ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 2, 1985 Механика

УДК 539.3:537.86

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИНОК

БАГДАСАРЯН Г. Е., ДАНОЯН З. Н.

В работах [1, 2] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [1] получены основные уравнения и соотношения, описывающие магнитоупругие колебания тонких пластинок и оболочек при малых возмущениях.

В настоящей работе, исходя из основных положений нелинейной теории магнитоупругости и гипотезы магнитоупругости тонких тел, выведены основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний проводящих тонких пластинок в магнитном поле.

§ 1. Пусть упругая однородная изотропная тонкая пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0$. Принимается, что для среды, окружающей пластинку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума. Предполагается, что сторонние токи и сторонние заряды отсутствуют. Одновременно считается, что задача магнитостатики для начального (невозмущенного) состояния решена, то есть известны векторы напряженности и магнитной индукции для внешней $\vec{H}_0^{(e)}, \vec{B}_0^{(e)}$ и внутренней $\vec{H}_0$, $\vec{B}_0$ областей (внутренняя область—часть пространства, занятая пластинкой, внешняя—остальное пространство).

Пусть пластинка отнесена к неподвижной прямоугольной декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$ так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью OX_1X_2.

Нелинейные колебания пластинки в магнитном поле будем описывать на основе геометрически нелинейной теории, считая прогибы пластинки сопоставимыми с ее толщиной, но малыми по сравнению с основными размерами. В соответствии с этим будем считать, что материал пластинки подчиняется законам Гука и Ома, а также линейным законам поляризации и намагничивания. При этом подразумевается, что изменение электромагнитного поля происходит квазистационарно. Предположим, что упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε. Вышеприведенные величины не зависят от координат, времени, деформации и характеристик электромагнитного поля.

Известно [3, 4], что геометрическая нелинейность связана с необходимостью различать координаты начального и текущего состояний. Обозначим в выбранной системе координат начальные координаты любой частицы пластинки через x_i, а текущие—через ξ_i. Известно также, что колебание пластинки можно описать как с точки зрения Эйлера, так и с точки зрения Лагранжа. В первом случае характеристики движения пластинки считаются функциями пространственных координат текущего состояния пластинки ξ_i и времени t (переменные Эйлера), во втором же случае в качестве независимых переменных принимают материальные координаты частиц пластинки x_i и время t (переменные Лагранжа).

Поведение электромагнитного поля пластинки можно описать как в переменных Эйлера, так и в переменных Лагранжа, ибо закон движения пластинки

$$\xi_i = \xi_i(x_j,\ t) = u_i(x_j,\ t) + x_i \tag{1.1}$$

где u_i—компонента вектора перемещения $\vec{u}$, устанавливает взаимооднозначное соответствие между начальным и текущим состояниями пластинки. Это, в общем случае, нельзя сказать относительно электромагнитного поля внешней области пластинки. В случае, когда между внешними областями начального и текущего состояний пластинки отсутствует закон соответствия (например, когда пластинка находится в вакууме), то внешнюю задачу для электромагнитного поля в принципе можно сформулировать только в переменных Эйлера.

Ввиду того, что внутреннюю задачу магнитоупругости (как и задачу теории упругости без магнитного поля) удобно решать в переменных Лагранжа, целесообразно во внешней области произвести замену переменных, отображая внешнюю область текущего состояния пластинки на внешнюю область начального состояния. При этом отображающие функции

$$\xi_i = u_i^{(e)}(x_j,\ t) + x_i \tag{1.2}$$

выбираются так, чтобы точки деформированной границы пластинки отображались на недеформированную границу точно так же, как и при отображении (1.1). Очевидно, что при таком отображении в каждый момент времени деформированная поверхность пластинки является координатной поверхностью криволинейных координат x_i, определяемых формулами (1.1) и (1.2).

Трехмерная задача магнитоупругости в переменных Эйлера в абсолютной гауссовой системе единиц сводится к совместному интегрированию следующих систем дифференциальных уравнений [5—7].

