

УДК 624.04 : 512.643.2

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ТАНАНАՅԿՕ Օ. Ը.

Наряду с традиционной процедурой МКЭ [1, 2, 3] в расчетах упругих систем широко применяются различные стержневые модели, построению которых посвящены работы А. Хренникова [4], С. Тецкана [5], А. Р. Ржаницына [6], А. П. Филина [7] и др. В настоящей статье рассматривается модель, названная «квазистержневой» и синтезирующая характерные свойства стержневых и конечноэлементных моделей.

1. Имея в виду, для определенности, задачу о плоском напряженном состоянии, запишем функционал потенциальной энергии деформации:

$$U = \iint \left\{ \frac{1}{2} [E^*(u_x^2 + v_y^2) + G(v_x + u_y)^2] + E^* \nu u_x v_y \right\} dx dy$$

где $E^* = E/(1-\nu^2)$.

Применяя правило вычисления двойного интеграла по частям, преобразуем последнее слагаемое:

$$E^* \nu \iint u_x v_y dx dy = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2$$

где

$$I_1 = E^* \nu \int_s \{v_y \cos(n, x) - v_x \cos(n, y)\} u ds + E^* \nu \iint u_y v_x dx dy$$

Формула для I_2 получается из формулы для I_1 подстановками $u \leftrightarrow v$, $x \leftrightarrow y$. Под s понимается контур области, а под n — внешняя нормаль к этому контуру.

Вводя в качестве дополнительной степени свободы угол поворота ω , заменим в выражении для I_1 множитель u_y на $v_x - 2\omega$. Соответственно в выражении для I_2 заменим v_x на $u_y + 2\omega$. Подынтегральный член, выражающий энергию сдвига, запишем в следующей форме:

$$\frac{1}{2} G(v_x + u_y)^2 = G(v_x - \omega)^2 + G(u_y + \omega)^2$$

Составим теперь функционал полной энергии системы при учете дополнительного условия, связывающего угол ω с линейными смещениями

$$\bar{\Phi} = U - \iint (Xu + Yv) dx dy - \int_s (p_x u + p_y v) ds +$$

$$+ \iint \lambda \left(\omega - \frac{1}{2} v_{,x} + \frac{1}{2} u_{,y} \right) dx dy$$

Здесь X, Y — объемные, а p_x, p_y — контурные внешние нагрузки. Выполняя варьирование по ω , находим

$$\lambda = 2G(v_{,x} - u_{,y} - 2\omega) + E^* \nu(v_{,x} - u_{,y})$$

или, с учетом выражения для ω ,

$$\lambda = 2E^* \nu \omega$$

После подстановки найденного значения λ в выражение для Φ , получаем окончательно новый функционал

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Pi$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \iint [E^* u_{,x}^2 + E^* \nu (v_{,x}^2 - 4\omega v_{,x} + 2\omega^2) + 2G(v_{,x} - \omega)^2] dx dy \quad (1)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \iint [E^* v_{,y}^2 + E^* \nu (u_{,y}^2 + 4\omega u_{,y} + 2\omega^2) + 2G(u_{,y} + \omega)^2] dx dy \quad (2)$$

$$\Phi_3 = \frac{E^* \nu}{2} \int [(v_{,y} u - u_{,y} v) \cos(n, x) + (u_{,x} v - v_{,x} u) \cos(n, y)] ds \quad (3)$$

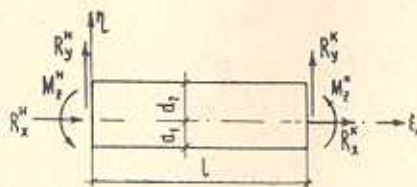
$$\Pi = - \iint (Xu + Yv) dx dy - \int (p_x u + p_y v) ds \quad (4)$$

Легко проверить, что варьирование Φ по ω приводит к обычной зависимости $\omega = (v_{,x} - u_{,y})/2$. С учетом этого равенства варьирование по u и v дает внутри области уравнения Ламе, а на контуре — обычные естественные граничные условия.

2. Для построения дискретной модели разобьем плоскую область на полосы двух направлений; точки пересечения осей полос назовем узлами расчетной схемы, а отрезок полосы между двумя соседними узлами будем рассматривать как одномерный двухузловой элемент («квазистержень»).

