ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 593.3

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ МЕХАНИКИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ТЕЛ

ЛОМАКИН Е. В., СВЕКЛО В. А., ЧЕРНЫШОВ О. А.

В работе [1] получены соотношения между деформациями и напряжениями для изотропных упругих тел, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния. Это свойство для краткости обозначено термином «разномодульность», под которым у некоторых других авторов понималось различие упругих характеристик материла только при одноосных растяжении и сжатии [2]. Соотношения [1] были получены из условия существования упругого потенциала, имеющего такой же вид, как и потенциал для классического упругого тела, но константы которого зависят от вида напряженного состояния. При этом в качестве параметра вида напряженного состояния был выбран параметр $\xi=\sigma/\sigma_0$, где σ—среднее напряжение, σ_0—интенсивность напряжений. В общем случае параметр ξ мог принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$.

В данной работе продолжается рассмотрение вопросов, связанных с исследованием определяющих соотношений механики разномодульных тел. В частности, на конечных интервалах изменения аргументов строятся определяющие функции деформированного и напряженного состояния среды. Устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними. Указывается достаточное условие единственности решения основных краевых задач.

1°. При построении зависимостей между напряжениями и деформациями упругого изотропного тела, сопротивление которого зависит от вида напряженного состояния, исходим из следующих допущений:

1. Упругий потенциал среды W зависит только от первых двух инвариантов тензора деформации

$$W=W(J_1,\ J_2),\quad J_1=3\varepsilon,\quad J_2=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=3\varepsilon^2+\frac{3}{2}\varepsilon_0^2 \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon=1/3\,\varepsilon_{ii}$—средняя деформация,

$$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2+6\varepsilon_{12}^2+6\varepsilon_{23}^2+6\varepsilon_{13}^2}$$

—интенсивность тензора деформаций.

2. Упругий потенциал W удовлетворяет равенству

$$J_1 \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_2^0 \frac{\partial W}{\partial J_2^0} = 2W, \quad J_2^0 = \sqrt{J_2} \tag{1.2}$$

Допущения 1, 2 вполне естественны, они выполняются для классического упругого изотропного тела. Допущение 2 обобщает свойство однородности потенциала W в классическом случае.

Для малых деформаций W является функцией шести независимых компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$. При неучете тепловых эффектов имеем

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \qquad e_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij} & (i=j) \\ 2\varepsilon_{ij} & (i \neq j) \end{cases}$$

что в соответствии с допущением 1 позволяет установить общий вид связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial J_1} \delta_{ij} + \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0} \varepsilon_{ij} \tag{1.3}$$

или

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}), \qquad \sigma = \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{1}{J_2^0} \frac{\partial W}{\partial J_2^0}, \qquad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что в рассматриваемой среде главные направления тензоров напряжения и деформации совпадают.

Рассматривая (1.2) как дифференциальное уравнение с частными производными для функции W, запишем его общее решение

$$W = \psi(\eta)(J_2^0)^2, \quad \eta = \frac{J_1}{J_2} \tag{1.5}$$

Здесь $\psi(\eta)$—произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция. По смыслу левой части равенства (1.5) $\psi(\eta) > 0$ для всех возможных значений аргумента. Последний назовем параметром, а $\psi(\eta)$—функцией вида деформированного состояния среды. Согласно (1.1) имеем $9/2\,\varepsilon_0^2 = (3 - \eta^2)(J_2^0)^2$. Откуда следует, что для всех видов деформированного состояния $\eta^2 \leqslant 3$.

Вычисляя производные от W в равенстве (1.3), получим

$$\sigma_{ij} = J_2^0 \psi'(\eta)\delta_{ij} + \chi(\eta)\varepsilon_{ij}, \quad \chi(\eta) = 2\psi(\eta) - \eta\psi'(\eta) \tag{1.6}$$

что равносильно равенствам

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \chi(\eta)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}), \quad 3\sigma = \Pi_1 = 3\psi'(\eta)J_2^0 + \chi(\eta)J_1 \tag{1.7}$$

Из (1.6) следует

$$\sigma_{ij} = \chi(\eta)\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

Отсюда получаем еще одно ограничение на функцию $\psi(\eta)$,

$$\chi(\eta)=2\psi(\eta)-\eta\psi'(\eta)>0$$

для всех $\eta^2\leqslant 3$.