Во внутренней области деформированной пластинки:

уравнения электродинамики для медленно движущейся среды [8]—

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_k}{\partial \xi_j} = \frac{4\pi}{c} J_i, \quad \frac{\partial B_k}{\partial \xi_k} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial \xi_j}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial D_k}{\partial \xi_k}=4\pi\rho_e \\
&J_i=\sigma\left(E_i+\frac{\mu}{c}\varepsilon_{ijk}v_jH_k\right) \\
&B_i=\mu H_i-\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\varepsilon_{ijk}v_jE_k \\
&D_i=\varepsilon E_i+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\varepsilon_{ijk}v_jH_k
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

уравнения теории упругости с учетом объемных сил электромагнитного происхождения (сил Лоренца)—

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial \xi_k}+F_i^{(s)}=\rho\frac{dv_i}{dt}, \quad F_i^{(s)}=\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}J_jB_k, \quad v_i=\frac{\partial u_i}{\partial t} \\
&\sigma_{ij}=\beta_{jk}\frac{\partial W}{\partial \beta_{ik}}, \quad \beta_{ij}=\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Во внешней области деформированной пластинки:

уравнения электродинамики для вакуума [8]—

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_k^{(e)}}{\partial \xi_j}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_k^{(e)}}{\partial \xi_k}=0 \\
&\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \xi_j}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \xi_k}=0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Здесь и в последующем величины, относящиеся к внешней области пластинки, отмечаются индексом (e), а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

В приведенных выше уравнениях E_i и H_i—компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей, B_i и D_i—компоненты векторов магнитной и электрической индукции, J_i—компонента вектора плотности электрического тока, ρ_e—объемная плотность электрического заряда, v_i—компонента вектора скорости частиц пластинки, c—электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в пустоте, σ_{ij}—компонента тензора напряжения Эйлера-Коши, $F_i^{(s)}$—компонента силы Лоренца, β_{ij}—компонента градиента деформации Лагранжа, W—функция энергии деформации, отнесенная к единице объема деформированного тела, ρ—плотность деформированного тела, δ_{ik}—символ Кронекера, ε_{ijk}—символ Леви-Чивита.

Отметим, что в уравнениях (1.3) члены, соответствующие токам смещения $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и конвекционным токам $\rho_e\vec{v}$ отсутствуют, так как их влияние в случае медленно движущихся сред с высокой проводимостью в квазистационарных электромагнитных полях пренебрежимо мало [8].

К системам уравнений (1.3)—(1.5), определяющих поведение электромагнитного поля и колеблющейся в нем упругой проводящей пластинки, должны быть присоединены условия сопряжения на поверхности раздела двух сред, начальные условия и условия на бесконечности.

Условия сопряжения на поверхности деформированной пластинки S^*, вытекающие из законов сохранения, в переменных Эйлера запишутся следующим образом [5—8]:

$$\varepsilon_{ijk}N_j(H_k^{(e)}-H_k)=-\frac{v_N}{c}(D_i^{(e)}-D_i),\quad N_k(B_k^{(e)}-B_k)=0 \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_{ijk}N_j(E_k^{(e)}-E_k)=\frac{v_N}{c}(B_i^{(e)}-B_i),\quad N_k(D_k^{(e)}-D_k)=4\pi\rho_s^*$$

$$N_k(\sigma_{ki}+T_{ki})=P_i+N_kT_{ki}^{(e)} \tag{1.7}$$

Здесь N_k—компонента единичной внешней нормали к деформированной поверхности пластинки, v_N—нормальная скорость граничных точек пластинки, ρ_s^*—поверхностная плотность электрического заряда, P_i—компонента заданной удельной поверхностной силы, T_{ik} и $T_{ik}^{(e)}$—компоненты тензоров напряжения Максвелла соответственно в пластинке и в вакууме, причем