Изучим работу отдельного квазистержня, параллельного оси x . Пусть ξ, η — локальные оси этого квазистержня (фиг. 1). В этих осях примем следующую аппроксимацию линейных и угловых смещений:

$$u = u_n + \frac{u_k - u_n}{l} \xi; \quad v = v_n + \frac{v_k - v_n}{l} \xi; \quad \omega = \omega_n + \frac{\omega_k - \omega_n}{l} \xi$$



Фиг. 1

В этой записи l — длина квазистержня (расстояние между его узлами). Индексом „н“ помечены величины, относящиеся к начальному сечению квазистержня, а индексом „к“ — к концевому. В общем случае квазистержень может быть несимметричным относительно оси ξ , как показано на фиг. 1. Вычисляя интеграл (1) в пределах $0 \leq \xi \leq l$, $-d_1 \leq \eta \leq d_2$, получим для одного элемента, параллельного оси x ,

$$\Phi_{19} = \frac{1}{2} \left[\frac{E^* F}{l} (u_k - u_n)^2 + 2\bar{G}F \left(\frac{v_k - v_n}{l} - \frac{\omega_n + \omega_k}{2} \right)^2 l - \frac{E^* \nu F}{l} (v_k - v_n)^2 \right]$$

Здесь введены обозначения $F = (d_1 + d_2)h$, $\bar{G} = G + E^* \nu$.

Дифференцируя Φ_{19} по всем линейным и угловым смещениям торцов, получаем матрицу жесткости квазистержня, параллельного оси x (табл. 1). Естественно, что ту же самую матрицу можно рассматривать и как матрицу жесткости квазистержня, параллельного оси y , записанную в его местных осях.

Для того, чтобы учесть входящее в функционал Φ слагаемое Φ_s , введем в дополнение к квазистержням, параллельным осям x и y , еще и контурные квазистержни, соединяющие между собой последовательно все узлы, лежащие на границе области. Формула (3) преобразуется к виду

$$\Phi_s = \frac{E^* \nu}{2} \int_{\Gamma} (v_{,s} u - u_{,s} v) ds$$

где в подынтегральное выражение входят производные от смещений по дуге граничного контура. Принимая в пределах каждого контурного квазистержня линейную аппроксимацию перемещений, получим для одного такого элемента толщиной h

$$\Phi_{29} = \frac{E^* \nu h}{4} [(v_k - v_n)(u_n + u_k) - (u_k - u_n)(v_n + v_k)]$$

ТАБЛИЦА 1

РЕАКЦИИ	ПЕРЕМЕЩЕНИЯ					
	U_n	V_n	ω_n	U_k	V_k	ω_k
R_x^H	$\frac{E^* F}{l}$			$-\frac{E^* F}{l}$		
R_y^H		$\frac{E^* F}{l}$	$\bar{G}F$	$-\frac{E^* F}{l}$	$\bar{G}F$	
M_z^H		$\bar{G}F$	$\frac{\bar{G}FL}{2}$	$-\bar{G}F$	$\frac{\bar{G}FL}{2}$	
R_x^K	$-\frac{E^* F}{l}$			$\frac{E^* F}{l}$		
R_y^K		$-\frac{E^* F}{l}$	$-\bar{G}F$	$\frac{E^* F}{l}$	$-\bar{G}F$	
M_z^K		$\bar{G}F$	$\frac{\bar{G}FL}{2}$	$-\bar{G}F$	$\frac{\bar{G}FL}{2}$	

ТАБЛИЦА 2

РЕАКЦИИ	ПЕРЕМЕЩЕНИЯ					
	U_n	V_n	ω_n	U_k	V_k	ω_k
R_x^H					$\frac{E^* \nu h}{2}$	
R_y^H				$-\frac{E^* \nu h}{2}$		
M_z^H						
R_x^K		$-\frac{E^* \nu h}{2}$				
R_y^K	$\frac{E^* \nu h}{2}$					
M_z^K						

после чего в результате дифференцирования по узловым смещениям строится матрица жесткости контурного квазистержня, записанная в глобальных осях (табл. 2).