Рассмотрим сумму

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}+2\sigma_{12}\varepsilon_{12}+2\sigma_{23}\varepsilon_{23}+2\sigma_{13}\varepsilon_{13}$$

Пользуясь (1.6), получим формулу Клапейрона

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\psi' J_1 J_2^0+\chi(J_2^0)^2=(\psi'\eta+\chi)(J_2^0)^2=2W$$

2°. Соотношения (1.6) при некоторых дополнительных условиях позволяют выразить J_k через Π_k ($k=1, 2$). $\Pi_2=3\sigma^2+3/2\,\sigma_0^2$, σ_0—интенсивность тензора напряжений. Действительно, пользуясь (1.6), получим

$$\Pi_2^0=T_\psi J_2^0,\quad \Pi_2^0=\sqrt{\Pi_2},\quad T_\psi=[(3-\eta^2)(\psi')^2+4\psi^2]^{1/2} \tag{2.1}$$

Полагая $\beta=\Pi_1/\Pi_2^0$, на основании (1.7) и (2.1) получим

$$\beta=[(3-\eta^2)\psi'+2\eta\psi]T_\psi^{-1} \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) определяет η как неявную функцию на промежутке $-3\leqslant\eta\leqslant 3$. Имеем

$$\frac{d\beta}{d\eta}=\chi\frac{2\psi\chi+(3-\eta^2)[2\psi\psi''-(\psi')^2]}{T_\psi^3} \tag{2.3}$$

При условии неравенства нулю числителя правой части (2.3) η является однозначной функцией β, то есть отношения Π_1/Π_2^0. Таким образом, инварианты J_k однозначно выражаются через Π_k ($k=1, 2$). Вычислим, рассматривая W как функцию только Π_k, левую часть равенства (1.2)

$$J_1\frac{\partial W}{\partial J_1}+J_2^0\frac{\partial W}{\partial J_2^0}=\left(J_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial J_1}+J_2^0\frac{\partial\Pi_1}{\partial J_2^0}\right)\frac{\partial W}{\partial\Pi_1}+\left(J_1\frac{\partial\Pi_2^0}{\partial J_1}+J_2^0\frac{\partial\Pi_2^0}{\partial J_2^0}\right)\frac{\partial W}{\partial\Pi_2^0}$$

Легко проверить с помощью (1.6), что коэффициенты при $\partial W/\partial\Pi_1$, $\partial W/\partial\Pi_2^0$ равны, соответственно, Π_1 и Π_2. Таким образом, приходим к равенству

$$\Pi_1\frac{\partial W}{\partial\Pi_1}+\Pi_2^0\frac{\partial W}{\partial\Pi_2^0}=2W$$

Отсюда, аналогично рассмотренному выше, находим

$$W=\varphi(\beta)(\Pi_2^0)^2,\quad \beta=\Pi_1/\Pi_2^0 \tag{2.4}$$

Здесь $\varphi(\beta)$—произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция. Для всех отличных от нуля напряженных состояний среды $\Pi_2>0$, $\sigma_0=\sqrt{2}\sqrt{3-\beta^2}\,\Pi_2^0/3>0$. Поэтому $\beta^2\leqslant 3$. Из (2.4) следует, что функция $\varphi(\beta)$, как и функция $\psi(\eta)$, должна удовлетворять условию $\varphi(\beta)>0$ для всех $\beta^2\leqslant 3$.

Поскольку для рассматриваемой среды справедлива формула Клапейрона, то справедливы и равенства [3]

$$e_{ij}=\frac{\partial W}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует

$$\varepsilon_{ij}=\varphi'\Pi_2^0\delta_{ij}+\omega(\beta)\sigma_{ij},\quad \omega(\beta)=2\varphi(\beta)-\beta\varphi'(\beta)>0$$

или

$$\varepsilon_{ij}-\varepsilon\delta_{ij}=\omega(\beta)(\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}),\qquad J_1=3\varphi'(\beta)\Pi_2^0+\omega(\beta)\Pi_1 \tag{2.6}$$

Отметим, что параметр $\beta=\Pi_1/\Pi_2^0$ имеет некоторые преимущества перед $\xi=\sigma/\sigma_0$, использованном в [1], поскольку ограничения, накладываемые на функцию $\varphi(\beta)$, должны выполняться только на отрезке $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, а не на всей прямой, как было бы при использовании параметра ξ.

3°. Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой среды можно выразить либо с помощью функции $\varphi(\beta)$, либо $\psi(\eta)$. Между ними имеется связь. Действительно, зная функцию $\varphi(\beta)$, легко находим

$$\psi(\eta)=\varphi(\beta)T_\varphi^{-2},\quad \eta=[(3-\beta^2)\varphi'+2\beta\varphi]T_\varphi^{-1},\quad T_\varphi=[(3-\beta^2)(\varphi')^2+4\varphi^2]^{1/2} \tag{3.1}$$

т. е. имеем параметрическое задание функции $\psi(\eta)$, определяющей зависимость упругого потенциала W от компонент тензора деформаций.

