ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 6, 1984 Механика

УДК 532.1:534

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРОТКИХ ВОЛН ПРИ ПОЛУЧЕНИИ УРАВНЕНИЙ МОДУЛЯЦИИ ДЛЯ ВОЛН В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

БАГДОЕВ А. Г., ПЕТРОСЯН Л. Г.

В работе [1] были получены и решены уравнения нестационарных двумерных коротких волн для сжимаемой жидкости. С учетом вязкости и теплопроводности соответствующие уравнения получены в [2].

Исследование лучевых решений и дифракционных задач для широкого круга сред проведено в [3, 4].

Построение общего вида уравнения коротких волн для слабо диссипативных сред и конкретизация коэффициентов для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений выполнены в [5, 6].

Получение уравнения для волн модуляций из уравнения коротких волн, заменяющего систему уравнений среды, для несимметричных электропроводящих жидкостей с пузырьками газа при наличии магнитного поля и их применение к дифракционным задачам приводятся в [7].

Примененный в указанной работе метод получения уравнений модуляций является довольно общим и простым.

Вместе с тем наличие в нелинейном решении свободного члена, представляющего среднее течение [8], генерируемое первой гармоникой волны, и являющееся, наряду с амплитудой второй гармоники, малой второго порядка относительно амплитуды первой гармоники, приводит к необходимости исследования вопроса о применимости метода работы [7], основанного на применении уравнения коротких волн к построению уравнений модуляции.

В настоящей работе на примере более простой среды, представляющей вязкую сжимаемую жидкость, дается вывод уравнений модуляций из исходной системы уравнений и показывается, что окончательное уравнение модуляции совпадает в основных порядках с уравнением, полученным в [7], для данного вида среды. Тем самым обосновывается возможность использования общего подхода [7] для получения уравнений модуляций волн, основанного на уравнении коротких волн, вид которого известен для произвольных сред [5, 6].

Показывается, что для дифракционной задачи в линейном приближении вязкость не влияет на уравнение модуляции.

Для простоты рассматривается плоская задача.

Уравнения движения вязкой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+ + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+ + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\rho_0 c_0^2\left(1+n\frac{p}{\rho_0 c_0^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{3}$$

где u, v — проекции скорости частицы на оси x, y, p — избыточное давление, ρ — плотность, t — время, ν — коэффициент кинематической вязкости, n — показатель адиабаты для жидкости, ρ_0 и c_0 — соответственно начальные плотность и скорость звука, причем в (3) удержаны нелинейности второго порядка, $\rho=\rho_0+\dfrac{p}{c_0^2}$.

Решение (1)—(3) ищем в виде квазимонохроматической волны

$$u=U_0+U_1\exp(i\tau)+U_2\exp(2i\tau)+\text{к. с.}^*$$
$$v=V_0+V_1\exp(i\tau)+V_2\exp(2i\tau)+\text{к. с.}$$
$$p=P_0+P_1\exp(i\tau)+P_2\exp(2i\tau)+\text{к. с.} \tag{4}$$

Здесь для простоты рассмотрена первоначально плоская волна, $\tau=kx-\omega t$, k — волновое число, ω — частота.

Рассматриваются высокочастотные приближения и дифракционные задачи, для которых имеют место порядки $x\sim 1$, $t\sim 1$, $y\sim 1/\sqrt{k}$.

Подставляя (4) в уравнения (1)—(3), приравнивая слагаемые, соответствующие e^0, $\exp(i\tau)$, $\exp(2i\tau)$, получим

$$2\frac{\partial U_0}{\partial t}+4U_0\frac{\partial U_0}{\partial x}+4V_0\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{2}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial x}-\frac{4}{\rho_0^2 c_0^2}P_0\frac{\partial P_0}{\partial x}- -\frac{8}{3}\nu\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}-2\nu\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}-\frac{2}{3}\nu\frac{\partial^2 V_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}(U_1\overline{U}_1)+ + V_1\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial y}+\overline{V}_1\frac{\partial U_1}{\partial y}-\frac{1}{\rho_0^2 c_0^2}\frac{\partial}{\partial x}(P_1\overline{P}_1)=0 \tag{5}$$