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left[H_iB_k+E_iD_k-\frac{\delta_{ik}}{2}(H_jB_j+E_jD_j)\right]$$

$$T_{ik}^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left[H_i^{(e)}H_k^{(e)}+E_i^{(e)}E_k^{(e)}-\frac{\delta_{ik}}{2}(H_j^{(e)}H_j^{(e)}+E_j^{(e)}E_j^{(e)})\right] \tag{1.8}$$

Используя закон движения (1.1) и переходя от переменных Эйлера ξ_i, t к переменным Лагранжа x_i, t [3, 4], из (1.2)—(1.7) получим следующие основные уравнения и граничные условия магнитоупругости в переменных Лагранжа [9—12].

Во внутренней области недеформированной пластинки:

уравнения Максвелла—

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\widetilde{H}_k}{\partial x_j}=\frac{4\pi}{c}\widetilde{J}_i,\quad \frac{\partial\widetilde{B}_k}{\partial x_k}=0,\quad \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\widetilde{E}_k}{\partial x_j}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\widetilde{B}_i}{\partial t},\quad \frac{\partial\widetilde{D}_k}{\partial x_k}=4\pi\rho_e \tag{1.9}$$

материальные соотношения электромагнитного поля—

$$\widetilde{J}_i=\sigma\left(\widetilde{E}_i+\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\beta_{mj}\frac{\partial u_m}{\partial t}\widetilde{B}_k\right),\quad \widetilde{B}_i=\mu\widetilde{H}_i-\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\varepsilon_{ijk}\beta_{mj}\frac{\partial u_m}{\partial t}\widetilde{E}_k \tag{1.10}$$

$$\tilde{D}_i = \varepsilon \tilde{E}_i + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \varepsilon_{ijk} \beta_{mj} \frac{\partial u_m}{\partial t} \tilde{H}_k$$

уравнения движения—

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\beta_{ik}\tilde{\sigma}_{jk}) + \frac{1}{c}\varepsilon_{kjm}\beta_{ik}\tilde{J}_j\tilde{B}_m = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1.11}$$

физические соотношения (закон Гука)—

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ik}} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ik}\gamma_{mm} + \frac{E}{1+\nu}\gamma_{ik} \tag{1.12}$$

геометрические соотношения—

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{1.13}$$

граничные условия на поверхности S недеформированной пластинки:

для электромагнитных величин—

$$\varepsilon_{ijk} n_j(\tilde{H}_k^{(e)} - \tilde{H}_k) = -\frac{1}{c} n_j \frac{\partial u_m}{\partial t}\beta_{mj}(\tilde{D}_i^{(e)} - \tilde{D}_i)$$

$$\varepsilon_{ijk} n_j(\tilde{E}_k^{(e)} - \tilde{E}_k) = \frac{1}{c} n_j \frac{\partial u_m}{\partial t}\beta_{mj}(\tilde{B}_i^{(e)} - \tilde{B}_i) \tag{1.14}$$

$$n_j(\tilde{B}_j^{(e)} - \tilde{B}_j) = 0, \quad n_j(\tilde{D}_j^{(e)} - \tilde{D}_j) = 4\pi\rho_s^*$$

для компонент суммарных тензоров напряжений—

$$n_j\beta_{im}(\tilde{\sigma}_{mj} + \tilde{T}_{mj}) = P_i + n_j\beta_{im}\tilde{T}_{mj} \tag{1.15}$$