Из (3.1) вытекает равенство

$$\psi'(\eta)=-\varphi'(\beta)\omega^{-1}(\beta)T_\varphi^{-1} \tag{3.2}$$

Здесь в левой части производная берется по η, а в правой части — по переменной β.

На основании (3.1) и (3.2) нетрудно убедиться, что

$$\chi(\eta)\omega(\beta)=1 \tag{3.3}$$

Поэтому из неравенств $\varphi(\beta)>0$, $\omega(\beta)>0$ следуют неравенства $\psi(\eta)>0$, $\chi(\eta)>0$ и наоборот. Покажем теперь, что из соотношений (1.7) вытекают соотношения (2.6) и наоборот. Действительно, из второго соотношения (2.6) имеем

$$J_1=\chi^{-1}(\Pi_1-3\psi'J_2^0)=\omega[\Pi_1+3\varphi'J_2^0\omega^{-1}T_\varphi]=\omega\Pi_1+3\varphi'\Pi_2^0$$

Равносильность первых соотношений (1.7) и (2.6) следует из (3.3). Таким образом, напряженно-деформированное состояние может быть описано либо с помощью потенциала (1.5), либо—(2.4).

Поскольку из (2.6) следует, что $\varepsilon_0=\omega(\beta)\sigma_0$, то для определения вида функции $\omega(\beta)$ может быть использована методика, указанная в работе [1]. Укажем лишь, что если $\omega(\beta)=\mathrm{const}$, то $\varphi=A+B\beta^2$, A, B— постоянные, и мы получим

$$W=A\Pi_1^2+B\Pi_2$$

то есть классический потенциал, который является одним из частных решений уравнения (1.2).

4°. Исследуем теперь условия единственности решения краевых задач для рассмотренной среды. Будем исходить из соотношений, полученных на основе потенциала (1.5). Соотношения между деформациями и напряжениями нелинейные, поэтому воспользоваться классическим доказательством теоремы единственности не представляется возможным. Единственность решения выполняется, если потенциал является выпуклой функцией [4, 5]. Однако, условия выпуклости потенциала (1.5) как функции шести независимых компонент тензора деформаций весьма громоздки, проверка которых может вызвать большие затруднения. Покажем, что единственность решения будет обеспечена при условии выпуклости потенциала как функции двух инвариантов J_1 и J_2. Виртуальная работа поверхностных и объемных сил представляется следующим образом [5]:

$$\int\limits_S F_i\delta u_i dS+\int\limits_V P_i\delta u_i dV=\int\limits_V \frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\delta e_{pq}dV \tag{4.1}$$

Пусть на одной поверхности тела S_1 заданы внешние напряжения, на другой S_2—перемещения

$$\sigma_{ij}\nu_j=T_i^0 \text{ на } S_1, \quad u_j=u_j^0 \text{ на } S_2 \tag{4.2}$$

Предположим, что наряду с решением σ'_{ij}, u'_i, удовлетворяющим граничным условиям (4.2), существует решение σ''_{ij}, u''_i, удовлетворяющее тем же граничным условиям. Причем предположим, что u'_i и u''_i сколь угодно близки, то есть $u''_i=u'_i+\delta u_i$. Тогда виртуальная работа поверхностных сил и объемных сил на вариациях перемещения, соответствующего разности решений u''_j и u'_j для первого решения, согласно (4.1), равна

$$\int\limits_S F_i\delta u_i dS+\int\limits_V P_i\delta u_i dV=\int\limits_V \left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right)'\delta e_{pq}dV \tag{4.3}$$

но выражение, стоящее под интегралом в правой части равенства (4.3) есть удельная элементарная работа деформации δW и поскольку W является также функцией J_1 и J_2, то справедливо

$$\left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right)' \delta e_{pq} = \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)' (\delta J_k)', \quad k = 1,\ 2$$

и

$$\int\limits_S F_i' \delta u_i ds + \int\limits_V P_i' \delta u_i dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)' (\delta J_k)' dV \tag{4.4}$$

Аналогично, для второго решения имеем

$$\int\limits_S F_i'' \delta u_i dS + \int\limits_V P_i'' \delta u_i dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right)'' (\delta J_k)'' dV \tag{4.5}$$

Покажем, что с точностью до малых более высокого порядка значения $\delta J_k'$ и $\delta J_k''$ совпадают. В самом деле $\delta J_1' = \delta J_1'' = {}^1/_3(\delta e_{11} + \delta e_{22} + \delta e_{33})$,

$$\delta J_2' = \frac{e_{pq}' \delta e_{pq}}{\sqrt{e_{pq}' e_{pq}'}}, \quad \delta J_2'' = \frac{e_{pq}'' \delta e_{pq}}{\sqrt{e_{pq}'' e_{pq}''}}$$