* к. с. обозначает комплексно-сопряженные слагаемые.

$$2\frac{\partial V_0}{\partial t}+4U_0\frac{\partial V_0}{\partial x}+U_1\frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x}-kiU_1\overline{V}_1+\overline{U}_1\frac{\partial V_1}{\partial x}+ki\overline{U}_1V_1+$$

$$+4V_0\frac{\partial V_0}{\partial y}+V_1\frac{\partial \overline{V_1}}{\partial y}+\overline{V}_1\frac{\partial V_1}{\partial y}+\frac{2}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial y}-\frac{1}{\rho_0^2c_0^2}\left(4P_0\frac{\partial P_0}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+P_1\frac{\partial \overline{P_1}}{\partial y}+\overline{P}_1\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)-2\nu\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}-\frac{8}{3}\nu\frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2}-\frac{2}{3}\nu\frac{\partial^2 U_0}{\partial x\partial y}=0 \qquad (6)$$

$$2\frac{\partial P_0}{\partial t}+4U_0\frac{\partial P_0}{\partial x}+U_1\frac{\partial \overline{P_1}}{\partial x}+(n-1)kiU_1\overline{P_1}-2kiU_2\overline{P_2}+$$

$$+\overline{U}_1\frac{\partial P_1}{\partial x}-(n-1)ki\overline{U}_1P_1+2ki\overline{U}_2P_2+4V_0\frac{\partial P_0}{\partial y}+V_1\frac{\partial \overline{P_1}}{\partial y}+$$

$$+\overline{V}_1\frac{\partial P_1}{\partial y}+2\rho_0c_0^2\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)+4nP_0\frac{\partial U_0}{\partial x}+nP_1\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x}+$$

$$+n\overline{P}_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+4nP_0\frac{\partial V_0}{\partial y}+nP_1\frac{\partial \overline{V_1}}{\partial y}+n\overline{P}_1\frac{\partial V_1}{\partial y}=0 \qquad (7)$$

для свободных членов,

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}-\omega iU_1+2kiU_0U_1+2U_0\frac{\partial U_1}{\partial x}+2U_1\frac{\partial U_0}{\partial x}+kiU_2\overline{U}_1+$$

$$+2V_0\frac{\partial U_1}{\partial y}+2V_1\frac{\partial U_0}{\partial y}+V_2\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial y}+\overline{V}_1\frac{\partial U_2}{\partial y}=-\frac{ki}{\rho_0}P_1-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_1}{\partial x}+$$

$$+\frac{1}{\rho_0^2c_0^2}\left(2P_0\frac{\partial P_1}{\partial x}+2P_1\frac{\partial P_0}{\partial x}+kiP_2\overline{P}_1\right)+\frac{4}{3}\nu\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+2ki\frac{\partial U_1}{\partial x}-k^2U_1\right)+\nu\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\nu\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y}+ki\frac{\partial V_1}{\partial y}\right) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}-\omega iV_1+2U_0\frac{\partial V_1}{\partial x}+2kiU_0V_1+2U_1\frac{\partial V_0}{\partial x}-kiU_2\overline{V}_1+$$

$$+2ki\overline{U}_1V_2+2V_0\frac{\partial V_1}{\partial y}+2V_1\frac{\partial V_0}{\partial y}+V_2\frac{\partial \overline{V_1}}{\partial y}+\overline{V}_1\frac{\partial V_2}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_1}{\partial y}+$$