В соотношениях (1.9)—(1.15) γ_{ij}—компонента тензора деформации Грина, $\tilde{\sigma}_{mj}$—компонента тензора напряжений Кирхгофа (тензора обобщенных напряжений), n_j— компонента единичной нормали к недеформированной поверхности пластинки. Кроме того, здесь приняты следующие обозначения:

$$\tilde{A}_i = A_k\beta_{ki}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \beta_{mi}\beta_{kj}\sigma_{mk}$$

$$\tilde{T}_{ij} = \beta_{mi}\beta_{kj}T_{mk} = \frac{1}{4\pi}\left[\tilde{H}_i\tilde{B}_j + \tilde{E}_i\tilde{D}_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(\tilde{E}_p\tilde{D}_p + \tilde{H}_p\tilde{B}_p)\right]$$

$$\tilde{T}_{ij}^{(e)} = \beta_{mi}\beta_{kj}T_{mk}^{(e)} = \frac{1}{4\pi}\left[\tilde{H}_i^{(e)}\tilde{H}_j^{(e)} + \tilde{E}_i^{(e)}\tilde{E}_j^{(e)} - \frac{\delta_{ij}}{2}(\tilde{E}_p^{(e)}\tilde{E}_p^{(e)} + \tilde{H}_p^{(e)}\tilde{H}_p^{(e)})\right] \tag{1.16}$$

где под $\tilde{A}_i$ и A_i понимается любая из следующих пар величин:

$\tilde{H}_i, H_i$; $\tilde{E}_i, E_i$; $\tilde{B}_i, B_i$; $\tilde{D}_i, D_i$; $\tilde{E}_i^{(e)}, E_i^{(e)}$; $\tilde{H}_i^{(e)}, H_i^{(e)}$; $\tilde{B}_i^{(e)}, B_i^{(e)}$; $\tilde{D}_i^{(e)}, D_i^{(e)}$; $\tilde{J}_i, J_i$

Следует отметить, что основные уравнения и поверхностные условия (1.9) — (1.16) были получены на основе допущений теории малых деформаций. Согласно этой теории удлинения и сдвиги (компоненты деформации γ_{ij}) пренебрегаются по сравнению с единицей. Это допущение дает возможность не принимать во внимание различия между длинами, площадями и объемами до и после деформации при составлении уравнений и поверхностных условий. Кроме того, при этих допущениях, единичные векторы $\vec{e}_i$ сопутствующей материальной системы координат (криволинейная подвижная система координат Лагранжа) следует считать взаимноперпендикулярными. Совокупность этих векторов в каждой точке среды образует триедр декартовых осей, повернутый по отношению к единичным векторам $\vec{i}_j$ неподвижной системы координат $OX_1X_2X_3$ в соответствии с поворотом, получаемым в результате деформации окрестностью рассматриваемой точки среды [3]. При этом связь между векторами $\vec{e}_i$ и $\vec{i}_j$ дается приближенной формулой

$$\vec{e}_j = \beta_{ij}\vec{i}_i = \alpha_{ji}\vec{i}_i \tag{1.17}$$

где $\alpha_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ — компонента градиента деформации Эйлера. Согласно (1.17) любой вектор можно представить в виде

$$\vec{A} = A_k\vec{i}_k = \widetilde{A}_k\vec{e}_k \tag{1.18}$$

из чего следует, что величины, отмеченные знаком (~), представляют собой компоненты соответствующих векторов в сопутствующей системе координат.

Используя замену переменных (1.2) и учитывая, что отображающие функции $u_i^{(e)}$ внешней области выражаются деформациями граничной поверхности пластинки, из (1.5) получаем уравнения электродинамики во внешней области в переменных x_i, t в следующем виде (при этом учитывается малость компонентов деформации границы пластинки):

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \widetilde{H}_k^{(e)}}{\partial x_j} = \frac{1}{c}\frac{\partial \widetilde{E}_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \widetilde{H}_k^{(e)}}{\partial x_k} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \widetilde{E}_k^{(e)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \widetilde{H}_i^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \widetilde{E}_k^{(e)}}{\partial x_k} = 0 \tag{1.19}$$

Наконец, отметим, что в уравнениях Максвелла в форме (1.9) и (1.10) не учтены члены, связанные с конвективными производными характеристик электромагнитного поля. Эффекты этих членов в случае проводящих твердых сред при изучении колебаний и распространения волн малы и при определении характеристик электромагнитного поля ими можно пренебречь [11, 12].

