

УДК 624.159.1

ОДНОМЕРНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ СДВИГА В ГРУНТЕ
С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ДИЛАТАНСИЕЙ

МАРТИРОСЯН Р. П.

Для практики динамики грунтов и инженерной сейсмологии интересно изучить процесс распространения волны сдвига в мягких грунтах. Необходимость развития исследований в этом направлении подтверждается тем, что при сильных землетрясениях в эллицентраль-ной зоне амплитуды сейсмических смещений почвы бывают в 3—5 раз больше в поперечной волне, чем продольной, вследствие чего на поверхности земли и в основании сооружения образуются значительные пластические деформации.

Основные экспериментально установленные факты [4] и др., выявившие характер влияния динамической нагрузки на механические свойства грунтов (в основном, песчаных) сводятся к тому, что динамическое воздействие вызывает изменение деформационных и прочностных свойств грунта (падение прочности до 25—70%). Это явление объясняется разрушением его структурных связей и перераспределением плотности грунта по глубине.

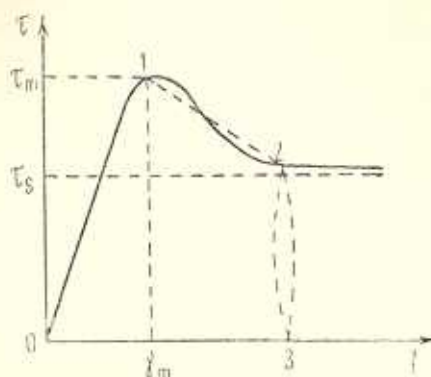
Между тем, в грунтах с зернисто-дисперсной структурой деформации сдвига вызывают объемные изменения (эффект дилатансии). Дилатансия проявляется как при упругом, так и при пластическом деформировании грунта, причем во всех случаях она может быть положительной и отрицательной. Чистое формоизменение без объемных деформаций может происходить только при так называемой критической плотности грунта.

При плотности, меньшей критической, сдвиг сопровождается разрушением структуры, приводящим грунт к уплотнению (отрицательная дилатансия). При плотности, большей критической, сдвиг сопровождается разрыхлением грунта (положительная дилатансия).

Такое специфическое для грунтов свойство дилатансии характеризуется тем, что механическая энергия волн сдвига поглощается трением на контактах частиц и изменением объема грунтовой среды в процессе сдвига.

Явление дилатансии подтверждено большим количеством опытных данных. Экспериментальный график сопротивления сдвигу плотного песчаного грунта, полученный Д. Тейлором, М. Н. Гольдштейном и др., показан на фиг. 1. На участке 0-1 грунт работает упруго и объемные изменения не происходят. Постепенное уменьшение прочности грунта

после пиковой точки 1 происходит за счет постепенного уменьшения плотности. В области дилатансии (после точки 1, фиг. 1.) разгрузка происходит жестко, то есть после разгрузки сдвиговая деформация полностью остается.



Фиг. 1. Диаграмма сопротивления сдвигу плотного песчаного грунта

Рассматривается разупрочнение (положительная дилатансия) плотного грунта при распространении одномерной плоской волны сдвига типа SH, фронт которой поляризован в горизонтальной плоскости. Координата z направлена вертикально вверх.

Приведенное в статье построение и решение задачи основываются на известной дилатансионной модели [7].

Если касательные напряжения $\tau < \tau_m$ (фиг. 1.), то в грунте распространяются упругие волны. При этом можно считать, что волна сдвига не вызывает дилатансии, и при решении волновых задач используется известная теория упругих волн.

Когда касательные напряжения достигают значения $\tau = \tau_m$, в грунте распространяются упруго-пластические волны сдвига, вызывая дилатансию. При этом плотность грунта $\rho(\delta)$ является функцией объемной деформации δ .

Система уравнений движения и неразрывности деформации сдвига, подробный вывод и решение которой приведен в работе [3], получена из общих уравнений дилатансионных волн [7] для материала типа «плотного песка» при одномерном плоском случае, когда не учитывается нормальное давление.

$$[\exp(-\delta)] \left[\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} \right] = 0, \quad \frac{1}{1-k\delta} \frac{\partial \tau}{\partial t} - b^2 \rho_0 \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

где τ —касательные напряжения; V —скорость колебаний частиц; $\delta = \text{const}$ —объемная деформация;

Система (1) имеет следующее решение:

$$\tau = \Phi_1(z - b_1 t) + \Phi_2(z + b_1 t)$$

$$V = - \frac{\exp(\delta/2)}{b_1 \rho_0 \sqrt{1 - k^2}} [\Phi_1(z - b_1 t) - \Phi_2(z + b_1 t)] \quad (2)$$

где $b_1 = b_1 \sqrt{1 - k^2} \exp(\delta/2)$ — скорость дилатирующей волны сдвига;
 b_1 — скорость пластической волны сдвига;
 k — постоянный коэффициент, который зависит от физических характеристик грунта ($k^2 < 1$).

