

УДК 539.374

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИ
 АНИЗОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

АКОПЯН А. Г.

Рассматривается предельное состояние анизотропной, идеальной жестко-пластической, несжимаемой, длинной конической трубы при различных внешних воздействиях. Принимается, что материал трубы подчиняется соотношениям жестко-пластического тела Мизеса—Хилла [6] и главные оси анизотропии совпадают с осями сферической системы координат, центр которой помещен в вершине конической трубы.

Плоская задача пластически анизотропных тел изучалась сравнительно много. В работах [1, 2] получены основные уравнения плоской деформации пластически анизотропных тел. Частные решения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности цилиндрически анизотропного материала получены в работе [3]. Осесимметричное радиальное течение анизотропной массы в коническом канале исследовано в работе [4]. Предельное состояние изотропной конической трубы при равномерных внутреннем и внешнем давлениях изучено в [1]. Вопросы пластического течения изотропной конической трубы под влиянием различных внутренних и внешних воздействий исследованы в работе [5].

§ 1. Общие уравнения задачи

В случае осесимметричного течения дифференциальные уравнения равновесия в сферической системе координат в обычных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Зависимости между компонентами тензора скоростей деформации, скоростей перемещения и напряжений—

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \Omega [H_\theta(\sigma_r - \sigma_\theta) + G_\theta(\sigma_r - \sigma_\varphi)]$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \Omega [F_0(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) + H_0(\sigma_\theta - \sigma_r)] \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = \Omega [G_0(\sigma_\varphi - \sigma_r) + F_0(\sigma_\varphi - \sigma_\theta)] \\
2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} = \Omega N_0 \tau_{r\theta} \\
2\gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} = \Omega M_0 \tau_{r\varphi} \\
2\gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta = \Omega L_0 \tau_{\theta\varphi}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Условие текучести Мизеса-Хилла—

$$F_0(\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + G_0(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + H_0(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + L_0 \tau_{\theta\varphi}^2 + M_0 \tau_{r\varphi}^2 + N_0 \tau_{r\theta}^2 = 1 \tag{1.3}$$

Компоненты напряжений удобно представить в виде

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{1}{\Omega} (F\varepsilon_r - G\varepsilon_\theta) \tag{1.4}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta - \frac{1}{\Omega} [H\varepsilon_r + (G + H)\varepsilon_\theta]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2}{\Omega} N\gamma_{r\theta}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{2}{\Omega} M\gamma_{r\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{2}{\Omega} L\gamma_{\theta\varphi}$$

$$\Omega = \sqrt{(F+H)\varepsilon_r^2 + 2H\varepsilon_r\varepsilon_\theta + (G+H)\varepsilon_\theta^2 + 4L\gamma_{\theta\varphi}^2 + 4M\gamma_{r\varphi}^2 + 4N\gamma_{r\theta}^2}$$

где

$$\begin{aligned}
F &= \frac{F_0}{\Delta}, \quad G = \frac{G_0}{\Delta}, \quad H = \frac{H_0}{\Delta}, \quad L = \frac{1}{L_0}, \quad M = \frac{1}{M_0}, \quad N = \frac{1}{N_0} \\
\Delta &= F_0G_0 + G_0H_0 + H_0F_0
\end{aligned}$$

Скорости перемещений и компоненты напряжений можно выразить через неизвестные функции $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{1}{\omega} \{ [G + \lambda(G+F)]f' + (\lambda F - G)f \operatorname{ctg} \theta \}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta + \frac{1}{\omega} \{ [(1+\lambda)G + H]f' - [(1+\lambda)H + G]f \operatorname{ctg} \theta \}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{N}{\omega} \left\{ f'' + \operatorname{ctg} \theta f' + \left[(2+\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] f \right\}$$

$$\tau_{r\varphi} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)M \frac{\psi \sin \theta}{\omega}, \quad \tau_{\theta\varphi} = (\lambda + 2)L \frac{\psi' \sin \theta}{\omega} \tag{1.5}$$

