ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVIII, № 1, 1985 Механика

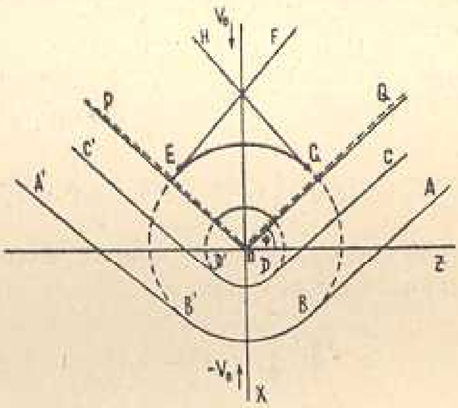
УДК 539.3

СОУДАРЕНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ РАВНЫМИ ДВУГРАННЫМИ УГЛАМИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

МАРТИРОСЯН А. Н., САФАРЯН Ю. С.

Задачи соударения плоских тел, ограниченных прямыми двугранными углами, и полуполос решены методом [1] в [2, 3]. Для цилиндрических стержней подобная задача рассмотрена в [4]. Плоские и осесимметричные задачи соударения тел, часть поверхностей которых свободна, а другая находится на жесткой опоре, а также тел, ограниченных жидкостью, исследованы в [5, 6].

В настоящей статье рассматривается соударение тел конечной высоты $2h$, ограниченных спереди двугранными углами раствора $\pi-2\varphi$ (фиг. 1) и плоскими поверхностями $y=\pm h$, которые движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями $\pm V_0$.



Фиг. 1.

При $t\geqslant 0$, где t—время после соударения, в результате которого тела, соединившись вдоль двугранных углов POQ, образуют плоский слой, следует решить задачу с условиями, заданными на его верхней и нижней плоскостях и заданными начальными условиями, которые состоят в равенстве $\pm V_0$ компоненты скоростей соударяющихся тел в направлении движения. Таким образом, получается задача о распаде произвольного разрыва [3].

Рассмотрим сперва задачу со свободными поверхностями. Выберем начало координат O в вершине соударяющихся углов на их оси симметрии, ось Ox направим по направлению скоростей движения, которые совпадают с осью симметрии, ось Oy перпендикулярно поверхностям тел; ось Oz находится в плоскости симметрии тела и перпендикулярна оси Ox. Обозначим через u_j $(j=1, 2, 3)$ компоненты вектора перемещения по осям x, y, z.

Пусть u_j^0 обозначают решения задачи о соударении бесконечных по высоте тел, в которой $u_2^0=0$, $u_{1,3}^0=u_{1,3}(x, z, t)$. Имеют место как для u_j, так и для u_j^0 начальные условия при $t=0$ [5], $u_3^0=0$, $u_1^0=0$, $\frac{\partial u_3^0}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial t}=-V_0\sigma(x-|z|k)+V_0\sigma(k|z|-x) \tag{1}$$

причем $x=|z|k$ есть уравнения граней угла OQ и OP, где $\sigma(x)$ — единичная функция, $k=-\operatorname{tg}\psi$.

Решение динамических уравнений упругой среды в плоской задаче для $u_{1,3}^0$ при условиях (1) можно искать методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по (x, z) [7], причем для изображения по Лапласу от u_j^0 запишем

$$\overline{u_j^0}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \overline{\overline{u}}_j^0 \exp[-s(\overline{\alpha}x+\overline{\gamma}z)]d\overline{\alpha}d\overline{\gamma} \tag{2}$$

где $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа. Для трансформант получится после решения уравнений

$$\overline{\overline{u}}_1^0=\frac{V_0k\,(b^2\overline{\alpha}^2+a^2\overline{\gamma}^2-\omega^2)}{\pi^2s^2(\gamma^2-\alpha^2k^2)\mu},\quad \overline{\overline{u}}_3^0=-\frac{V_0k(a^2-b^2)\overline{\alpha}\,\overline{\gamma}}{\pi^2s^2(\gamma^2-\alpha^2k^2)\mu}$$

$$\mu=(a^2\overline{\alpha}^2+b^2\overline{\gamma}^2-\omega^2)(b^2\overline{\alpha}^2+a^2\overline{\gamma}^2-\omega^2)-(a^2-b^2)^2\overline{\alpha}^2\overline{\gamma}^2 \tag{3}$$