Поскольку $e_{pq}'' = e_{pq}' + \delta e_{pq}$, то получим

$$\delta J_2'' = \left[\frac{e_{pq}'}{\sqrt{e_{pq}' e_{pq}'}} + o(\delta e_{pq})\right] \delta e_{pq}$$

Поэтому

$$\delta J_2'' = \delta J_2' + o(\delta e_{pq}) \delta e_{pq}$$

Отбрасывая малые более высокого порядка, чем δe_{pq}, получим $\delta J_2'' = \delta J_2'$.

Составляя теперь разность выражений (4.4) и (4.5), получаем

$$\int\limits_S \Delta F_i \delta u_i dS = \int\limits_V \Delta \left(\frac{\partial W}{\partial J_k}\right) \delta J_k dV \tag{4.6}$$

Выражения в левой части равенства (4.6) тождественно равны нулю, так как $\Delta F_i = 0$ на S_1, а $\delta u_i = 0$ на S_2. Если же наложить на функцию W условия выпуклости, то подынтегральное выражение в правой части равенства (4.6) будет всегда больше нуля, что обеспечивает единственность решения.

Известно, что необходимым и достаточным условием выпуклости функции f является положительная определенность гессиана

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}$$

Находим для W

$$c_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_1^2} = \varphi'', \qquad c_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_1 \partial J_2} = -\gamma_i \varphi'' + \psi'$$

$$c_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial J_2^2} = -2\psi' \gamma_i + \varphi'' \gamma_i^2 + 2\psi$$

Вычисляя главные миноры матрицы $[c_{ij}]$

$$\Delta_1 = c_{11} = \varphi'', \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 2\varphi\varphi'' - (\varphi')^2$$

и накладывая на них условия положительности, получаем достаточное условие единственности

$$\varphi''>0, \quad 2\varphi\varphi''-(\varphi')^2>0 \tag{4.7}$$

Поскольку из положительной определенности потенциала следует, что $\varphi>0$, то при выполнении второго условия (4.7) первое также выполнится. Таким образом, условия единственности решения можно записать в виде

$$\varphi>0, \quad 2\varphi\varphi''-(\varphi')^2>0 \tag{4.8}$$

Заметим, что условия (4.8) являются также достаточными для взаимной однозначности между параметрами η и β, как это видно из (2.3).

В заключение отметим, что между введенным ранее параметром вида напряженного состояния ξ и использованным в данной работе параметром β существует простая зависимость $\xi=\sqrt{2}\beta/[3(3-\beta^2)]$. Таким образом, неограниченный интервал изменения параметра ξ сведен к конечному интервалу для параметра β. Это часто бывает полезным при проведении расчетов с помощью того или иного численного метода.

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇԻՉ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ե. Վ. ԼՈՄԱԿԻՆ, Վ. Ա. ԵՎԼԵՎԼՈ, Օ. Ա. ՉԵՐՆԻՇՈՎ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում են տարամոդուլ մարմինների մեխանիկայի որոշիչ կապակցությունների հետազոտման հետ կապված հարցեր։ Քննարկվում են լարվածային վիճակի տեսքից դեֆորմացիոն բնութագրիչների կախվածության նկարագրման համար տարբեր պարամետրերի օգտագործման հնարավորությունը։

Վերլուծված են առաձգականության տեսության որոշ թեորեմների կիրառելիությունը տարամոդուլ նյութերի համար։

Ստացված են եզրային խնդիրների լուծման միակության պայմանները։

ON CONSTITUTIVE RELATIONS IN THE MECHANICS OF MULTIMODULUS MATERIALS

E. V. LOMAKIN, V. A. SVEKLO, O. A. CHERNYSHOV

S u m m a r y

Some problems of constitutive relations for multimodulus materials are considered. The possibilities of different parameters for the description of the dependence of deformation properties on the stress state are discussed. Some theorems referring to the theory of elasticity are analysed for multimodulus materials. The conditions of the unique solution for the boundary problem are defined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 6.
2. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости, М.: «Наука», 1982.
3. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М.: «Высшая школа», 1976.
4. *Хилл.* Новые горизонты в механике твердых тел.—Механика, 1957, № 4.
5. *Хилл.* О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций.—Механика, 1958, № 3.

Калининградский технический институт рыбной промышленности и хозяйства

Поступила в редакцию 18.IV.1983.