§ 2. В дальнейшем для простоты выкладок будем принимать, что невозмущенное магнитное поле постоянное, а магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки равны единице ($\mu=1$, $\varepsilon=1$).

Характеристики возмущенного электромагнитного поля представим в виде

$$\tilde{H}_i=H_{0i}+h_i^*,\quad \tilde{E}_i-\tilde{e}_i=e_i^* \tag{2.1}$$

где величины, отмеченные знаком (*), представляют собой разность нормальных и тангенциальных компонент электромагнитного поля текущего и начального состояний, то есть эти величины являются возмущениями нормальных и тангенциальных компонент соответствующих векторов.

Аналогичное представление электромагнитного поля принимается также во внешней области

$$\tilde{H}_i^{(e)}=H_{0i}+h_i^{(e)*},\quad \tilde{E}_i^{(e)}-\tilde{e}_i^{(e)}=e_i^{(e)*}$$

Для приведения трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластинок к двумерной примем гипотезу магнитоупругости тонких тел [1, 2], согласно которой:

а) нормальный к срединной плоскости прямолинейный элемент пластинки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности пластинки и сохраняет свою длину;

б) возмущения тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля и возмущение нормальной компоненты вектора напряженности магнитного поля по толщине пластинки остаются неизменными.

Сформулированные гипотезы аналитически представляются следующим образом [1, 2]:

$$u_1=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1},\quad u_2=v-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2},\quad u_3=w(x_1,\ x_2,\ t) \tag{2.2}$$

$$e_1^*=\varphi(x_1,\ x_2,\ t),\quad e_2^*=\psi(x_1,\ x_2\ t),\ h_3^*=f(x_1,\ x_2,\ t) \tag{2.3}$$

где $u=u(x_1, x_2, t)$, $v=v(x_1, x_2, t)$, $w=w(x_1, x_2, t)$—искомые перемещения срединной плоскости пластинки, φ, ψ, f—искомые функции возмущенного электромагнитного поля. В этих соотношениях точка (x_1, x_2, x_3) изменяется в пределах области Ω_0, где Ω_0—область, занимаемая пластинкой в недеформированном состоянии.

Отметим, что перемещения пластинки, вообще говоря, выражаются формулами (2.2), если малы не только деформации (удлинения и сдвиги), но и углы поворота. При этом углы поворота, будучи малыми по сравнению с единицей, могут значительно превосходить удлинения и сдвиги, а прогибы могут быть сравнимы с толщиной пластинки [3, 13].

Из уравнений (1.9), (1.10), согласно (2.1), (2.2) и (2.3), получим

$$\frac{\partial h_1^*}{\partial x_3}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}h_1^*=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}+f}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial h_2^*}{\partial x_3}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}h_2^*=\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}+f}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]$$

Интегрируя неоднородные линейные дифференциальные уравнения (2.4) и удовлетворяя поверхностным условиям

$$h_1^*=h_1^{(e)*}\equiv h_1^{\pm};\quad h_2^*=h_2^{(e)*}\equiv h_2^{\pm}\quad \text{при}\quad x_3=\pm h \tag{2.5}$$

определяем возмущения тангенциальных компонент магнитного поля h_1^* и h_2^*. В их выражения входит функция $(\mathrm{ch}\tau)^{-1}\exp(x_3h^{-1}\tau)$, где $\tau=\frac{4\pi\sigma h}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}$. Для тонких пластинок безразмерная величина τ намного меньше единицы. Разлагая указанную функцию в ряд по степеням малого параметра τ и ограничиваясь членами не выше второй степени, для h_1^* и h_2^* окончательно получим

$$h_1^*=\frac{h_1^++h_1^-}{2}+x_3\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi+\frac{1}{c}\left(H_{01}+\frac{h_1^++h_1^-}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial t}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{H_{03}}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{f}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\}+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{x_3^2-h^2}{2}\left\{(H_{03}+f)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial t}\right\} \tag{2.6}$$

$$h_2^*=\frac{h_2^++h_2^-}{2}+x_3\left\{\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi-\frac{1}{c}\left(H_{02}+\frac{h_2^++h_2^-}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{H_{03}}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{f}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right]\right\}+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{x_3^2-h^2}{2}\left\{(H_{03}+f)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial t}\right\}$$