$$\omega = \left\{ \lambda^2(F+H)(f' + f \operatorname{ctg} \theta)^2 + 2\lambda H(f' + f \operatorname{ctg} \theta) [f \operatorname{ctg} \theta - (\lambda+1)f'] + \right. \\ \left. + (G+H) [f \operatorname{ctg} \theta - (\lambda+1)f']^2 + N \left\{ f'' + \operatorname{ctg} \theta f' + \left[(2+\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] f \right\}^2 + (\lambda+2)^2 \sin^2 \theta [(\lambda-1)^2 M \psi^2 + L \psi'^2] \right\}^{1/2} \\ u = r^\lambda (f' + f \operatorname{ctg} \theta), \quad v = -(\lambda+2)r^\lambda f, \quad w = (\lambda+2)r^\lambda \psi \sin \theta \\ \lambda = \text{const} \quad (1.6)$$

Из уравнений равновесия (1.1) и соотношения (1.5) получим выражение

$$\sigma_\theta = -C + D \ln r - 3 \int \tau_{\theta\theta} d\theta + \int \{ [(1+\lambda)G + H]f' - \\ - [(1+\lambda)H + G]f \operatorname{ctg} \theta \} \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{\omega} \quad (1.7)$$

и систему из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$

$$\frac{1}{\omega} \{ [\lambda(2F+G) + G - H]f' \sin \theta + [\lambda(2F+H) + H - G]f \cos \theta \} + \\ + N \left(\frac{\sin \theta}{\omega} \left\{ f'' + \operatorname{ctg} \theta f' + \left[(2+\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] f \right\} \right)' + D \sin \theta = 0 \quad (1.8) \\ L \left(\frac{\sin^3 \theta}{\omega} \psi' \right)' + 3(\lambda-1)M \frac{\sin^3 \theta}{\omega} \psi = 0$$

где C и D — произвольные постоянные.

Характером течения материала определяются краевые условия для системы уравнений (1.8).

При $\lambda = -2$, $\psi(\theta) = 0$ имеем случай радиального течения, рассмотренный в работе [4].

§ 2. Кручение анизотропной конической трубы распределенными кольцевыми касательными силами, действующими на боковых поверхностях

Пусть на внутренней и на внешней боковых поверхностях длиной ортотропной конической трубы, соответственно, приложены кольцевые касательные распределенные нагрузки (фиг. 1).

$$\tau_{\theta\varphi} = q_1 \quad \text{при } \theta = \alpha; \quad \tau_{\theta\varphi} = q_2 \quad \text{при } \theta = \beta \quad (2.1)$$

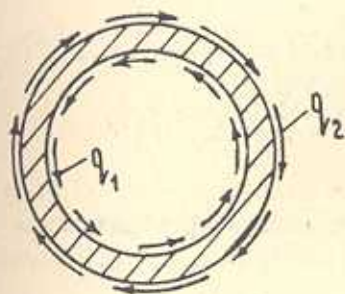
При подстановке в (1.6)–(1.8) $f(\theta) = 0$, $D = C = 0$ получается

$$u = v = 0, \quad w = (\lambda+2)r^\lambda \psi \sin \theta, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{r\theta} = 0$$

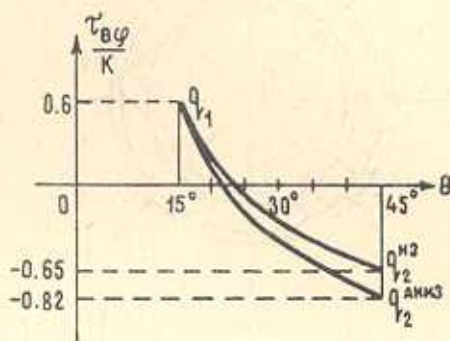
Второе уравнение (1.8) после преобразования, если опускать индексы при $\tau_{\theta\varphi}$, можно написать в виде

$$\tau' + 2\text{ctg}\theta\tau + 3\sqrt{\frac{M}{L}}\sqrt{L-\tau^2} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) при граничных условиях (2.1) определяет предельное напряженное состояние ортотропной конической трубы. Численное решение (2.2) получено для случая, когда $q_1 = 0,6k$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $M = 2k^2$, $L = k^2$ и для изотропного материала ($M = L = k^2$) k — пластическая постоянная. Приведены графики для обоих случаев (фиг. 2). Как видно из графиков, значение q_2 анизотропного тела увеличивается на 26 %.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для значения ω получим

$$\omega = (\lambda + 2) \sin\theta \sqrt{(\lambda - 1)^2 M \psi^2 + L \psi'^2}$$