где a, b — скорости продольных и поперечных волн, $\mu=0$ дает дисперсионные соотношения для этих волн

$$\overline{\gamma}_1=\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\overline{\alpha}^2},\quad \overline{\gamma}_2=\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\overline{\alpha}^2},\quad \alpha=\frac{\overline{\alpha}}{\omega},\quad \gamma=\frac{\overline{\gamma}}{\omega} \tag{4}$$

Для преобразования от $\Delta^0=\frac{\partial u_1^0}{\partial x}+\frac{\partial u_3^0}{\partial z}$ получится

$$\overline{\overline{\Delta}}{}^0=\frac{iV_0k\overline{\alpha}}{\pi^2s^2a^2(\gamma^2-\alpha^2k^2)(\overline{\gamma}^2-\gamma_1^2)} \tag{5}$$

Следует отметить, что полюсы знаменателя $\gamma=\mp\alpha k$ соответствуют плоским волнам AB и $A'B'$ (фиг. 1) и соответствующим поперечным волнам, причем слагаемые в решении, дающие эти волны, можно получить выделением особенности в решении, поэтому при вычислении интегралов в Δ^0 учитываются только полюсы $\overline{\gamma}=\overline{\gamma}_1$ для продольных волн. Тогда можно получить при $z>0$

$$\overline{\Delta}^0 = \frac{V_0 k}{\pi\omega^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}\exp(i\omega(\overline{\alpha}x+\overline{\gamma}, z))}{(\gamma_1^2-\alpha^2k^2)\overline{\gamma}_1}d\overline{\alpha} \tag{6}$$

Полное решение плоской задачи для u_1^0, u_2^0 дано в [8]. Обозначим

$$u_i = u_i^0 + U_i \tag{7}$$

причем начальные условия для u_i нулевые, а граничные условия на поверхностях $y=\pm h$, $\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$, $\sigma_{zz}=0$ запишутся в виде

$$a^2\frac{\partial\overline{U}_2}{\partial y}+K\left(\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x}+\frac{\partial\overline{U}_3}{\partial z}\right)=-K\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x}+\frac{\partial u_3^0}{\partial z}\right) \tag{8}$$

$$y=\pm h,\quad \frac{\partial\overline{U}_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U_2}{\partial z}+\frac{\partial\overline{U}_3}{\partial y}=0,\quad \begin{array}{l}-\infty<x<+\infty\\ -\infty<z<+\infty\end{array}$$

где $K=a^2-2b^2$.

Решение уравнений теории упругости можно искать в виде

$$\overline{U}_{1,3}=\sum_{n=1}^{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{U}}{}_{1,3}^{(n)}\exp(i(\overline{\alpha}x+\overline{\gamma}z))\cos\overline{\beta}_n y\,d\overline{\alpha}\,d\overline{\gamma}$$

$$\overline{U}_2=\sum_{n=1}^{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{U}}{}_2^{(n)}\exp(i(\overline{\alpha}x+\overline{\gamma}z))\sin\overline{\beta}_n y\,d\overline{\alpha}\,d\overline{\gamma} \tag{9}$$

где $\overline{\beta}_1=\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\overline{\alpha}^2-\overline{\gamma}^2}$, $\overline{\beta}_2=\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\overline{\alpha}^2-\overline{\gamma}^2}$, причем можно получить

$$\overline{\overline{U}}{}_2^{(1)}=-\frac{\overline{\beta}_1}{i\alpha}\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)},\quad \overline{\overline{U}}{}_3^{(1)}=-\frac{\overline{\gamma}}{\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)},\quad \overline{\overline{U}}{}_3^{(2)}=-\frac{1}{\overline{\gamma}}[\overline{\alpha}\overline{\overline{U}}{}_1^{(2)}-i\overline{\beta}_2\overline{\overline{U}}{}_2^{(2)}] \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8), можно получить

$$\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)}=-\frac{\overline{\alpha}K(\overline{\overline{u}}{}_1^0\overline{\alpha}+\overline{\overline{u}}{}_3^0\overline{\gamma})[\omega^2-2b^2(\overline{\alpha}^2+\overline{\gamma}^2)]}{R_1(\overline{\alpha},\overline{\gamma})\cos\overline{\beta}_1 h}$$