Объемные силы могут быть произвольным образом распределены между квазистержнями двух направлений. Если, например, объемную силу X полностью относить к квазистержням, параллельным оси x , и считать ее в пределах каждого такого квазистержня заданной при помощи линейной функции $X_1 + X_2 z$, то столбец реакций квазистержня примет вид

$$r_x = \left\{ X_1 \frac{Fl}{2} + X_2 \frac{Fl^2}{6}; 0; 0; X_1 \frac{Fl}{2} + X_2 \frac{Fl^2}{3}; 0; 0 \right\}$$

Аналогичным образом столбец r_y грузовых реакций квазистержней, параллельных оси y , зависит от объемной силы Y . Кроме того, в узлах контурных квазистержней действуют реактивные силы

$$r_z = \{r_{z1} r_{z2}\}$$

$$r_{z1} = \left\{ \frac{p_{x1} h l_z}{3} + \frac{p_{x2} h l_z}{6}; \frac{p_{y1} h l_z}{3} + \frac{p_{y2} h l_z}{6}; 0 \right\}$$

$$r_{z2} = \left\{ \frac{p_{x1} h l_z}{6} + \frac{p_{x2} h l_z}{3}; \frac{p_{y1} h l_z}{6} + \frac{p_{y2} h l_z}{3}; 0 \right\}$$

где p_{x1} , p_{y1} и p_{x2} , p_{y2} — значения составляющих контурной нагрузки в начале и в конце квазистержня соответственно, l_z — его длина.

3. От обычной конечноэлементной модели рассматриваемая здесь квазистержневая модель отличается прежде всего тем, что ее топология полностью подобна топологии бездиагональной рамы. Элемент модели — квазистержень — имеет в каждом своем узле три степени свободы (как плоская рама с жесткими узлами), что облегчает сопряжение различным образом ориентированных фрагментов расчетной схемы пространственной тонкостенной конструкции, а также позволяет применять сетки с ячейками, сильно вытянутыми в одном направлении (применение таких ячеек может приводить к значительным погрешностям в «обычном» МКЭ).

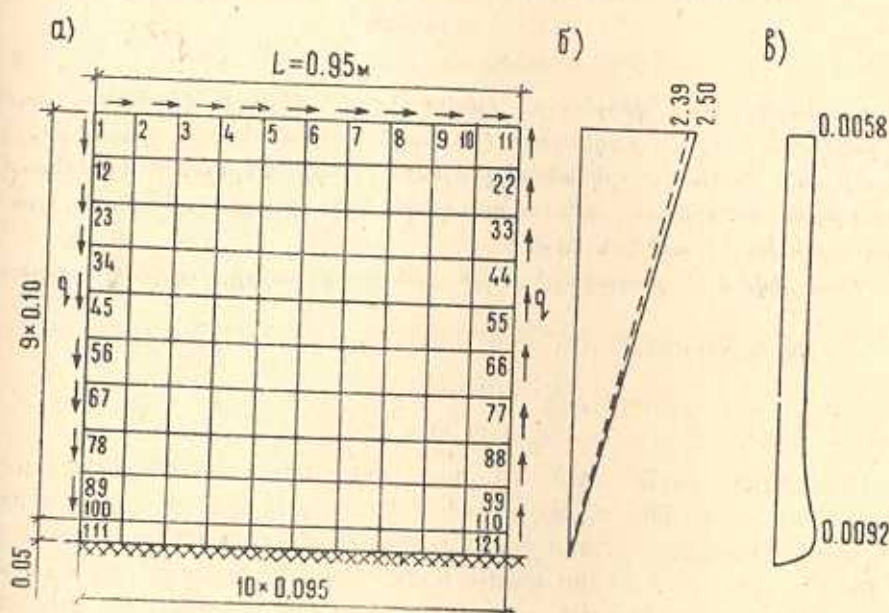
На примере решения задачи о простом сдвиге квадратной пластинки (фиг. 2а) рассмотрим способность предлагаемой модели имитировать сдвиговую деформацию в плоской области. Осями квазистержней пластинка разбита на 100 (10×10) ячеек, причем оси крайних (верхнего горизонтального и двух вертикальных) квазистержней совпадают с незакрепленными кромками пластины, вдоль которых приложена распределенная тангенциальная нагрузка интенсивностью $q = 10$ кПа. Коэффициент Пуассона материала пластинки принят равным $\nu = 0,25$, толщина пластинки — 1 м.