Произвольные функции Φ_1 и Φ_2 определяются из начальных и граничных условий.

Предположим, что на границе полубесконечной дилатирующей среды действуют касательные напряжения $\tau(t)$, монотонно возрастающие при $0 \leq t \leq t_p$ и достигающие в момент $t = t_p$ максимального значения $\tau_0 > \tau_m$, а затем монотонно убывающие при $t > t_p$:

$$\tau(0; t) = \begin{cases} \tau_n(t) & \frac{d\tau_n}{dt} \geq 0 & 0 \leq t \leq t_p \\ \tau_p(t) & \frac{d\tau_p}{dt} \leq 0 & t > t_p \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau_n(t)$ — функция нагружения; $\tau_p(t)$ — функция разгрузки; τ_m — пиковое значение касательных напряжений; t_p — момент разгрузки.

На фиг. 2 показаны характеристики волн на плоскости z, t .

В области I распространяются упругие волны, которые на положительных характеристиках для воздействия типа (3) определяются

$$\tau_1 = \tau_n \left(\frac{b_0 t - z}{b_0} \right), \quad V_1 = - \frac{\tau_n}{\rho_0 b_0} \left(\frac{b_0 t - z}{b_0} \right) \quad (4)$$

где τ_1 и V_1 — соответственно касательное напряжение и скорость колебаний частиц в области I;

b_0 — скорость упругих волн сдвига.

Условие динамической неразрывности, выражающее закон сохранения импульса на фронте волны, записывается

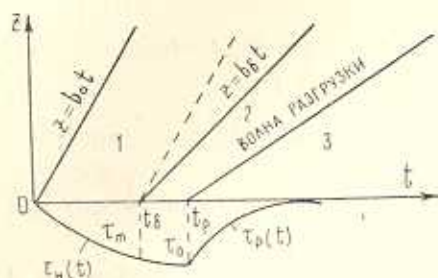
$$\tau_k \pm \rho_k b_k V_k = \tau_n \pm \rho_l b_l V_n \quad (5)$$

где k и n — соответственно номера соседних областей;

$\rho_l b_l$ — импеданс волны сдвига;

Знак (—) соответствует увеличению координаты z , (+) — уменьшению.

Имея в виду условие (5) и формулы (4) и (2), в области дилатации получим



Фиг. 2. Характеристики волны на плоскости z, t при действии касательного импульса произвольной формы

$$\tau_2 = \frac{1+\nu}{2} \tau_u \left(\frac{b_0 t - z}{b_0} \right)$$

$$V_z = - \frac{1+\nu}{2\rho_0 b_0} \tau_u \left(\frac{b_0 t - z}{b_0} \right) \quad (6)$$

где $\nu = \frac{\rho b_s}{\rho_0 b_0}$

В момент $t = t_p$ начинается жесткая разгрузка. Уравнения движения и неразрывности в области разгрузки 3 при достижении плотности грунта критического значения ρ_k будут:

$$\rho_k \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (7)$$

Так как разгрузка происходит жестко (фиг. 1), то в уравнении (7)₂ $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$ и $V = V(t)$, тогда (7)₁ запишем

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \rho_k \frac{dV}{dt} \quad (8)$$

Интегрируя (8) по параметру z и имея в виду, что $V = V(t)$, при условиях на границе $z = 0, \tau = \tau_p(t)$ получаем

$$\tau = \rho_k \frac{dV}{dt} \cdot z + \tau_p(t) \quad (9)$$

Из условия динамической неразрывности (5) на границе областей 2 и 3 с учетом (6), (8) и (9) получим следующее дифференциальное уравнение относительно V :

$$t \frac{dV}{dt} - V - B(t) = 0 \quad (10)$$

где

$$B(t) = \frac{(1+\nu)(1+\nu_p)}{2\rho_0 b_0} \tau_u \left(\frac{b_0 t - z}{b_0} \right) - \frac{1}{\rho_k b_0} \tau_p(t), \quad \nu_p = \frac{\rho_k b_p}{\rho \cdot b_s}$$

b_p — скорость волны разгрузки.

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$V = t \int \frac{B(t)}{t^2} dt + C_1 t \quad (11)$$

где произвольная постоянная C_1 определяется из условия $t = t_p, V = 0$.

