правых частях добавятся

$$\frac{h^2k^2}{3}\,\frac{\partial u_0}{\partial x} \approx -\frac{k^4h^2a^2}{12} - \frac{\varkappa h^4k^6a^2}{48\bar{\mu}} \quad \text{и} \quad -\frac{k^3h^2a^2}{96} + \frac{\varkappa h^4k^5a^2}{384\bar{\mu}}$$

Тогда в (24) добавится $-\frac{3}{32}\,\frac{\mu k^6h^2}{\rho(1-\nu)\omega_0} - \frac{7}{192}\,\frac{\varkappa h^4k^8}{\rho\omega_0}$. С точностью до множителя $\frac{h^2k^6}{\rho\omega_0}$ первое слагаемое в правой части (24) для металлов имеет порядок $5\cdot10^{12}$, второе слагаемое—порядок

$$\frac{1}{180}\mu\gamma_2 k^2 h^2 \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^4} \approx \frac{1}{20}\cdot 10^{12}\gamma_2(kh)^2$$

Для реальных волн $kh \gg 0{,}1$ и, взяв γ_2 по [6], получим для второго слагаемого порядок $10^{12}\cdot\frac{1}{2}10^3$, который для выбранных длин волн больше порядка первого слагаемого и тем более превосходит последнее добавленное слагаемое. Таким образом, при значении γ_2, взятом из [6], кубическая нелинейность определяет величину коэффициента $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$. Однако, следует пересмотреть значение γ_2, тем более, что для полимеров и композитов γ_2 может быть небольшим. Следует отметить, что все указанные слагаемые в (24) для металлов отрицательные. Таким образом, имеет место в адиабатическом приближении неустойчивость модуляционных волн. В более точном приближении с учетом в лагранжиане производных от амплитуд, можно получить [8], что волны устойчивы для амплитуд

$$a^2 < -\frac{\omega_0''(k)k_1^2}{4\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0}$$

где $\omega_0'' = 2\sqrt{\frac{\mu h^2}{6\rho}}$, а k_1 есть волновое число для возмущенных волновых пакетов, которое по смыслу волн огибающих [8] значительно меньше k. Поскольку $-\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$ велико, амплитуды, которые соответствуют устойчивым волнам, малы. Таким образом, одновременный учет как кубической, так и квадратичной нелинейности приводит к сужению области устойчивости волн.

Автор благодарит А. Г. Багдоева и Л. А. Мовсисяна за ценные советы.

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ԵՎ ԽՈՐԱՆԱՐԴԱՅԻՆ ՈՉԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՄԲ ՍԱԼԵՐՈՒՄ ԿՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ԾՌՄԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Գ. Ե. ԹՈՓՉՅԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է քառակուսային, խորանարդային, ինչպես նաև, երկրաչափական ոչգծայնությամբ սալերում ծռող միաչափ ալիքների կայունության հարցերը։

Դիտարկվում է բարձր հաճախականության մոտավորումները, չնայած

ընդունվում է, որ սալի հաստությունը փոքր է ալիքի երկարությունից, որը ըստ սալերի տեսության, կամ որ $kh \ll 1$, որտեղ՝ k-ն ալիքային թիվն է, h-ը սալի հաստությունը, թույլ է տալիս կիրառել երկարալիք մոտավորում։ Ցույց է տրված սալերում ծռող ոչգծային ալիքների անկայունությունը ադիաբատ մոտավորումում։

THE INVESTIGATION OF STABILITY OF QUASIMONOCHROMATIC BENDING WAVES IN PLATES WITH QUADRATIC AND GUBIC NONLINEARITIES

D. KH. TOPCHIAN

S u m m a r y

This paper considers the problem of stability of one-dimensional bending waves in plates taking into account quadratic and cubic nonlinearity. High frequency approximation is considered although it is supposed that the thickness of the plate is less than the wavelength, which allows to apply high wave approximation in view of the theory of plates or for $kh \ll 1$, where k is the wave number and h the plate thickness. The unstability in adiabatic approximation of bent nonlinear waves in plates is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1972. 174 с.
2. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т. **21**, № 3, с. 19—24.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
5. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
7. *Лайтхилл М. Дж.* Некоторые частные случаи применения теории Уизема. В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М.: Мир, 1970, с. 43—76.
8. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Квазимонохроматические волны изгиба в нелинейно-упругих пластинах.—Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 4, с. 169—176.

Ленинаканский педагогический институт

Поступила в редакцию 17.VI.1983