В выражениях (2.6) и в дальнейшем отброшены нелинейные члены выше второго порядка малости.

Из (1.9), в силу (1.10), (2.1), (2.2) и (2.3), для возмущения нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля e_3^* найдем

$$e_3^*=\frac{c}{4\pi\sigma}\left\{\frac{\partial h_2^*}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1^*}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}\right)(H_{02}+h_2^*)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial v}{\partial t}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}\right)(H_{01}+h_1^*)+\frac{\partial w}{\partial t}\left(H_{02}\frac{\partial w}{\partial x_1}-H_{01}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right]\right\} \tag{2.7}$$

Таким образом, возмущения всех компонент электромагнитного поля представлены с помощью формул (2.6) и (2.7) посредством шести искомых функций u, v, w, φ, ψ, f и значениями возмущений тангенциальных компонент магнитного поля $h_1^{\pm}$ и $h_2^{\pm}$ на поверхностях пластинки.

При удовлетворении поверхностных условий (2.5), кроме выражений (2.6), получаются также следующие два уравнения относительно искомых функций:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}+f}{c}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{h_1^{+}-h_1^{-}}{2h} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}+f}{c}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{h_2^{+}-h_2^{-}}{2h}$$

Подставляя (2.3) в седьмое уравнение системы (1.9), получим еще одно уравнение относительно основных искомых функций

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2.9}$$

Согласно (2.2), (2.3) из (1.12) и (1.13), в пределах принятых допущений, получим известные соотношения [13]

$$\tilde{\sigma}_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1^2}\right)^2+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2^2}\right)^2\right]$$

$$\tilde{\sigma}_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2^2}\right)^2+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

$$\tilde{\sigma}_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}-2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right] \tag{2.10}$$

Из первых двух уравнений системы (1.11), в силу (2.2), (2.3) и (2.10), с учетом граничного условия (1.15) на поверхности пластинки (при $P_1=P_2=0$) определяем касательные напряжения $\tilde{\sigma}_{13}$ и $\tilde{\sigma}_{23}$ (в тексте их выражения не приведены), а также получаем следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\sigma(1-\nu^2)}{cE}\left[H_{03}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\right.$$

$$+f\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{2H_{02}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{H_{03}}{c}\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}^2}{c}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial t}-$$

$$-H_{02}\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}+H_{01}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}\Bigg]-$$

$$-\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}H_{02}\left(\psi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(2.11)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\sigma(1-\nu^2)}{cE}\Bigg[H_{03}\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+$$

$$+f\left(\varphi-\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{2H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{H_{03}}{c}\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}^2}{c}\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial t}+$$

$$+H_{02}\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_2}-H_{01}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial x_2}\Bigg]-$$

$$-\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2}H_{01}\left(\varphi+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}\right)=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Остается удовлетворить третьему уравнению системы (1.11). Подставляя (2.10) и найденные выражения для $\tilde{\sigma}_{13}$, $\tilde{\sigma}_{23}$ в указанное уравнение и интегрируя по x_3 в пределах от $x_3=-h$ до $x_3=h$, с учетом (1.10), (2.2), (2.3) и третьего условия (1.15), получим

