

УДК 532.5

## СООТНОШЕНИЯ НА РАЗРЫВАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА КРОМКАХ ЛОПАСТНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТУРБОМАШИНАХ

КЛИМОВИЧ В. И., ФЕДОРОВ А. В.

При течении жидкости в турбомашинах вблизи входа потока в лопаточный аппарат могут возникать большие градиенты скоростей, которые естественно моделировать в рамках осесимметричного приближения скачкообразными изменениями скоростей на поверхности, разделяющей лопаточные и безлопаточные области проточного тракта. Вопрос об условиях на кромках лопаток в осесимметричной постановке рассматривался в ряде работ, из которых отметим [1—7]. В [1] получены условия, связывающие скачки скорости на границе раздела  $\Sigma$  в случае несжимаемой жидкости. В работах [2, 4, 6] указанные выше условия для скачков скорости получены в более общем случае течения газа. Для учета реальных свойств течения вблизи лопаточных кромок в [2, 4, 6] было предложено выражение для скачка полного давления; в случае несжимаемой жидкости скачок энергии определяется кинетической энергией „потерянной“ скорости с учетом коэффициента  $\kappa$  смягчения на удар:  $[E]_{\pm} = \kappa([\omega]_{\pm})^2/2$ . В [3, 7] с помощью вариационного принципа Гамильтона выведены соотношения, выражающие баланс импульса и энергии сжимаемой жидкости на  $\Sigma$ , а также произведен анализ структуры сил, действующих на жидкую частицу на  $\Sigma$ . При этом установлено, что в предположении об ортогональности силы, действующей на жидкую частицу на  $\Sigma$ , к поверхности лопатки разрыв энергии для несжимаемой жидкости равен  $[E]_{\pm} = ([\omega]_{\pm})^2/2$ . В [5] при том же предположении показано, что в случае течения газа имеются два решения для скачков газодинамических величин на  $\Sigma$ ; в случае малых отклонений свободного потока от касательной к лопатке плоскости с помощью второго начала термодинамики найдены границы применимости каждого из полученных решений. В [2, 4, 6, 7] представлены результаты расчетов осесимметричного течения несжимаемой жидкости с использованием соотношений для разрывов скорости и энергии.

В настоящей работе показано, что при определенных значениях параметров потока и геометрии лопаток имеет место «запирание» входного сечения в лопаточный аппарат; при этом компонента скорости на  $\Sigma$ , ортогональная кромке, со стороны области, занятой лопатками, достигает местной скорости звука. Установлена аналогия между рассматриваемой задачей и задачей об обтекании плоской решетки тонких пластин.

тин потоком газа, направление которого отличается от направления пластин [8]. Приведены расчеты коэффициента потерь полного давления и границ областей допустимых углов атаки на  $\Sigma$  в зависимости от числа Маха набегающего потока при различных значениях углов тангенциального наклона лопаток.

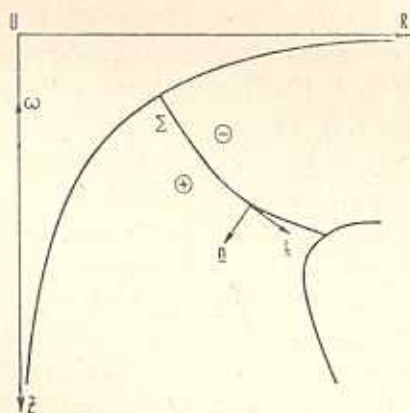
Рассмотрим установившееся течение идеального газа в турбомашине. Законы сохранения массы, импульса и полной энтальпии в относительном движении частицы газа на границе раздела  $\Sigma$  лопаточной и безлопаточной областей (фиг. 1) могут быть представлены в виде

$$[\tau \rho c_n]_-^+ = 0 \quad (1)$$

$$[\tau \rho n + \tau \rho c_n c]_-^+ = f \quad (2)$$

$$\left[ \frac{1}{2} c^2 + \frac{R}{k-1} \frac{p}{\rho} - \omega r c_u \right]_-^+ = 0 \quad (3)$$