Подставляя это в соотношения (1.5) для $\tau_{\theta\psi}$, опуская индексы, получим

$$\tau = \frac{L \psi'}{\sqrt{(\lambda - 1)^2 M \psi^2 + L \psi'^2}}$$

Откуда находим

$$\psi(\theta) = A \exp \left[(\lambda - 1) \sqrt{\frac{M}{L}} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau}{\sqrt{L - \tau^2}} d\theta \right]$$

где A — произвольная постоянная, которая определяется из условия закрепления.

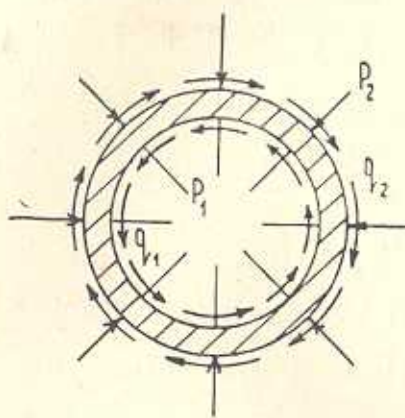
§ 3. Анизотропная коническая труба под совместным воздействием нормальных и кольцевых касательных сил

Положим, что на внутренней и на внешней боковых поверхностях длинной конической трубы из ортотропного материала действуют, соответственно, нормальные давления и кольцевые касательные распределенные силы (фиг. 3).

$$\sigma_{\theta} = -\rho_1, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_1 \quad \text{при } \theta = \alpha; \quad \sigma_{\theta} = -\rho_2, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_2 \quad \text{при } \theta = \beta \quad (3.1)$$

В соотношениях (1.6)–(1.8) подставляем $\lambda = 1$, $D = 0$. Из второго уравнения (1.8) и граничного условия при $\theta = \alpha$ следует

$$\tau_{\theta\varphi} = q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} \quad (3.2)$$



Фиг. 3

К первому уравнению (1.8) присоединяем значение $\tau_{\theta\varphi}$ из (1.5), опуская при нем индексы

$$\begin{aligned} (\tau \sin \theta)' + \frac{1}{\omega} \{ [2(G+F) - H] f' \sin \theta + \\ + [2(H+F) - G] f \cos \theta \} = 0 \quad (3.3) \\ \tau = \frac{N}{\omega} (f' + f \operatorname{ctg} \theta)' \end{aligned}$$

Для значения ω из (1.5), делая некоторые преобразования с учетом значений $\tau_{\theta\varphi}$ и $\tau_{\theta z}$, получим

$$\omega = TQ \quad (3.4)$$

где

$$T = \frac{\sqrt{NL}}{\sqrt{NL - N\tau_{\theta z}^2 - L\tau_{\theta\varphi}^2}}$$

$$Q = \sqrt{(F+H+4G)f'^2 + 2(F-2H-2G)f'f \operatorname{ctg} \theta + (F+G+4H)f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}$$

Подставляя (3.4) в систему уравнений (3.3), находим

$$(\tau \sin \theta)' + \frac{1}{TQ} \{ [2(G+F) - H] f' \sin \theta + [2(H+F) - G] f \cos \theta \} = 0 \quad (3.5)$$

$$f'' + \operatorname{ctg} \theta f' - \frac{1}{\sin^2 \theta} f - \frac{\tau}{N} TQ = 0$$

Вводя новую функцию $\varphi = f'/f$, можно снизить на единицу порядок второго уравнения (3.5) и привести его к виду

$$\tau' = -\tau \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{T\Phi} \{ [2(G+F) - H]\varphi + [2(H+F) - G] \operatorname{ctg} \theta \} \quad (3.6)$$

$$\varphi' = -\varphi^2 - \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\tau}{N} T\Phi$$