$$\overline{\overline{U}}{}_1^{(2)}=\frac{b^2K(\overline{\overline{u}}{}_1^0\overline{\alpha}+\overline{\overline{u}}{}_3^0\overline{\gamma})\,2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2\overline{\alpha}\sin\overline{\beta}_1 h}{\sin\overline{\beta}_2 h\cos\overline{\beta}_1 h R_1(\overline{\alpha},\overline{\gamma})} \tag{11}$$

$$\overline{\overline{U}}{}_2^{(2)}=-\frac{i2b^2K\overline{\beta}_1\sin\overline{\beta}_1 h(\overline{\alpha}^2+\overline{\gamma}^2)V_0k\overline{\alpha}}{\pi^2s^2a^2\sin\overline{\beta}_2 h\cos\overline{\beta}_1 h R_1(\overline{\alpha},\overline{\gamma})(\gamma^2-\alpha^2k^2)(\overline{\gamma}^2-\overline{\gamma}_1^2)}$$

где $R_1(\overline{\alpha},\overline{\gamma})=[\omega^2-2b^2(\overline{\alpha}^2+\overline{\gamma}^2)]^2+4\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2b^4(\overline{\alpha}^2+\overline{\gamma}^2)\operatorname{tg}\overline{\beta}_1 h\operatorname{ctg}\overline{\beta}_2 h$

Для упрощения полученного решения можно рассматривать область на некотором удалении от места соударения и полагать $\frac{h}{x}\ll 1$, что соответствует длинноволновому приближению $\overline{\alpha}h\ll 1$, $\overline{\beta}_{1,2}h\ll 1$.

Тогда можно получить, полагая, что $\Delta = \Delta^0 + \Delta'$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \Delta' = \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}$$

$$\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)} = -\frac{V_0 K k \overline{\alpha}^2 [\omega^2 - 2b^2(\overline{\alpha}^2 + \overline{\gamma}^2)]}{\omega^4 \pi^2 s^2 a^2 (\gamma^2 - \alpha^2 k^2)(\overline{\gamma}^2 - \overline{\gamma}_1^2)[1 - c_0^2(\alpha^2 + \gamma^2)]} \tag{12}$$

$$\overline{\overline{\Delta}}{}' = \frac{i V_0 K k \overline{\alpha} [\omega^2 - 2b^2(\overline{\alpha}^2 + \overline{\gamma}^2)]}{\pi^2 \omega^4 a^4 (\gamma^2 - \alpha^2 k^2)(\overline{\gamma}^2 - \overline{\gamma}_1^2)[1 - c_0^2(\alpha^2 + \gamma^2)]}, \quad c_0^2 = \frac{4b^2}{a^2}(a^2 - b^2)$$

где c_0 есть скорость продольных волн в пластинах [5]. Вычисляя в $\overline{\Delta}$ интегралы по $\overline{\gamma}$ в полюсах, соответствующих продольным волнам, для которых $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_1$ и волнам в пластинах, где $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_3$, $\overline{\gamma}_3 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \overline{\alpha}^2}$, получим при $z > 0$

$$\Delta' = -\overline{\Delta}^0 + \frac{V_0 K k}{\pi \omega a^4 c_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left(1 - \frac{2b^2}{c_0^2}\right) \exp(i\omega(\overline{\alpha} x + \overline{\gamma} z))}{(\gamma_3^2 - \alpha^2 k^2)(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)\gamma_3} d\alpha \tag{13}$$

где

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{1}{c_0^2} - \alpha^2}$$

Для получения значения Δ можно к полученному интегралу применить метод [5] вычисления интегралов, основанный на замене контура интегрирования контуром, на котором $\alpha x + \gamma_3 z$ вещественно.