Здесь  $c = c_n n + c_l l + c_u i_\varphi$  — вектор абсолютной скорости течения,  $n$  и  $l$  — нормаль и касательная к  $\Sigma$ ,  $i_\varphi$  — орт окружного направления,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $k = c_p/c_v$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения лопаток,  $\tau$  — коэффициент стеснения потока лопатками. Вектор  $f$  имеет смысл поверхностной силы, обусловленной импульсивным воздействием лопаток на частицу газа на  $\Sigma$ . Наличие  $f$  в (2) объясняется тем, что



Фиг. 1. Меридиональная проекция проточного тракта турбомашин

сила  $F$  воздействия лопаток на газ, равная  $F = \nabla \chi dRc_u/dt$  для внутренних точек лопаточной области [8], имеет  $\delta$ -образную особенность на  $\Sigma$  вследствие разрывного поведения момента окружной скорости  $Rc_u$  [1-7] ( $\chi = \varphi - \Phi(R, z) = 0$  — уравнение лопатки, вектор  $\nabla \chi$  направлен по нормали к лопатке). Условие непротекания газа через поверхность лопатки на  $\Sigma$  имеет вид

$$\omega_z \cdot \nabla \chi = 0 \quad (4)$$

где  $w = c - \omega R i_z$ , индекс (+) соответствует лопаточной области (фиг. 1). Если состояние газа со стороны (—) известно, а функции  $\Phi(R, z)$  и  $\tau(R, z)$  заданы, то система (1)–(4) состоит из шести скалярных уравнений относительно неизвестных  $c_+$ ,  $p_+$ ,  $\rho_+$ ,  $f$ . Для замыкания этой системы необходимо сделать дополнительные, оправданные физические предположения относительно силы  $f$ . В [5] для случая бесконечно тонких лопаток ( $\tau=1$ ) в качестве такого предположения было принято, что сила  $f$  ортогональна поверхности лопатки

$$f = \lambda(R, z) \nabla \chi \quad (5)$$

Соотношение (5) замыкает систему (1)–(4) относительно неизвестных  $c_+$ ,  $p_+$ ,  $\rho_+$ ,  $\lambda$ . Проектурия (2) на направление  $\nabla \chi \times n$ , с учетом (1), (5) получим  $[c]_-^+ \cdot (\nabla \chi \times n) = 0$ , или после преобразований

$$[c]_-^+ + R \frac{\partial \Phi}{\partial t} [c_u]_-^+ = 0 \quad (6)$$

Соотношение (6) справедливо при любых  $\tau$  как в случае сжимаемой, так и несжимаемой жидкости. В дальнейшем рассматривается случай  $\tau=1$ . Исключая из (1)–(5) величины  $\lambda$ ,  $[c_n]_-^+$ ,  $[c]_-^+$ ,  $[\rho]_-^+$ ,  $[c_u]_-^+$ , приходим к квадратному уравнению относительно скачка  $[v]_-^+$  ( $v=1/\rho$ )

$$A_1 ([v]_-^+)^2 + A_2 [v]_-^+ + A_3 = 0 \quad (7)$$

$$A_1 = (k+1) R^2 |\nabla \chi|^2$$

$$A_2 = 2v_- \left( R |\nabla \chi|^2 - m M_{n-}^{-2} + k R \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varepsilon \right)$$

$$A_3 = \varepsilon v_-^2 \left[ 2R \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \varepsilon(k-1) \right]$$

$$M_{n-}^2 = c_{n-}^2 / (k p_- v_-), \quad m = 1 + R^2 (\partial \Phi / \partial t)^2, \quad \varepsilon = -R c_{n-}^{-1} \omega_- \cdot \nabla \chi$$