где обозначено

$$\Phi = \sqrt{(F+H+4G)\varphi^2 + 2(F-2H-2G)\varphi \operatorname{ctg} \theta + (F+G+4H) \operatorname{ctg}^2 \theta}$$

Краевые условия для системы (3.6) будут

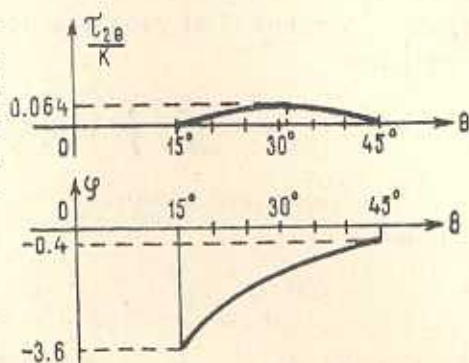
$$\tau = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad \theta = \beta \quad (3.7)$$

На ЭВМ ЕС-1022 было получено решение нелинейной двухточечной граничной задачи (3.6), (3.7) при следующих значениях параметров:

$$\alpha = 15^\circ, \beta = 45^\circ, q_1 = 0,6k, L = 2k^2, N = k^2, F = 3k^2, G = 2,5k^2, H = 1,5k^2$$

Решение представлено в виде графика (фиг. 4). Для нормальных напряжений из формул (1.5) и (1.7), с учетом граничного условия при $\theta = \alpha$ и значения ω из (3.4), а также значения функции φ , получим следующие соотношения:

$$\sigma_\theta = -p_1 - 3 \int_\alpha^\theta \tau_{r\theta} d\theta + \int_\alpha^\theta [(2G+H)\varphi - (2H+G) \operatorname{ctg}\theta] \operatorname{ctg}\theta \frac{d\theta}{T\Phi}$$



Фиг. 4

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{1}{T\Phi} [(2G+F)\varphi + (F-G) \operatorname{ctg}\theta] \quad (3.8)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta + \frac{1}{T\Phi} [(2G+H)\varphi - (2H+G) \operatorname{ctg}\theta]$$

Если в уравнениях (3.2) и (3.8) учесть граничное условие при $\theta = \beta$, то получим соотношения, определяющие предельное состояние ортотропной конической трубы

$$q_1 \sin^2 \alpha = q_2 \sin^2 \beta \quad (3.9)$$

$$p_1 - p_2 = -3 \int_\alpha^\beta \tau_{r\theta} d\theta + \int_\alpha^\beta [(2G+H)\varphi - (2H+G) \operatorname{ctg}\theta] \operatorname{ctg}\theta \frac{d\theta}{T\Phi}$$

Подставляя значение ω из (3.4) в соотношение (1.5) для $\tau_{r\theta}$, приходим к уравнению, определяющему $\psi(\theta)$

$$\psi(\theta) = \frac{q_1 \sin^2 \alpha}{3L} \int_\alpha^\theta \frac{T\Phi}{\sin^3 \theta} d\theta + \text{const} \quad (3.10)$$

В случае изотропного материала, если в системе (3.3) принять

$$F = G = H = 2L = 2M = 2N = 2k^2, \quad f = \frac{E}{\sin \theta}, \quad E = \text{const}$$

получим $\tau_{r\theta} = 0$ по всей толщине стенки трубы, что соответствует результатам работы [5].

Теперь рассмотрим случай, когда труба изготовлена из трансверсально изотропного материала. Принимаем, что ось круговой симметрии совпадает с осью $\theta = 0$. Это приводит, в частности, к соотношению $G = H$ [6].