Учитывая, что $\frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial t}$ содержит под знаком интеграла ω только в показательной функции, можно видеть, что обратное преобразование от нее будет иметь вид $\delta(t - \alpha x - \gamma_3 z)$, и вычисление интеграла дает

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2\mathrm{Re} \frac{i V_0 2b^2 k}{\pi c_0^2 a^2} \frac{\alpha_2}{[\gamma_3^2(\alpha_2) - \alpha_2^2 k^2][-x - \gamma_3^1(\alpha_2) z]\, \gamma_3(\alpha_2)} \tag{14}$$

где α_2 находится из уравнения

$$\gamma_3 = \gamma_3(\alpha_2), \quad t - \alpha_2 x - \gamma_3 z = 0, \quad \alpha_2 = \frac{tx + iz\sqrt{t^2 - \frac{x^2 + z^2}{c_0^2}}}{x^2 + z^2} \tag{15}$$

Тогда можно получить

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2\mathrm{Re} \frac{V_0 k 2b^2}{\pi c_0^2 a^2} \frac{\alpha_2}{\frac{1}{c_0^2} - \alpha_2^2(1 + k^2)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{x^2 + z^2}{c_0^2}}} \tag{16}$$

Как видно из решения, оно будет верно не только для $z > 0$, но и для произвольного z. Можно из (16) получить асимптотику решения вблизи точечной волны $r = \sqrt{x^2 + z^2} = c_0 t$. Согласно (15) $\alpha_2 \approx \frac{x}{c_0^2 t}$ и, обозначая $x = r\cos\theta$, из (15), (16) получим

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}\approx-2\frac{V_0k2b^2}{\pi a^2c_0}\,\frac{\cos^2\psi\cos\theta}{\cos^2\psi-\cos^2\theta}\,\frac{1}{\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c_0^2}}}\tag{17}$$

Вдали от B, B' (фиг. 1) $\theta-\psi=0(1)$ и можно записать

$$\Delta\approx-2\frac{V_0\sin 2\psi b^2}{\pi a^2\sqrt{c_0}}\,\frac{\cos\theta}{\cos^2\psi-\cos^2\theta}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{t-\frac{r}{c_0}}}{\sqrt{r}}\tag{18}$$

При $r=c_0t$ $\Delta=0$, но при $\theta=\psi$ знаменатель обращается в нуль. Рассмотрим решение около B. Поскольку

$$\alpha_2=\frac{t\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c_0^2}}}{r}$$

для малых $t-\frac{r}{c_0}$ и $\theta-\psi$ можно записать

$$\frac{1}{c_0^2}-\alpha_2^2\frac{1}{\cos^2\psi}\approx\frac{c_0^2\operatorname{ctg}\psi\left(\theta-\psi+i\sqrt{\frac{2c_0}{r}}\sqrt{t-\frac{r}{c_0}}\right)}{2\left[(\theta-\psi)^2+\frac{2c_0}{r}\left(t-\frac{r}{c_0}\right)\right]}$$

В рассматриваемой окрестности $\theta-\psi\sim\sqrt{t-\frac{r}{c_0}}$, тогда получится

$$\Delta\approx-2\frac{\sqrt{2}\,V_0b^2\sin\psi}{\pi a^2tr}t^{\frac{3}{2}}\left|\sqrt{t-\frac{r}{c_0}}-\sqrt{\frac{t}{2}}\operatorname{ctg}\psi\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\left(t-\frac{r}{c_0}\right)}}{(\theta-\psi)\sqrt{t}}\right|$$

или

$$\Delta\approx2\frac{V_0b^2\cos\psi}{\pi a^2c_0}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\left(t-\frac{r}{c_0}\right)}}{\sqrt{t}(-\theta+\psi)}\tag{19}$$

при $\theta>\psi$, что соответствует окрестности BB'.

Полученное решение дает асимптотику решения, соответствующую пластинчатым волнам, причем вне точечной волны при $x^2+z^2>$ $>c_0^2t^2$ α_2 действительно и $\frac{\partial\Delta}{\partial t}=0$. Это относится к области впереди точечной волны, где отсутствуют плоские волны, причем картина волн такая же, как и на фиг. 1. Для получения решения позади плоских волн, которым соответствует $\alpha_2'=\frac{1}{c_0\sqrt{1+k^2}}$, можно в (14) выделить особую часть решения, полагая, что α_2 следует заменить на α_2-i0, и обобщенную функцию $\frac{1}{\alpha_2'-\alpha_2+i0}$ записать в виде [9]

$$\frac{1}{\alpha_2' - \alpha_2} + \pi i \delta(\alpha_2' - \alpha_2)$$

Тогда получится в области постоянного Δ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{2V_0 k b^2}{c_0 a^2 \sqrt{1+k^2}} \frac{\alpha_2' \delta(\alpha_2' - \alpha_2)}{\gamma_3(\alpha_2')[-x - \gamma_3'(\alpha_2')z]} \tag{20}$$