Величина  $\varepsilon$  характеризует отклонение свободного потока (вектора  $\omega_-$ ) от касательной к поверхности лопатки плоскости; отметим, что произвольный поворот вектора  $\omega_-$  в упомянутой плоскости не изменяет  $\varepsilon$ . Уравнение (7) имеет вещественные решения для  $[v]_-^+$ , если  $D = A_2^2 - 4A_1 A_3 > 0$ . Если геометрия лопаток задана, то при любом фиксированном  $\varepsilon$  имеем  $D > 0$  для достаточно малых  $M_{n-}$ ; если же величина  $M_{n-}$  фиксирована и  $M_{n-}^2 \neq m/R^2 |\nabla \chi|^2$ , то неравенство  $D > 0$  справедливо при достаточно малых значениях  $|\varepsilon|$ . Если увеличивать  $M_{n-}$  при  $\varepsilon = \text{fixed}$ , то, вообще говоря, при некотором критическом значении  $M_{n-}^{sp}$  достигается равенство  $D=0$  и дальнейшее увеличение  $M_{n-}$  невозможно, поскольку решения (7) становятся комплексными. Аналогичное положение имеет место, если увеличивать  $|\varepsilon|$  при  $M_{n-} = \text{fixed}$ . Выясним, какому режиму течения соответствует обращение в нуль величины  $D$ . С этой целью введем в рассмотрение три орто-

гональных единичных вектора на  $\Sigma$ :  $b_1 = \nabla \chi / |\nabla \chi|$ ,  $b_2 = m^{-1/2} (1 + i \tau R \partial \Phi / \partial l)$ ,  $b_3 = b_1 \times b_2$ . Направление  $b_1$  совпадает с нормалью к лопатке, вектор  $b_2$  лежит в касательной к лопатке плоскости и ортогонален к кромке лопатки на  $\Sigma$ . Имеем  $w_+ = w_{2+} b_2 + w_{3+} b_3$ , поскольку  $w_+ \cdot b_1 = 0$  (см. (4)). Отметим, что скорость  $w_2 = w \cdot b_2$  в силу (6) непрерывна на  $\Sigma$  ( $w_{2+} = w_{2-}$ ).

Рассмотрим сначала частный случай  $w_2 = c_l + R w_a \partial \Phi / \partial l = 0$ . В этом случае можно провести аналогию между рассматриваемой задачей и задачей об обтекании плоской решетки тонких пластин потоком газа, направление которого отличается от направления пластин [8] (стр. 237). Действительно, спроектируем (2) на направление  $b_3$ , совпадающее в данном частном случае ( $w_2 = 0$ ) с направлением скорости  $w_+$ :

$$[p]_+^+ n \cdot b_3 + \rho c_n [w]_+^+ \cdot b_3 = 0 \quad (8)$$

Соотношения (1), (3), (8) совпадают по форме с уравнениями, описывающими обтекание решетки тонких пластин идеальным газом ([8], стр. 233, формулы (32.2) — (32.4)), если в (1), (3), (8) формально заменить параметры течения газа со стороны (-) и (+) параметрами потока соответственно до и после входа в решетку. Указанное совпадение не удивительно, так как обе системы равенств выражают законы сохранения массы, энергии и количества движения в проекции на направление  $b_3$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при  $w_2 = 0$  равенство  $D = 0$  эквивалентно соотношению  $M_{w_+}^2 = |w_+|^2 / k p_+ v_+ = 1$ , то есть на входе в лопаточную область (сторона (+)) параметры газа становятся критическими. Равенство  $M_{w_+} = 1$  в случае обтекания газом решетки тонких пластин [8], как известно, соответствует режиму запираания решетки. Приведенные соображения дают основание считать, что в рассматриваемом случае осесимметричного течения газа при  $w_2 = 0$  соотношение  $M_{w_+} = 1$  ( $D = 0$ ) соответствует режиму запираания входного сечения в лопаточную область.