$$+\frac{1}{\rho_0^2c_0^2}\left(2P_0\frac{\partial P_1}{\partial y}+2P_1\frac{\partial P_0}{\partial y}+P_2\frac{\partial \overline{P_1}}{\partial y}+\overline{P}_1\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+2ki\frac{\partial V_1}{\partial x}-k^2V_1\right)+\frac{4}{3}\nu\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\nu\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}+ki\frac{\partial U_1}{\partial y}\right) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t}-\omega iP_1+2kiU_0P_1+2U_0\frac{\partial P_1}{\partial x}+2U_1\frac{\partial P_0}{\partial x}-kiU_2\overline{P}_1+$$

$$+2ki\overline{U}_1P_2+2V_0\frac{\partial P_1}{\partial y}+2V_1\frac{\partial P_0}{\partial y}+V_2\frac{\partial \overline{P_1}}{\partial y}+\overline{V}_1\frac{\partial P_2}{\partial y}+\rho_0c_0^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\right.$$

$$+\frac{\partial V_1}{\partial y}+kiU_1\Big)+2nP_0\frac{\partial U_1}{\partial x}+2nkiP_0U_1+2nP_1\frac{\partial U_0}{\partial x}-nki\overline{U}_1P_2+$$

$$+2nki\overline{P}_1U_2+2nP_0\frac{\partial V_1}{\partial y}+2nP_1\frac{\partial V_0}{\partial y}+nP_2\frac{\partial \overline{V}_1}{\partial y}+n\overline{P}_1\frac{\partial V_2}{\partial y}=0 \qquad (10)$$

для первой гармоники,

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}-2\omega iU_2+4kiU_0U_2+kiU_1^2+2U_2\frac{\partial U_0}{\partial x}+2V_0\frac{\partial U_2}{\partial y}+V_1\frac{\partial U_1}{\partial y}+$$

$$+2V_2\frac{\partial U_0}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_2}{\partial x}-\frac{2ki}{\rho_0}P_2+\frac{1}{\rho_0^2c_0^2}\Big(4kiP_0P_2+$$

$$+kiP_1^2+2P_2\frac{\partial P_0}{\partial x}\Big)-\frac{16}{3}\nu k^2U_2 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}-2\omega iV_2+4kiU_0V_2+kiU_1V_1+2U_2\frac{\partial V_0}{\partial x}+2U_0\frac{\partial V_2}{\partial x}+V_1\frac{\partial V_1}{\partial y}+$$

$$+2V_2\frac{\partial V_0}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_2}{\partial y}+\frac{1}{\rho_0^2c_0^2}\Big(2P_0\frac{\partial P_2}{\partial y}+P_1\frac{\partial P_1}{\partial y}+$$

$$+2P_2\frac{\partial P_0}{\partial y}\Big)-4\nu k^2V_2 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t}-2\omega iP_2+4kiU_0P_2+kiU_1P_1+2U_2\frac{\partial P_0}{\partial x}+2V_0\frac{\partial P_2}{\partial y}+$$

$$+V_1\frac{\partial P_1}{\partial y}+2V_2\frac{\partial P_0}{\partial y}+2\rho_0c_0^2kiU_2+n\Big(4kiP_0U_2+kiU_1P_1+$$

$$+2P_2\frac{\partial U_0}{\partial x}+2P_0\frac{\partial V_2}{\partial y}+P_1\frac{\partial V_1}{\partial y}+2P_2\frac{\partial V_0}{\partial y}\Big)+\rho_0c_0^2\Big(\frac{\partial U_2}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}\Big)=0 \qquad (13)$$

для второй гармоники.

Здесь $\overline{U}, \overline{V}, \overline{P}$ комплексно сопряжены U, V, P.

При получении уравнений (5)—(13) предполагалось, что $|U_1| \sim \varepsilon$, $\nu \sim \varepsilon^2$ ($\varepsilon \ll 1$) и члены, содержащие ν более высокого порядка, отбрасывались.

Берем главные члены в уравнениях (8) и (10), тогда получим

$$\omega = kc_0 \qquad (14)$$

что можно считать определением ω.