Учитывая, что

$$\gamma_3(\alpha_2') = \frac{-k}{c_0 \sqrt{1+k^2}}, \quad \delta(t - \alpha_2 x - \gamma_2 z) = \frac{\delta(\alpha_2' - \alpha_2)}{-x - \gamma_3'(\alpha_2')z} \tag{21}$$

можно получить позади плоских волн

$$\Delta = -\frac{2V_0 b^2}{c_0 a^2 \sqrt{1+k^2}} \sigma\left(t - \frac{x - k|z|}{c_0 \sqrt{1+k^2}}\right) \tag{22}$$

где вместо z подставлено $|z|$, чтобы учесть обе плоские пластинчатые волны. При $k=0$ отсюда получится решение [3]. Решение на AB в $(1+k^2)^{-1/2}$ раз меньше, чем решение плоской задачи [5].

Подобным же образом можно получить решение для больших x для $u_{1,2,3}$. Отметим, что найденные значения решения (16) имеют место не только для правого тела, но и для всех значений $x^2+y^2<c_0^2t^2$. Позади плоских волн EF и GH решение дается (22), где следует под знаком σ поставить $t + \dfrac{x-k|z|}{c_0\sqrt{1+k^2}}$. В области между ними и точечной волной решение будет равно сумме (22), то есть значение Δ там вдвое больше. Из (16) можно получить особенность решений вблизи волны $x^2+z^2=c_0^2t^2$.

Для задачи соударения, в которой при $x<0$ на обеих поверхностях тел имеется жесткая заделка, граничные условия имеют вид $y=\pm h$, $-\infty<z<+\infty$

$$x>0 \quad a^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + K\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z}\right) = -K\left(\frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial z}\right) \tag{23}$$

$$x<0 \quad \bar{u}_2 = 0$$

$$-\infty<x<+\infty \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} = 0$$

Подставляя (9) в (21) и обращая преобразования по (x, z), можно получить соотношения

$$\bar{\bar{U}}_1^{(1)} \frac{i \cos \bar{\beta}_1 h}{\bar{\alpha}} [\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)] + \bar{\bar{U}}_1^{(2)} 2b^2 \bar{\beta}_2 \cos \bar{\beta}_2 h = -K(i\bar{\alpha}\,\bar{\bar{u}}_1^0 + i\bar{\gamma}\,\bar{\bar{u}}_3^0) + \Omega^+ \tag{24}$$

$$\Omega^+ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}z)) \left(\frac{\sigma_{zz}}{\rho}\right)_{y=h} dx$$

$$V^- = \frac{1}{4\bar{x}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}z))(U_2)_{y=h}\, dx$$

$$\frac{i\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}}\bar{\bar{U}}_1^{(1)} \sin\bar{\beta}_1 h + \bar{\bar{U}}_2^{(2)} \sin\bar{\beta}_2 h = V^- \tag{25}$$

$$-2\bar{\bar{U}}_1^{(1)}\bar{\beta}_1 \sin\bar{\beta}_1 h - \bar{\beta}_2\bar{\bar{U}}_1^{(2)}\sin\bar{\beta}_2 h + i\bar{\alpha}\,\bar{\bar{U}}_2^{(2)}\sin\bar{\beta}_2 h = 0$$

$$-\frac{\bar{\gamma}\bar{\beta}_1}{\bar{\alpha}}\,\frac{2\sin\bar{\beta}_1 h}{\sin\bar{\beta}_2 h}\,\bar{\bar{U}}_1^{(1)} + \bar{\bar{U}}_2^{(2)} i\left(\bar{\gamma} - \frac{\bar{\beta}_2^2}{\bar{\gamma}}\right) + \frac{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}_2}{\bar{\gamma}}\,\bar{\bar{U}}_1^{(2)} = 0$$