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2Eh}{1-\nu^2}\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Bigg[\frac{\partial w}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\Bigg]+\frac{\partial}{\partial x_2}\Bigg[\frac{\partial w}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\Bigg]\Bigg\}-\frac{2h^3\sigma}{3c^2}H_{03}^2\frac{\partial\Delta w}{\partial t}+$$

$$+\frac{2\sigma h}{c}\Bigg[H_{01}\left(\psi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-H_{02}\left(\varphi+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{2\sigma h}{c}\Bigg[\left(\frac{h_1^{+}+h_1^{-}}{2}-H_{03}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\left(\psi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\left(\frac{h_2^{+}+h_2^{-}}{2}-\right.$$

$$\left.-H_{03}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\left(\varphi+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{2H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{f}{c}\left(H_{02}\frac{\partial v}{\partial t}+H_{01}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg]-$$

$$-\frac{2\sigma h^3}{3c^2}H_{03}\Bigg[\left(\Delta f-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}+\right.$$

$$\left.+f\frac{\partial\Delta w}{\partial t}\right)\Bigg]=P_3 \qquad (2.12)$$

При получении (2.11) и (2.12) было учтено условие равенства нулю нормальной (к деформированной поверхности пластинки) составляющей плотности тока при $x_3=\pm h$.

Таким образом, система трехмерных уравнений внутренней задачи нелинейной теории магнитоупругости тонких пластинок на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел (2.2), (2.3), как и в линейном случае [1], свелась к интегрированию шести двумерных дифференциальных уравнений (2.8), (2.9), (2.11), (2.12) относительно основных искомых функций u, v, w, φ, ψ, f.

§ 3. В двумерные уравнения магнитоупругости тонких пластинок, полученные в предыдущем пункте, входят неизвестные граничные значения $h_1^{\pm}$, $h_2^{\pm}$ возмущений тангенциальных компонент магнитного поля на поверхностях пластинки $x_3=\pm h$. Поэтому полученные уравнения необходимо рассматривать совместно с трехмерными уравнениями (1.5) или (1.19) для среды, окружающей пластинку, при общих граничных условиях (1.4) или (1.14) на поверхности раздела двух сред. Сказанное означает, что задача магнитоупругости в целом остается трехмерной. В работах [5, 14, 15], исходя из основных положений гипотезы магнитоупругости тонких тел, линейная трехмерная задача магнитоупругости тонких пластинок сведена к двумерной. Здесь, при помощи гипотезы магнитоупругости тонких тел и предположения, что влиянием токов смещения на характеристики колебания пластинки можно пренебречь, аналогично работе [15], определяются указанные граничные значения и на основе этого получается замкнутая двумерная система нелинейных уравнений магнитоупругости тонких пластинок с соответствующими граничными условиями.

Согласно работе [15], будем принимать, что соотношения (2.3) имеют место во всем слое $\Omega(\Omega: |x_3|<h, -\infty<x_i<+\infty\ (i=1, 2))$. То есть, вместо (2.3) принимаются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} e_1^*=\varphi(x_1, x_2, t),\ e_2^*=\psi(x_1, x_2, t), \\ h_3^*=f(x_1, x_2, t), \end{aligned}\right\}\ \text{при}\ (x_1, x_2, x_3)\in\Omega_0$$

$$\left.\begin{aligned} e_1^{(e)*}=\varphi(x_1, x_2, t),\ e_2^{(e)*}=\psi(x_1, x_2, t), \\ h_3^{(e)*}=f(x_1, x_2, t), \end{aligned}\right\}\ \text{при}\ (x_1, x_2, x_3)\in\Omega\setminus\Omega_0 \tag{3.1}$$

Принимая (3.1) и поступая аналогичным образом как при получении уравнений (2.8), (2.9), определяем остальные компоненты электромагнитного поля в слое Ω и получаем три уравнения относительно φ, ψ, f в области $x_3=0$, $-\infty<x_i<+\infty$ $(i=1, 2)$. Эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (2.8), (2.9), но под σ понимается следующая величина:

$$\sigma^*=\begin{cases} \sigma & \text{при}\ (x_1, x_2, 0)\in\Omega_0 \\ 0 & \text{при}\ (x_1, x_2, 0)\in\Omega\setminus\Omega_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Перейдем к определению граничных значений $h_1^{\pm}$ и $h_2^{\pm}$ на плоскостях $x_3=\pm h$, $-\infty<x_i<+\infty$ $(i=1, 2)$. Их определяем, решая уравнения