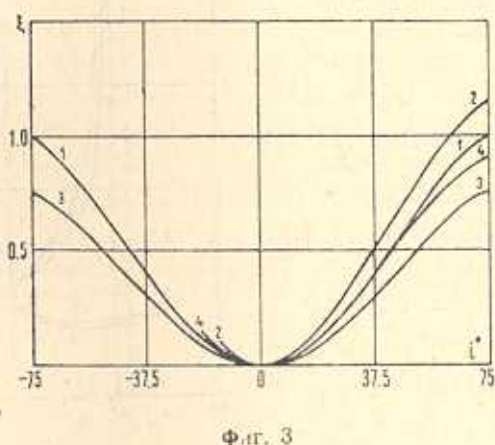
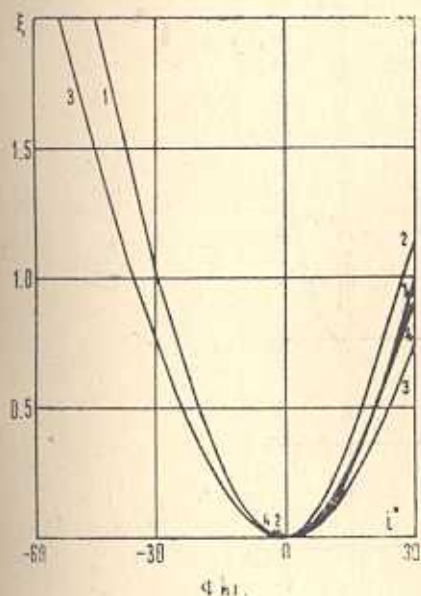
В общем случае ( $w_2 \neq 0$ ) равенство  $D = 0$ , как можно показать с помощью (1) — (5), (7), эквивалентно следующему ( $a_{\pm}^2 = k p_{\pm} v_{\pm}$ ):

$$M_{w_+}^2 = 1 + m^{-1} a_+^{-2} \left[ c_{l+} + R \frac{\partial \Phi}{\partial l} w_{a+} \right]^2 \quad (9)$$

С учетом введенных выше обозначений равенство (9) принимает вид  $M_{w_3}^2 = w_{3+}^2 / a_+^2 = M_{w_+}^2 - M_{w_2}^2 = 1$ , где  $M_{w_2}^2 = w_2^2 / a_+^2$ . Таким образом, в общем случае равенство  $D = 0$  соответствует тому, что скорость  $w_{3+} = w_+ \cdot b_3$  в направлении  $b_3$  совпадает с местной скоростью звука  $a_+$ . Можно показать, что аналогичный результат справедлив для упоминавшейся выше задачи об обтекании решетки тонких пластин [8], если на рассматриваемое плоское течение наложить поток, имеющий постоянную и ортогональную плоскости решетки скорость ( $w_2$ );

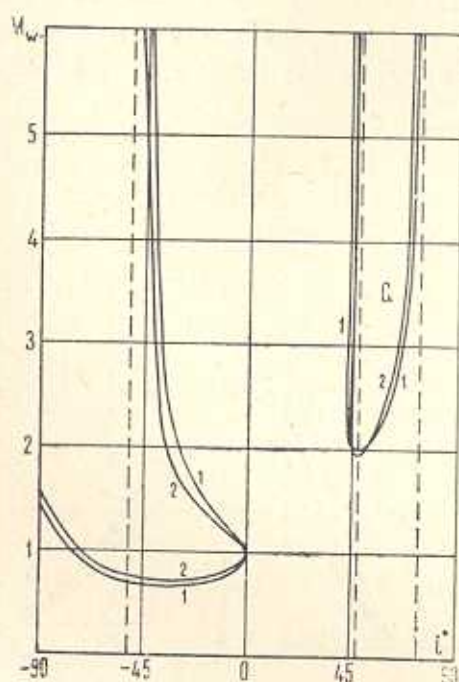
в этом случае равенство  $D=0$  отвечает тому, что между пластинами компонента скорости, лежащая в плоскости решетки, достигает скорости звука (независимо от величины  $\omega_2$ ).

На фиг. 2-3 представлены результаты расчетов коэффициента потерь полного давления  $\zeta = (p_-^* - p_+^*) / (\rho_- \omega_-^2 / 2)$  в зависимости от угла атаки  $i$  для случая  $k=1,4$ ,  $\gamma_- = 0$  (линии тока свободного потока ортогональны кромкам,  $\text{tg} \gamma = c_{12} / c_n$ ); при этом рассматривалось решение