В соотношениях (1.6)+(1.8), если принять

$$f = \frac{E}{\sin\theta}, \quad \lambda = 1, \quad D = 0, \quad G = H, \quad E = \text{const}$$

первое уравнение (1.8) удовлетворится тождественно, а для значения ω получим

$$\omega = \frac{3}{\sin^2\theta} \sqrt{2GE^2 \cos^2\theta + L\psi'^2 \sin^4\theta} \quad (3.11)$$

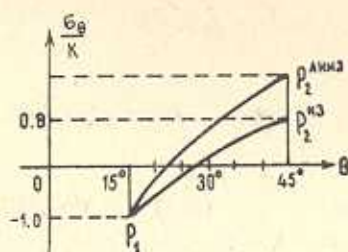
Подставляя это в соотношения (1.5) для $\tau_{\theta r}$, опуская индексы, находим

$$\tau = \frac{L\psi' \sin^2\theta}{\sqrt{2GE^2 \cos^2\theta + L\psi'^2 \sin^4\theta}}, \quad \tau = q_1 \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \quad (3.12)$$

Отсюда, определяя ψ' и подставляя в формулы нормальных напряжений (1.5), (1.7) и учитывая граничные условия на внутренней поверхности, будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_0 + \sqrt{\frac{G}{2L}} \sqrt{L - \tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2G}{L}} \sqrt{L - \tau^2} \quad (3.13)$$

$$\sigma_0 = -p_1 + \sqrt{2G} \ln \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} + \sqrt{\frac{G}{2}} \ln \frac{\sqrt{L} + \sqrt{L - \tau^2}}{\sqrt{L} + \sqrt{L - q_1^2}} + \\ + \sqrt{\frac{G}{2L}} (\sqrt{L - q_1^2} - \sqrt{L - \tau^2})$$



Фиг. 5

Условия на внешней поверхности определяют предельное состояние конической трубы

$$q_1 \sin^2\alpha = q_2 \sin^2\beta \\ p_1 - p_2 = \sqrt{2G} \ln \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \sqrt{\frac{G}{2}} \ln \frac{\sqrt{L} + \sqrt{L - q_2^2}}{\sqrt{L} + \sqrt{L - q_1^2}} + \\ + \sqrt{\frac{G}{2L}} (\sqrt{L - q_1^2} - \sqrt{L - q_2^2}) \quad (3.14)$$

Из (3.12) для $\psi(\theta)$ находим

$$\psi(\theta) = \sqrt{\frac{G}{2L}} \frac{Er}{q_1 \sin^2 \alpha} (\sqrt{L-q_1^2} - \sqrt{L-\tau^2}) + \text{const}$$

Если учесть значения $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$, скорости перемещения будут

$$u = 0, \quad v = -\frac{3Er}{\sin \theta}$$

$$w = 3 \sqrt{\frac{G}{2L}} \frac{Er \sin \theta}{q_1 \sin^2 \alpha} (\sqrt{L-q_1^2} - \sqrt{L-\tau^2} + \text{const})$$

Проведено численное исследование напряжения σ_θ в стенке трубы при следующих значениях параметров задачи $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $q_1 = 0,6k$, $p_1 = k$ для случая анизотропии, когда $G = 4k^2$, $L = k^2$ и для изотропного материала ($G = 2L = 2k^2$). Результаты исследования приведены в виде графиков (фиг. 5). Как видно из графиков, значение предельной нагрузки $p_1 - p_2$ для анизотропного тела увеличивается в 1,4 раза.

§ 4. Анизотропная коническая труба под совместным воздействием нормальных и продольных касательных сил

Рассмотрим предельное состояние длинной конической трубы из ортотропного материала, когда на внутренней и на внешней боковых поверхностях действуют, соответственно, нормальные давления и продольные касательные распределенные силы по образующим (фиг. 6)

$$\sigma_\theta = -p_1, \quad \tau_{\theta z} = q_1 \quad \text{при } \theta = \alpha; \quad \sigma_\theta = -p_2, \quad \tau_{\theta z} = q_2 \quad \text{при } \theta = \beta \quad (4.1)$$

Если принять в (1.5)–(1.8) $\psi = 0$, $\lambda = D = 0$, второе уравнение (1.8) удовлетворится тождественно, а первое (опуская индексы при $\tau_{\theta z}$) примет вид

$$\tau' + \tau \operatorname{ctg} \theta + \frac{G-H}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2} = 0 \quad (4.2)$$

при граничном условии $\tau = q_1$ при $\theta = \alpha$.

Численное решение уравнения (4.2) получено для случая, когда

$$G = 1,5k^2; \quad H = 0,5k^2; \quad N = k^2; \quad \alpha = 15^\circ; \quad \beta = 45^\circ; \quad q_1 = 0,3k$$

и приведено в виде графика (фиг. 7).