Вычисляя производную $\frac{dV}{dt}$ из (11) и подставляя в уравнение (9), получим касательные напряжения в следующем виде:

$$\tau = \rho_k b_p \left[t \int \frac{B(t)}{t^2} dt + B(t) + C_1 t \right] + \tau_p(t) \quad (12)$$

Решения (11) и (12) зависят от конкретного вида функции $B(t)$, то есть от функций $\tau_0(t)$ и $\tau_p(t)$. Например, при действии треугольного импульса $\tau(t) = \tau_0 \frac{t}{\theta_2}$ (где θ_2 — момент разгрузки).

Напряжения и скорость колебаний частиц определяются

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{\tau_0}{\theta_2} \left[t - \frac{\sqrt{\rho_0/\rho_k}(t - \theta_2)}{\exp \delta/2} \right] \\ \dot{v}(t) &= - \frac{\exp \delta/2}{b_1 \rho_0 \sqrt{1 - k\delta}} \frac{\tau_0}{\theta_2} \left[t - \frac{\sqrt{\rho_0/\rho_k}(t - \theta_2)}{\exp \delta/2} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

а скорость волны разгрузки определяется следующей формулой:

$$b_p = b_1 \sqrt{\frac{\rho_0(1 - k\delta)}{\rho_k}} (t - \theta_2) \quad (14)$$

где b_1 — скорость пластической волны.

Как видно из этой формулы, скорость волны разгрузки существенно зависит от отношения исходной и критической плотностей и от величины дилатансии δ . При отсутствии дилатансии $\delta = 0$ и $\rho_0 = \rho_k$ имеем $b_p = b_1(t - \theta_2)$, что соответствует работе [6], где доказывается, что при билинейной модели Прандтля волна разгрузки распространяется со скоростью пластической волны. В формуле (14), совершая предельный переход $k\delta \rightarrow 1$, получим $b_p = 0$. Это значит, что когда дилатансия достигает сравнительно больших величин, грунт стремится к потере прочности и течению.

На фиг. 3 показан график изменения касательных напряжений и их пиковых значений во времени и по координате в дилатирующем грунте при действии треугольного импульса.

Исходя из существующих экспериментальных данных [2], можно предполагать, что при дилатансии вертикальная деформация является функцией от координаты z (фиг. 4).

Это положение подлежит исследованию при испытании грунтов на сдвиг в условиях скашивания.

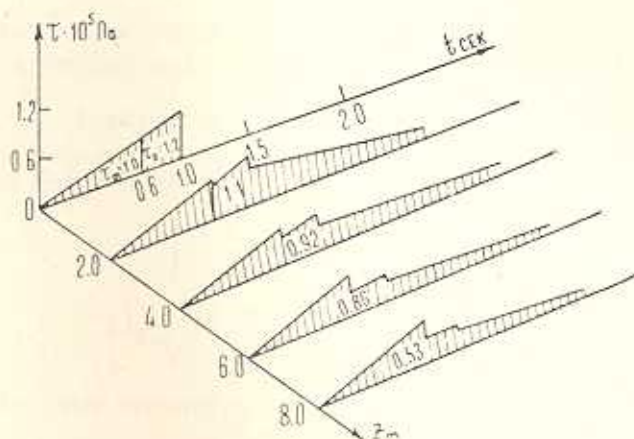
Если эту зависимость аппроксимировать квадратной параболой $\Delta = k_1 z^2$, то получим

$$\delta = \frac{d\Delta}{dz} = 2k_1 z \quad (15)$$

где k_1 — некоторый постоянный коэффициент, который меняется в зависимости от величины нормального давления и коэффициента пористости грунта.

Подставляя значение δ из (15) в систему (1), получим следующую систему двух уравнений с переменными коэффициентами:

$$\exp(-2k_1 z) \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{1-2kk_1 z} \frac{\partial \tau}{\partial t} - b_1^2 \rho_0 \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (16)$$



Фиг. 3. График изменения касательного импульса треугольной формы

Следует отметить, что система (16) гиперболического типа. Ее решение ищем методом характеристик [1].

Система (16) имеет следующие характеристики:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-2kk_1 z \exp(k_1 z)}} \pm b_1 dt = 0$$

или, интегрируя, имеем

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-rz \exp(k_1 z)}} \pm b_1 t = \text{const} \quad (17)$$

где $r = 2kk_1$.