системы (1)–(5), отвечающее условию  $\zeta = 0$  при  $i = 0$ . Угол атаки  $i$  определялся соотношением  $\text{ctg}(\beta - i) = -\omega_{u-} / c_{n-}$  и связан с введенным ранее параметром  $\varepsilon$  равенством  $\varepsilon = \text{ctg}(\beta - i) - \text{ctg} \beta + \text{tg} \gamma_- \text{tg} \delta$ , где  $\text{tg} \delta = R \partial \Phi / \partial l$ ,  $\delta$  – угол тангенциального наклона лопаток,  $\text{ctg} \beta = -R \partial \Phi / \partial n$ ,  $\beta$  – угол наклона лопатки. Кривые на фиг. 2 соответствуют  $\beta = 30^\circ$ , фиг. 3 –  $\beta = 75^\circ$ . Кривые 1, 2 на фиг. 2, 3 получены при  $\delta = 0$ , кривые 3, 4 – при  $\delta = 30^\circ$  при различных числах Маха  $M_{\omega_-}$  ( $M_{\omega_-}^2 = \omega_-^2 / a^2$ ); кривые 1, 3 соответствуют значению  $M_{\omega_-} = 0,1$ , кривые 2, 4 –  $M_{\omega_-} = 0,75$ . Как видно из фиг. 2, 3, при увеличении угла  $\delta$  и фиксированных  $M_{\omega_-}$ ,  $i$ ,  $\beta$  коэффициент  $\zeta$  уменьшается. Указанная закономерность может быть строго обоснована, например, при достаточно больших значениях  $m = 1 + \text{tg}^2 \delta$ , то есть при углах  $\delta$ , близких к  $\pi/2$ . В этом случае на основании равенств (1)–(5) можно показать, что скачки газодинамических величин и, следовательно, коэффициент  $\zeta$  стремятся к нулю при фиксированных  $M_{\omega_-}$ ,  $i$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_- = 0$  и  $\delta \rightarrow \pi/2$ . Как видно из фиг. 2, 3, с увеличением  $M_{\omega_-}$  и фиксированных  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $i$  коэффициент потерь  $\zeta$  увеличивается. На фиг. 4 для случая  $\beta = 75^\circ$  в плоскости параметров  $M_{\omega_-}$ ,  $i$  представлены границы областей, в которых дискриминант  $D$  уравнения (7) неотрицателен ( $D \geq 0$ ). Кривые 1 на фиг. 4 получены при  $\delta = 0$ , а кривые 2 – при  $\delta = 30^\circ$ . Области G

на фиг. 4 соответствуют неравенству  $D < 0$ . Пунктирными линиями показаны асимптоты границ рассматриваемых областей. Отметим, что кривые на фиг. 2–4 не изменяются при одновременной замене  $\beta$  на  $\pi - \beta$ , а  $i$  — на  $(-i)$ ; а также при замене  $\delta$  на  $(-\delta)$ .



Фиг. 4

В случае несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) предположение (5) совместно с соотношениями (1), (2), (4) в случае  $\tau = 1$  приводит к формуле для местных потерь напора  $[H]_z^+ = ([w]_z^+)^2 / 2g$ , которая аналогична формуле Борда–Карно для потерь напора при внезапном расширении канала. Отметим, что в случае несжимаемой жидкости при увеличении угла тангенциального наклона  $\delta$  и фиксированных  $\beta$ ,  $i$ ,  $w_z$ ,  $\gamma_z = 0$  коэффициент  $\zeta$  уменьшается, как это непосредственно следует из формулы

$$\zeta = \frac{g[H]_z^+}{\frac{1}{2} w_z^2} = \frac{\varepsilon^2}{m [1 + \text{ctg}^2(\beta + i)]}$$

являющейся точным следствием соотношений (1), (2), (4), (5).

В заключение отметим, что выражения для коэффициента потерь  $\zeta$ , вычисляемые в соответствии с (1)–(5), в случае сжимаемой и несжимаемой жидкости получены в предположении  $\tau = 1$ , то есть для бесконечно тонких лопаток. Для учета телесности лопаток следует ввести в выражение для  $\zeta$  коэффициент смягчения удара  $\kappa$  [8, 2], то есть считать, что  $\zeta = \kappa [p^*]_z^- / (\rho w_z^2 / 2)$ , где  $[p^*]_z^-$  вычисляется на осно-

вании (1)—(5). В случае несжимаемой жидкости коэффициент  $\kappa$  вводится в выражение для потерь напора аналогично. Значение  $\kappa$  задается на основании данных экспериментальных исследований.