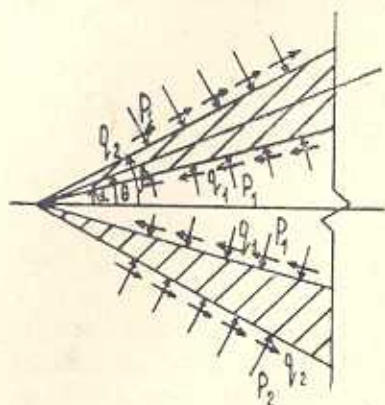
Для значения w находим

$$w = \frac{\nu \sqrt{N(G+H)} (f' - f \operatorname{ctg} \theta)}{\sqrt{N-\tau^2}}, \quad \nu = \operatorname{sign} (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \quad (4.3)$$

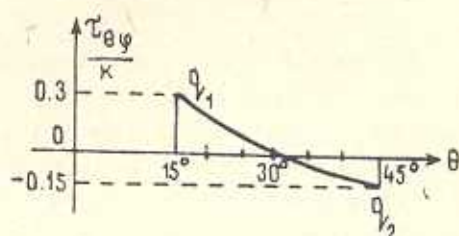
Из формул для нормальных напряжений (1.5) и (1.7) с учетом граничных условий при $\theta = \alpha$ и значения w из (4.3) находим

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \sqrt{N-\tau^2}$$

$$\sigma_{\theta} = -p_1 - 3 \int_{\alpha}^{\theta} \tau d\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{N-\tau^2} \operatorname{ctg}\theta d\theta \quad (4.4)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Удовлетворяя граничным условиям при $\theta = \beta$, получим соотношение, определяющее предельное состояние ортотропной конической трубы

$$p_1 - p_2 = -3 \int_{\alpha}^{\beta} \tau d\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{N-\tau^2} \operatorname{ctg}\theta d\theta$$

Сюда следует присоединить решение уравнения (4.2) при граничных условиях (4.1) (фиг. 7). Подставив (4.3) в формулу $\tau_{\theta\varphi}$ из (1.5), получим дифференциальное уравнение относительно $f(\theta)$

$$f'' + \left(\operatorname{ctg}\theta - \sqrt{\frac{G+H}{N}} \frac{\tau}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) f' + \left(2 - \frac{1}{\sin^2\theta} + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \frac{\tau \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) f = 0$$

откуда определяется

$$f(\theta) = C_1 \sin\theta + C_2 \sin^3\alpha \sin\theta \int_{\alpha}^{\theta} \frac{1}{\sin^3\theta} \exp\left(\sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) d\theta$$

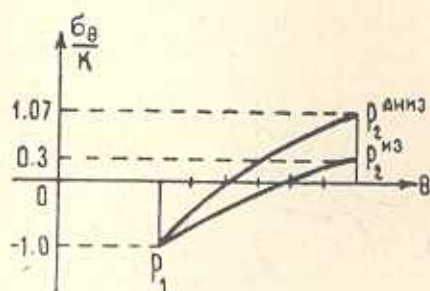
здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Для случая трансверсально изотропного материала, обладающего круговой симметрией относительно оси $\theta = 0$, имеем $G = H$. Тогда из уравнения (4.2) следует

$$\tau = q_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (1.5) и (1.7) с учетом (4.3) при $G = H$ и используя граничное условие на внутренней поверхности из (4.1), получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta + \sqrt{\frac{G}{2N}} \sqrt{N - \tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + \sqrt{\frac{2G}{N}} \sqrt{N - \tau^2} \\ \sigma_\theta &= -p_1 + \sqrt{2G} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} + \sqrt{2G} \ln \frac{\sqrt{N} + \sqrt{N - \tau^2}}{\sqrt{N} + \sqrt{N - q_1^2}} - \\ &- 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \theta/2}{\operatorname{tg} \alpha/2} + \sqrt{\frac{2G}{N}} (\sqrt{N - q_1^2} - \sqrt{N - \tau^2}) \end{aligned} \quad (4.6)$$