Для сопоставления точных и получаемых при машинном счете значений горизонтальных и вертикальных перемещений использованы безразмерные параметры

$$\bar{u} = Eu/qL, \quad \bar{v} = Ev/qL$$

В точном решении

$$\bar{u} = 2,5y/L, \quad \bar{v} \approx 0$$



Фиг. 2

На фиг. 2б приводится график изменения по высоте параметра \bar{u} в точном (сплошная линия) и приближенном (штриховая) решениях. Горизонтальные перемещения всех узлов, лежащих в одном уровне, практически совпадают. В расчете получены незначительные кососимметричные относительно оси y вертикальные перемещения. На фиг. 2в дается график изменения параметра \bar{v} , построенный по данным расчета для вертикали 11—121.

Касательные напряжения оказались с хорошей точностью (отклонение менее 1%) равными нагрузке q . Незначительные нормальные напряжения, являющиеся следствием действия в квазистержнях нормальных сил, не искажают общего, типично сдвигового, характера напряженного состояния.

Практически к тем же результатам привело решение этой задачи при использовании более грубой сетки (5×5). Этого и следовало ожидать, учитывая однородность полей напряжений и деформаций в точном решении.

В качестве других примеров можно привести расчет изгибаемой полосы с применением сильно вытянутых (при отношении длин сторон 1:5 и даже 1:10) ячеек сетки, расчеты балок-стенок при различных граничных условиях, а также расчет полосы с большим прямоугольным вырезом на растяжение. В последнем случае коэффициент концентрации напряжений в окрестности прямого (входящего) угла практически совпал с полученным для этой задачи по МКЭ [8].

Описанный способ расщепления двумерного энергетического функционала на сумму одномерных может быть обобщен на решение задач расчета пластин и оболочек.

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԻ ՎԱՐԻԱՆՏԻ ՄԱՍԻՆ

Օ. Գ. ՏԱՆԱՆԱՅԿՈ

Ա մ փ ո փ ու մ

Առաջարկվում է վերջավոր էլեմենտների մեթոդի վարիանտ, որտեղ հաշվարկային մոդելը բաղկացած է եզրային էլեմենտները լրացնող երկու ուղղությամբ համասեռ երկհանգույց էլեմենտներից: Բերվում է էլեմենտների կոշտության մատրիցան, որն օգտագործվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման համար:

Դիտարկվում է քառակուսի սալի հասարակ սահքի հաշվարկի օրինակ:

ON A VARIANT OF THE FINITE ELEMENT METHOD

O. D. TANANAYKO

S u m m a r y

The article deals with a „quasi-rod model“ of two-dimensional elastic continuum. The model includes quasi-rods parallel with two axes of Cartesian coordinated and contour quasi-rods connecting joints lying on the boundary-line of the elastic body. Rigidity matrices of quasi-rod finite elements are received. A simple example of using the proposed model concludes the article.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974.
2. *Постнов В. А., Хархурим И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974.
3. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977.
4. *Hrennikoff A.* Solution of problems of elasticity by the framework method.—J. of Appl. Mech., ASCE, 1941, v. 63.
5. *Хренников А., Тецкан С.* Расчет цилиндрических оболочек методом конечных элементов.—В кн.: Симпозиум IASS по проблемам взаимосвязи проектирования и возведения оболочек для производственных и общественных зданий с большими пролетами. Л.: Стройиздат, 1966.
6. *Ржаницын А. Р.* Представление сплошного изотропного упругого тела в виде шарпирно-стержневой системы. В сб.: Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности. М.: Госстройиздат, 1956.
7. *Филин А. П.* Расчет пространственных стержневых конструкций типа системы перекрестных связей и его применение к оболочкам при использовании электронных вычислительных машин.—Тр. Ленингр. ин-та инженеров жел.-дор. транспорта, 1962, вып. 190.
8. *Клаф Р. У.* Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости. В сб.: Расчет строительных конструкций с применением электронных машин. М.: Стройиздат, 1967.

Ленинградский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию
20.VIII.1982