Интеграл, стоящий в правой части (17), можно интегрировать, разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Ограничиваясь первыми двумя членами полученного ряда ввиду его быстрой сходимости и интегрируя, из (17) получим

$$z - qz^2 \pm b_1 t = \text{const} \quad (18)$$

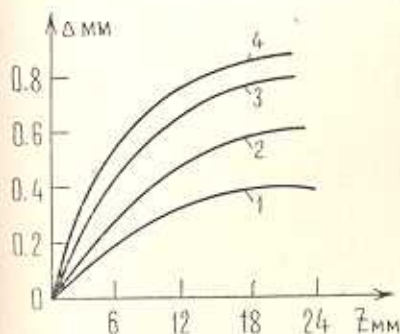
где $q = r/2 - k_1$.

Знак (-) соответствует прямой волне, а (+) — обратной.

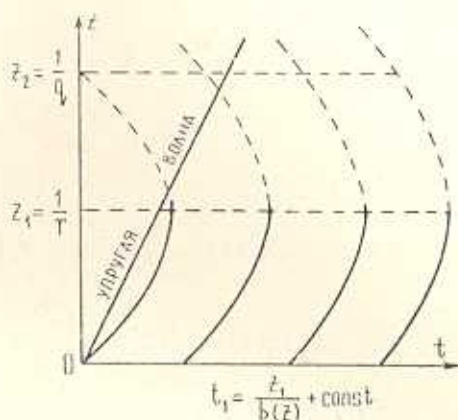
На фиг. 5 показано семейство положительных характеристик на координатной плоскости z, t .

Из системы находим, что на характеристиках (17) выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\exp(k_1 z)}{\sqrt{1-rz}} d\tau \pm b_1 \rho_0 dV = 0 \quad (19)$$



Фиг. 4. График зависимости вертикальной деформации в процессе сдвига от координаты. 1—4 соответствуют значениям деформации сдвига $l = 3, 6, 9$ и 12 мм



Фиг. 5. Семейство положительных характеристик на координатной плоскости z, t

Уравнение (19) нельзя сразу интегрировать, так как коэффициент у $d\tau$ зависит от z . После некоторых преобразований из (19) получим

$$d\tau \pm d[b_1 \rho_0 V \sqrt{1-rz} \exp(-k_1 z)] = \pm \rho_0 b(z) V \psi(z) dz \quad (20)$$

где

$$\psi(z) = \left[\frac{r}{2(1-rz)} + k_1 \right] \exp(-2k_1 z)$$

Теперь, интегрируя (20), получим

$$\tau \pm \frac{\rho_0 b(z)}{\exp(k_1 z)} V = \pm \rho_0 \int V b(z) \psi(z) dz \quad (21)$$

Если определить значения τ , то из уравнения (21) можно найти скорости колебаний частиц V .

Исключая из системы (16) V , получим следующее уравнение в частных производных второго порядка относительно τ :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - b^2(z) \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - 2k_1 b^2(z) \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

где

$$b(z) = b_1 \sqrt{1-rz} \exp(k_1 z)$$

Следует отметить, что уравнение (22) гиперболического типа

только до значения $z = z_1 = \frac{1}{r}$. За координатой z_1 уравнение (22) не имеет места, исходя из понятия характеристик.

С помощью интегрального преобразования Лапласа находим решение уравнения (22), выраженное через функции Бесселя первого рода

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \Phi(z, t) - z^2 \left[\Phi_1(z, t) + \frac{1}{2b_1^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial t^2} + r \frac{\partial^2 \Phi_1(z, t)}{\partial t^2} \right] \right\} \quad (23)$$

где

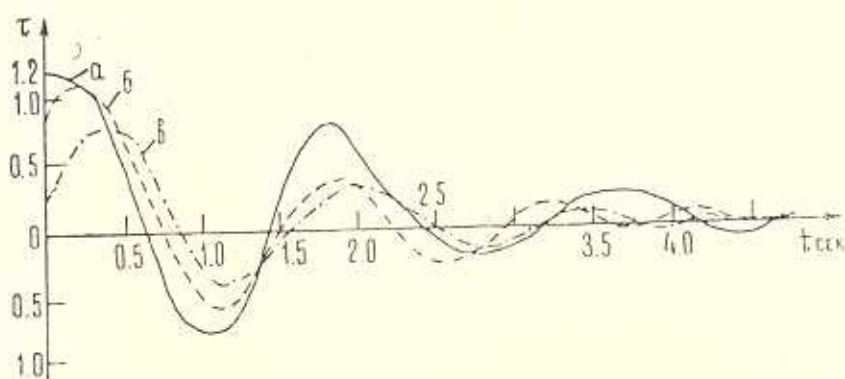
$$\Phi(z, t) = \frac{r_1 b_1^2 z^2}{k_1^2 \sqrt{t^2 - r_1^2 z^2}} J_1\left(\frac{b_1}{4k^2} \sqrt{1 - r_1^2 z^2}\right) + \delta(t - r_1 z^2)$$

$$\Phi_1(z, t) = \frac{1}{16} J_0\left(\frac{1}{4\sqrt{r_1}} \sqrt{t^2 - r_1^2 z^2}\right), \quad r_1 = \frac{r}{2b_0}$$

J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода, соответственно нулевого и первого порядка.