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial h_k^{(e)*}}{\partial x_j}=0, \qquad \frac{\partial h_k^{(e)*}}{\partial x_k}=0 \tag{3.3}$$

в областях $|x_3|>h$ при следующих граничных условиях:

$$h_3^{(e)*}\Big|_{x_3=\pm h} = f(x_1, x_2, t) \tag{3.4}$$

Введя потенциальную функцию $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ посредством

$$h_i^{(e)*} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

задачу определения $h_i^{(e)*}$ вне слоя $|x_3| < h$, согласно (3.3)—(3.5), приводим к решению следующих задач Неймана в полупространствах $|x_3| > h$:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\pm h} = f \tag{3.6}$$

Решения задач (3.6) имеют вид (здесь верхний знак берется для $x_3 > h$, нижний—для $x_3 < -h$):

$$\Phi = \mp \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{f(x_1', x_2', t)\, dx_1' dx_2'}{[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 \mp h)^2]^{1/2}} \tag{3.7}$$

Из (3.7) в силу (3.5) и поверхностного условия (2.5) найдем

$$h_i^{\pm} = \mp \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{f(x_1', x_2', t) dx_1' dx_2'}{[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2]^{1/2}} \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (2.8)—(2.12), получим замкнутую разрешающую систему уравнений относительно искомых функций u, v, w, φ, ψ, f. При этом интегральный оператор (3.8) будет входить только в уравнения (2.8), так как согласно (3.8), $h_i^+ + h_i^- = 0$ $(i = 1, 2)$.

Таким образом, задача нелинейных магнитоупругих колебаний тонких пластинок свелась к решению системы двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при обычных условиях закрепления краев пластинки и условиях затухания возмущений на бесконечности $(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to +\infty)$.

ԲԱՐԱԿ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԵՐԻ ՈՉԳԾԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ոչգծային մագնիսաառաձգականության տեսության հիմնական դրույթների և բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածների հիման վրա դուրս են բերված մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ բարակ սալերի ոչգծային մագնիսաառաձգական տատանումների հիմնական հավասարումները և առնչությունները։

THE BASIC EQUATIONS AND RELATIONS OF NONLINEAR MAGNETOELASTIC VIBRATIONS OF THIN ELECTROCONDUCTING PLATES

G. E. BAGDASARIAN, Z. N. DANOYAN

Summary

In the paper, by means of the basic statements of nonlinear magnetoelasticity theory and the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies, the basic equations and relations of nonlinear magnetoelastic vibrations of thin electroconducting plates in a magnetic field are deduced.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.—ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.—ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
4. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
6. *Селезов И. Т., Селезова Л. В.* Волны в магнитогидроупругих средах. Киев: Наукова думка, 1975.
7. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957.
9. *Bazer J. Ericson W. B.* Nonlinear wave motion in magnetoelasticity. — Arch. Ration. Mech. and Anal., 1974, 55. № 2.
10. *Walker J. B., Pipkin A. C., Rivlin R. S.* Maxwell's equations in a deformed body.—Accad. Naz. Lincei. Ser. 8, 1965, 38, № 5.
11. *Thurston R. N.* Waves in solids. In: Handbuch der Ph'sik. Berlin: Springer, 1960, v. VI/a.
12. *Махорт Ф. Г.* О теории деформирования поляризирующихся и намагничивающихся тел.—ПМ, 1980, 16, № 3.
13. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
14. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластинок.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2.
15. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной.—Ученые записки ЕрГУ, 1977, № 2.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
2.IV.1983