Фиг. 8

Удовлетворяя условиям на внешней поверхности $\theta = \beta$ в (4.5) и (4.6), приходим к соотношениям, определяющим предельное состояние transversально изотропной конической трубы

$$\begin{aligned} q_1 \sin \alpha &= q_2 \sin \beta \\ p_1 - p_2 &= \sqrt{2G} \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \sqrt{2G} \ln \frac{\sqrt{N} + \sqrt{N - q_2^2}}{\sqrt{N} + \sqrt{N - q_1^2}} - \\ &- 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \beta/2}{\operatorname{tg} \alpha/2} + \sqrt{\frac{2G}{N}} (\sqrt{N - q_1^2} - \sqrt{N - q_2^2}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для скоростей перемещений имеем

$$u = f' + f \operatorname{ctg} \theta, \quad v = -2f, \quad w = 0$$

В случае изотропного материала в формулах (4.7) следует подставить $G = 2N = 2k^2$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} q_1 \sin \alpha &= q_2 \sin \beta \\ p_1 - p_2 &= 2 \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - q_2^2}}{1 + \sqrt{1 - q_1^2}} - 3q_1 \sin \alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \beta/2}{\operatorname{tg} \alpha/2} + \\ &+ 2(\sqrt{1 - q_1^2} - \sqrt{1 - q_2^2}) \end{aligned}$$

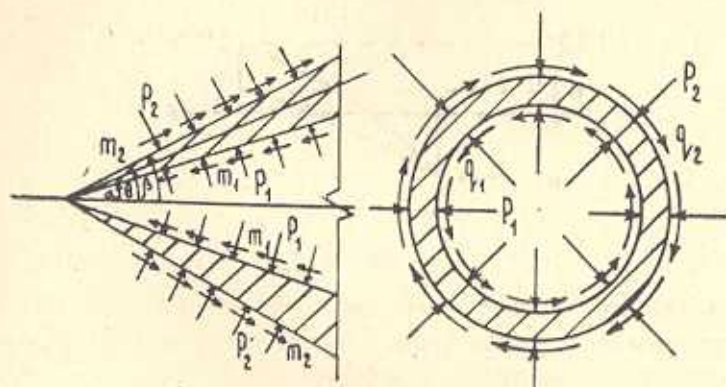
Эти формулы соответствуют предельному состоянию изотропной конической трубы под совместным воздействием нормальных давлений и продольных касательных сил, рассмотренному в работе [5].

Проведено численное исследование напряжения σ_θ в стенке трубы при значениях параметров предыдущей задачи. По этим результатам построены графики (фиг. 8), из которых видно, что для анизотропного тела значение предельной нагрузки $p_1 - p_2$ увеличивается в 1,6 раза.

§ 5. Ортоотропная коническая труба под совместным воздействием нормальных давлений, продольных и кольцевых касательных сил

Рассмотрим случай, когда на внутренней и на внешней боковых поверхностях длинной ортоотропной конической трубы действуют, соответственно, нормальные давления, продольные и кольцевые касательные распределенные силы (фиг. 9)

$$\sigma_{\theta} = -p_1, -p_2; \tau_{r\theta} = m_1, m_2; \tau_{\theta\varphi} = q_1, q_2 \text{ при } \theta = \alpha, \beta \quad (5.1)$$



Фиг. 9

В уравнениях (1.5)–(1.8) принимаем $\lambda = 1, D = 0$.

Из второго уравнения (1.8) и граничного условия при $\theta = \alpha$ находим

$$\tau_{\theta\varphi} = q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} \quad (5.2)$$

а из первого уравнения, как было сделано в § 3, получим систему уравнений

$$\tau' = -\tau \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{T\Phi} \{ [2(G+F) - H] \varphi + [2(H+F) - G] \operatorname{ctg} \theta \} \quad (5.3)$$

$$\varphi' = -\varphi^2 - \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\tau}{N} T\Phi$$

с краевыми условиями

$$\tau_{r\theta} = m_1 \text{ при } \theta = \alpha; \tau_{r\theta} = m_2 \text{ при } \theta = \beta \quad (5.4)$$