Исключая из полученных уравнений $\bar{\bar{U}}_2^{(2)}$, $\bar{\bar{U}}_1^{(2)}$, $\bar{\bar{U}}_1^{(1)}$, можно получить уравнение

$$\frac{V^-}{\bar{\beta}_1^2 h}\left[\omega^2 - \frac{4b^2}{a^2}(a^2-b^2)(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\right] = \Omega^+ + f(\bar{\alpha},\bar{\gamma}) \tag{26}$$

где произведены упрощения для $\bar{\alpha}h \ll 1$

$$f(\bar{\alpha},\bar{\gamma}) = -\frac{iKkV_0\bar{\alpha}}{s^2\pi^2a^2(\bar{\gamma}^2-\alpha^2k^2)(\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_3)(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_1)} \tag{27}$$

Проводя факторизацию, получим

$$f^-(\bar{\alpha},\bar{\gamma}) = \frac{iKkV_0\bar{\alpha}}{\pi^2a^2(\bar{\gamma}^2-\bar{\alpha}^2k^2)(\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_3)(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_1)} +$$

$$+\frac{iKkV_0\frac{\bar{\gamma}}{k}}{\pi^2a^2\left(\bar{\alpha}+\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)2\bar{\gamma}\left(-\frac{\bar{\gamma}}{k}+\bar{\alpha}_3\right)\left(-\frac{\bar{\gamma}}{k}+\bar{\alpha}_1\right)} +$$

$$+\frac{iKkV_0\bar{\alpha}_3}{\pi^2a^2(\bar{\gamma}^2-\bar{\alpha}_3^2k^2)(\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_3)(-\bar{\alpha}_3-\bar{\alpha}_1)} \tag{28}$$

$$f^+(\bar{\alpha},\bar{\gamma}) = \frac{iKkV_0}{2\pi^2a^2k\left(\bar{\alpha}+\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)\left(-\frac{\bar{\gamma}}{k}+\bar{\alpha}_3\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}+\bar{\alpha}_1\right)} +$$

$$+\frac{iKkV_0\bar{\alpha}_3}{\pi^2a^2(\bar{\gamma}^2-k^2\bar{\alpha}_3^2)(\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_3)(\bar{\alpha}_3+\bar{\alpha}_1)}$$

где

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1(\bar{\gamma}) = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\gamma}^2}, \quad \bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_3(\bar{\gamma}) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \bar{\gamma}^2}$$

Подобным же образом записывается множитель при V^- и после решения уравнения (24) получится

$$\bar{\bar{U}}_1^{(1)} = -\frac{ia^2\bar{\alpha}}{4b^2(a^2-b^2)}\,\frac{\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_3}\left[\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\right] f^-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})$$

$$\overline{\overline{U}}{}_2^{(1)} = \frac{i\overline{\beta}_1}{\overline{\alpha}} \overline{\overline{U}}{}_1^{(1)}, \quad \overline{\overline{U}}{}_3^{(1)} = \frac{\overline{\gamma}}{\overline{\alpha}} \overline{\overline{U}}{}_1^{(1)} \tag{29}$$

Значение $\overline{\overline{\Delta}}'$ найдется в виде

$$\overline{\overline{\Delta}}' = \frac{\omega^2 \overline{\overline{U}}{}_1^{(1)}}{\overline{\alpha}\, a^2} i \tag{30}$$

и для $\overline{\Delta}'$ получится

$$\overline{\Delta}' = -\frac{1}{4b^2(a^2-b^2)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\exp(i(\overline{\alpha}x+\overline{\gamma}z))[\omega^2-2b^2(\overline{\alpha}^2+\overline{\gamma}^2)]}{(\overline{\alpha}-\overline{\alpha}_3)(\overline{\alpha}+\overline{\alpha}_1)} f^-(\overline{\alpha},\overline{\gamma})d\overline{\alpha}\, d\overline{\gamma} \tag{31}$$