δ — дельта-функция Дирака.

С помощью численного анализа по формуле (23) построены графики $\tau(t)$ на сечениях $z = 400 + 1000$ см (фиг. 6).



Фиг. 6. Графики изменения касательных напряжений $\tau(t)$ в разных сечениях дилатирующего грунта ($a - z = 400$ см, $\bar{b} - z = 600$ см, $b - z = 1000$ см)

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Явление дилатансии существенно влияет на интенсивность сейсмической волны сдвига. Вследствие дилатансии скорость пластической волны сдвига уменьшается на 20—30% и зависит от соотношения первоначальной и текущей плотностей грунта.

2. Скорость волны жесткой разгрузки в дилатирующем грунте существенно зависит от отношения исходной и критической плотностей и от величины дилатации. С увеличением дилатации скорость волны разгрузки уменьшается. При действии треугольного импульса волна разгрузки имеет линейный фронт.
3. Волна сдвига в дилатирующем грунте в случае переменной объемной деформации распространяется по криволинейным характеристикам. На координате $z = 1/r$ (r — постоянный коэффициент, который зависит от физических параметров данного грунта) грунт разрыхляется и волновое движение превращается в пластическое течение.
4. Результаты проведенных исследований могут быть использованы для определения волновой нагрузки на сооружение, а также при сейсмическом микрорайонировании площадок строительства ответственных сооружений.

**ԳՐԱԿԱՆ ԳՆԱՏԱՆՍԻՅԱԿ ԳՐՈՒՆՏՈՒԹՅԱՆ
ՀԱՐԹ ՄԵՍՁՈՓ ԽԱՂԻ ԱՍԲԵՆԵՐԸ**

Բ. Պ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Առաջարկվում է դրական դիլատանտիայի հաշվառման եղանակով փափուկ գրունտներում սահքի ալիքի տարածման դեպքում: Խիտ ալիքային գրունտի սահքի դիմադրության փորձնական դիագրամայի հիման վրա, դիլատանտով գրունտի կիսաանսահման արտաքին եզրին կամայական ձևի շոշափող իմպուլս ազդելու դեպքում կատարված է ալիքային խնդրի լուծումը:

Պահպանելով ալիքի ֆրոնտի վրա դիմամիկ անխզելիության պայմանը, որոշված է կոշտ բևեռնափման ալիքի տեսքը: Ստացված է խնդրի լուծումը, երբ դիլատանտով գրունտի եզրին ազդում է եռանկյունաձև իմպուլս: Այդ դեպքի համար կտրվածքներում կատարվել են շոշափող լարումների բաշխվածության էպյուրաները:

**ONE-DIMENSIONAL PLANE SHEAR WAVES IN POSITIVE
DILATATIONAL SOIL**

R. P. MARTIROSIAN

S u m m a r y

The method of calculation of positive dilatation is suggested for shear wave propagation in soft soils. On the basis of the experimental diagram of shear resistance of dense sandy soil, the wave problem solution has been carried out during the effect on the boundary of

dilatated semi-infinite soil of tangent impulse of arbitrary form. Rigtd, unloading wave form is determined by keeping dynamic continuity condition at the wave front. The solution of the problem is given when the impulse of the triangle form effects the boundary of dilatated soil. For this case diagrams of distribution of tangent stresses in the sections are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971, 416 с.
2. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов. М.: Стройиздат, 1979, 305 с.
3. Мартиросян Р. П. Влияние дилатансии на распространение сейсмической волны сдвига в мягких грунтах.—Изв. АН АрмССР, Сер. техн. наук, 1981, т. 34, № 4, с. 31—38.
4. Месчян С. Р., Бадалян Р. Г. Исследование влияния вибрации на сопротивление грунта сдвигу.—Тр. Второго Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов. Изд. ЕГУ, Ереван: 1976, с. 98—106.
5. Новацкий В. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978, 308 с.
6. Скобеев А. М. К теории волны разгрузки. ПММ, 1962, вып. 26, с. 1015.
7. Николаевский В. Н. и др. Сб. Успехи механики твердых деформируемых тел (к 100-летию Б. Г. Галеркина). М.: Наука, 1975, с. 397—412.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии

Поступила в редакцию
30.XI.1982