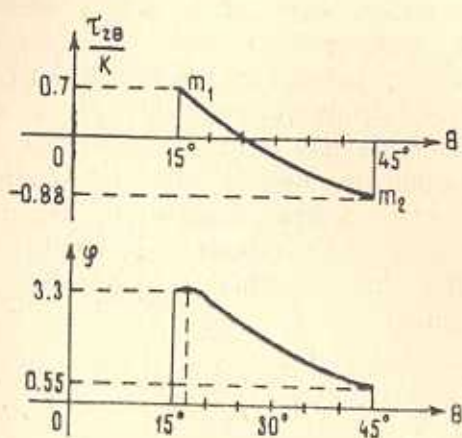
Численное решение задачи (5.3), (5.4) получено при следующих значениях параметров: $\alpha = 15^\circ; \beta = 45^\circ; q_1 = 0,6 k; m_1 = 0,7 k; m_2 = 0,88 k; L = 2k^2; N = k^2; F = 3k^2; G = 2,5 k^2; H = 1,5 k^2$.

Решение представлено в виде графика (фиг. 10).

Для определения предельного состояния имеем следующие соотношения:

$$q_1 \sin^2 \alpha = q_2 \sin^2 \beta$$

$$p_1 - p_2 = -3 \int_{\alpha}^{\beta} \tau d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} [(2G+H)\varphi - (2H+G) \operatorname{ctg}\theta] \operatorname{ctg}\theta \frac{d\theta}{T\Phi}$$



Фиг. 10

В качестве третьего соотношения к этим двум присоединяем решение задачи (5.3), (5.4) (фиг. 10).

Автор благодарит проф. М. А. Задояна за постановку задачи и за ценные советы при выполнении этой работы.

**ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԿՈՆԱԿԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻ
ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ**

Ա. Գ. ՀԱԿՈՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է պլաստիկորեն անիզոտրոպ կոնական խողովակի սահմանային վիճակը տարբեր արտաքին ուժերի ազդեցության տակ: Ընդունված է, որ կոնական խողովակի նյութը ենթարկվում է Միզեսի-Հիլլի հոսունության պայմանին և նյութի անիզոտրոպության պլաստիկ առանցքները համընկնում են կոնական խողովակի զազաթում տեղադրված սկզբնականում փնդային կոորդինատների համակարգի առանցքների հետ: Ստացված է ընդհանուր լուծում առանցքասիմետրիկ հոսունության համար: Ելնելով այդ ընդհանուր լուծումից ուսումնասիրված է կոնական խողովակի սահմանային վիճակը ոլորման, համատեղ ոլորման ու ճնշման, համատեղ ճնշման ու երկայնական շոշափող ուժերի, համատեղ ճնշման, ոլորման և երկայնական շոշափող ուժերի ազդեցության տակ: Բերված են թվային օրինակներ:

THE LIMITING STATE OF A PLASTIC ANISOTROPIC CONICAL TUBE

A. G. HACOBIAN

S u m m a r y

The limiting stressed state of a plastic anisotropic conical tube under the effect of various external forces is considered. It is assumed that the material of the conical tube obeys the Mises-Hill flow criterion and the axes material anisotropy coincide with the spheric coordinate axes. A general solution for the case of axisymmetric flow is obtained. Proceeding from that solution the limiting state of a conical tube are considered under the effect of torsion; compatible torsion and compression; compatible compression and longitudinal tangential forces; compatible compression, torsion and longitudinal tangential forces. Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Илев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Изд-во «Наука», 1966.
2. Саркисян М. С. К теории плоской деформации пластически анизотропных тел.—ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
3. Матченко Н. М., Толоконников О. Л. Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности цилиндрически-анизотропных материалов. «Работы по механике сплошных сред». ТПИ, 1974.
4. Геогджаян В. О., Сакевич В. Н. Течение анизотропной массы в коническом канале.—«Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа». Московский институт химического машиностроения, М.: 1978.
5. Задоля М. А. Пластическое течение конусообразных тел.—ПММ, 1983, т. 47, вып. 1. Московский институт химического машиностроения, М.: 1978.
6. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступили в редакцию
17.V.1986