Вычисляя для $x>0$ вычеты в полюсах $\overline{\alpha}=\overline{\alpha}_3$, $\overline{\alpha}=\overline{\alpha}_1$, можно решение получить в следующем виде:

$$\overline{\Delta}' = -\frac{\pi i K\omega^2}{4b^2(a^2-b^2)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(\overline{\alpha}_3 x+\overline{\gamma}z))}{\overline{\alpha}_3+\overline{\alpha}_1} f^-(\overline{\alpha}_3,\overline{\gamma})d\overline{\gamma} - \frac{kV_0}{\pi a^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(\overline{\alpha}_3 x+\overline{\gamma}z))}{\overline{\gamma}^2-\overline{\alpha}_3^2 k^2} d\overline{\gamma}$$

Учитывая (6), где в (31) взят вычет в интеграле по α, получим

$$\overline{\Delta} = -\frac{i\pi K\omega^2}{4b^2(a^2-b^2)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(\overline{\alpha}_3 x+\overline{\gamma}z))}{\overline{\alpha}_3+\overline{\alpha}_1} f^-(\overline{\alpha}_3,\overline{\gamma})d\overline{\gamma} \tag{32}$$

Проводя обращение интегральных преобразований подобно (14), можно получить

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} = -2\mathrm{Re}\, i \frac{kV_0}{\pi(a^2-b^2)} \frac{1}{-\alpha_3'(\gamma_0)x-z} \frac{1}{\alpha_3(\gamma_0)+\alpha_1(\gamma_0)} \frac{1}{\gamma_0^2-\alpha_3^2(\gamma_0)k^2} \times$$

$$\times \left[\alpha_2(\gamma_0) + \frac{K^2 k}{8a^2b^2(a^2-b^2)} \frac{1}{\frac{\gamma_0}{k}+\alpha_1(\gamma_0)}\right] \tag{33}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{tz+ix\sqrt{t^2-\frac{x^2+z^2}{c_0^2}}}{x^2+z^2}$$

Таким образом, получено решение для малых h при $x>0$ внутри точечной волны $x^2+z^2<c_0^2t^2$. Вне ее γ_0 действительно и решение равно нулю.

В области впереди точечной волны, где имеются плоские волны, асимптотика решений записывается, как и выше.

ՀԱՎԱՍԱՐ ԵՐԿՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԵՎ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԲԱԽՈՒՄԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Գտնված է իրար հանդեպ հավասար հաստատուն արագությամբ շարժվող և արտաքինից երկնիստ անկյուններով և հարթ մակերևույթներով սահմանափակված վերջավոր բարձրությամբ առաձգական մարմինների բախման խնդրի լուծման ասիմպտոտիկան։ Գտնված է խնդրի լուծման ասիմպտոտիկան կետային սալաձև ալիքների շրջակայքում։ Առաձգական միջավայրում դինամիկ հավասարումների լուծումը որոշված է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով։ Գտնված է նաև ասիմպտոտիկան խառը եզրային պայմաններով խնդրի լուծման համար։

THE IMPACT OF ELASTIC BODIES BOUNDED BY EQUAL TWO-SIDED ANGLES AND PARALLEL PLANES

A. N. MARTIROSSIAN, J. S. SAFARIAN

Summary

The asymptote of the solution of the problem of impact of elastic bodies of finite depth bounded by two-sided angles and moving to meet one another with constant equal velocities is found. The asymptote of the solution of the problem near point plate wave is found. The solutions of dynamical equations for elastic medium are given by the method of integral transformations of Laplace and Fourier. Also the asymptote of the solution of mixed boundary problem is revealed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М.: ОНТИ, 1937.
2. *Малков М. А.* Двумерная задача об упругом соударении стержней.—ДАН СССР, 1965, т. 148, № 4.
3. *Малков М. А.* Асимптотика двумерной задачи об упругом соударении стержней.—ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. *Skulak R.* Longitudinal Impact of some Infinite Bars.—Journal of Applied Mechanics, 1957, 24, 1, 59—64.
5. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.—ДАН СССР, 1976, т. 226, № 3.
6. *Мартиросян А. Н.* Некоторые нестационарные граничные задачи для упругой среды, граничащей с жидкостью.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1982, т. 35, № 2.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962.
8. *Мартиросян А. Н.* Решение некоторых нестационарных граничных задач теории упругости. Канд. диссертация, ЕГУ, 1977.
9. *Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Гиз Л. М., Слабодецкий Л. Н., Смирнов М. М.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
3.VI. 1983