ՏՈՒՐԲՈՄԵՔԵՆԱՆԵՐՈՒՄ ՀԵՂՈՒԿԻ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՀՈՍՔԻ ԳԵՊՔՈՒՄ  
ԹԵՎԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԵԶՐԵՐԻ ՎՐԱ ԱՌԱՋԱՑԱԾ  
ԽՉՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՐԱՐԵՐԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Վ. Ի. ԿԼԻՄՈՎԻՉ, Ա. Վ. ՖԵԴՈՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Համիլտոնի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ դուրս է բերված թևի մատնելության հաշվառումով թևերի համակարգի եզրերի վրա հեղուկի էներգիայի և իմպուլսի բալանսը արտահայտող պայմանների համակարգեր: Բաժանման եզրի վրա զանգվածի պահպանման օրենքի լրացումով ստացված համակարգը հանդիսանում է փակ ոչսեղմելի և ոչ փակ սեղմելի հեղուկի (գազի) համար: Կատարված է ստացված կապակցությունների հետազոտություն:

Հաստատված է, որ կա երկու լուծում բաժանման եզրի վրա զազոդինամիկ մեծությունների թուիչի համար:

CONDITIONS ACROSS THE DISCONTINUITIES AT THE BOUNDARIES  
OF BLADED ZONES WITHIN THE AXISYMMETRIC FLOW IN  
TURBOMACHINES

V. I. KLIMOVICH, A. V. FEDOROV

S u m m a r y

With the aid of Hamilton's variational principle conditions are derived expressing the balance of impulse and energy of a fluid across the boundaries dividing free and bladed zones of the flow tract in the framework of the axisymmetric flow model. This scheme complemented with the mass conservation law across the boundary is closed for incompressible fluid and unclosed for the compressible one. For the latter case the lacking condition is provided by the hypothesis of orthogonality of the force acting upon the liquid particle to the surface of the blade. The relationships so obtained are examined in detail. It has been shown that there arise two solutions for the jumps of the hydrodynamical quantities across the boundary. For small values of declination of the free flow from a tangent to the blade, the domains of applicability of each solution are found with the aid of the second law of thermodynamics. For incompressible fluid, the hypothesis of absence of the tangential component of the force is brought to the conclusion that the losses of energy are equal to the kinetic energy of „lost“ velocities.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Танский А. М. Решение осесимметричной задачи о вихревом течении жидкости в турбомашиннах, имеющем разрывы на кромках лопастей. В сб. «Гидравлические машины», Харьков, ХПИ, 1971, вып. 5.
2. Сироткин Я. А., Степанов Г. Ю. Осесимметричное вихревое течение невязкой жидкости в турбомашиннах. Аннотации докладов IV Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике, Киев, 1976.
3. Климович В. И., Лурье К. А., Федоров А. В. К вопросу об условиях на поверхностях раздела областей различных типов в проточной части турбомашин. Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, Ленинград, 1979, № 638.
4. Сироткин Я. А. Вариационно-разностный метод решения задачи осесимметричного вихревого течения в турбомашиннах с неоднородными условиями склейки на кромках. Аннотации докладов V Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата, 1981.
5. Климович В. И., Федоров А. В. О граничных условиях на кромках лопастных систем турбомашин. Письма в Журнал технической физики, 1981, т. 7, вып. 19, с. 1188—1191.
6. Сироткин Я. А., Степанов Г. Ю. Устабилившееся осесимметричное вихревое течение невязкой жидкости в многоступенчатых турбомашиннах.—Изв. АН СССР, МЖТ, 1981, № 6, с. 3—15.
7. Lurie K. A., Fedorov A. V., Klimovich V. I. Conditions along the boundaries of bladed zones within the flow tracts of turbines.—Intern. Journ. for numerical methods in fluids, 1982, vol. 2, p. 299—311.
8. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.

Физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

Поступила в редакцию  
23.VII.1981