Из (10) с учетом (14), оставляя члены порядка U_1, имеем

$$P_1=\rho_0c_0U_1-\frac{i\rho_0}{k}\Big(c_0\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{ic_0}{k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\frac{\partial U_1}{\partial t}\Big)+o\Big(\frac{U_1}{k}\Big) \qquad (15)$$

Из уравнения (9) с учетом (15), оставляя члены порядка V_1, можно получить

$$V_1 = -\frac{i}{k}\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + \frac{i}{k^3}\frac{\partial^3 U_1}{\partial y^3} - \frac{2}{c_0 k^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial y} - \frac{4}{3}\frac{\nu}{c_0}\frac{\partial U_1}{\partial y} + o\left(\frac{U_1}{k\sqrt{k}}\right) \qquad (16)$$

Из уравнения (5), удерживая члены порядка U_1^2/k, находим

$$2\frac{\partial U_0}{\partial t} + \frac{2}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial x} - 2\nu\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i}{kc_0}\left(\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial t} + c_0\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x} + \frac{ic_0}{k}\frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial y^2}\right)U_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{i}{kc_0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + c_0\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{ic_0}{k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)\overline{U}_1\right] - \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|^2 -$$
$$- \frac{2}{c_0 k^2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|^2 - \frac{8}{3}\frac{\nu}{c_0}\left|\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|^2 + \frac{i}{k^3}\left(\frac{\partial^3 U_1}{\partial y^3}\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial y} - \frac{\partial^3 \overline{U}_1}{\partial y^3}\frac{\partial U_1}{\partial y}\right) \qquad (17)$$

где учтены (15) и (16).

Из (7), подставляя (15), (16) и оставляя члены порядка U_1^2, получим

$$2\frac{\partial P_0}{\partial t} + 2\rho_0 c_0^2\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right) + 2\rho_0 c_0\frac{\partial}{\partial x}|U_1|^2 - \frac{\rho_0 c_0 i}{k}\overline{U}_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} +$$
$$+ \frac{\rho_0 c_0 i}{k}U_1\frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial y^2} - (n-1)\rho_0\frac{\partial}{\partial t}|U_1|^2 = 0 \qquad (18)$$

Из уравнения (6), подставляя (15) и (16) и оставляя члены порядка $U_1^2/\sqrt{k}$, имеем

$$2\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{2}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{i}{k}\left(U_1\frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial x \partial y} - \overline{U}_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right) + \frac{i}{c_0 k}\left(U_1\frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial t \partial y} - \right.$$
$$\left. - \overline{U}_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial y}\right) + \frac{4ik\nu}{3c_0}\left(U_1\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial y} - \overline{U}_1\frac{\partial U_1}{\partial y}\right) + \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|^2 =$$
$$= \frac{i}{k}\left(\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x}\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial y}\right) + \frac{i}{c_0 k}\left(\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial t}\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial y}\frac{\partial U_1}{\partial t}\right) \qquad (19)$$

Из уравнения (18) следует, что $U_0 \sim U_1^2$. Для того, чтобы в стационарной дифракции система не была переопределенной, следует считать, что $\partial V_0/\partial y \sim \partial U_0/\partial x$, тогда $V_0 \sim U_1^2/\sqrt{k}$. Из уравнения (19) следует, что $P_0 \sim U_1^2/k$.

Из уравнения (11), оставляя члены порядка U_1^2 и подставляя (15) и (16), получим

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} - 2kic_0 U_2 - \frac{i}{k}\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^2 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{2ki}{\rho_0}P_2 +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{i}{k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)U_1 - \frac{16}{3}\nu k^2 U_2 \qquad (20)$$

Из (13), подставляя (15) и (16), получим в порядке U_1^2 уравнение

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial P_2}{\partial t} - 2kiP_2 + (n+1)\,ki\rho_0 U_1^2 + 2ki\rho_0 c_0 U_2 + \rho_0 c_0\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}\right) = 0$$

отсюда, подставляя $-2kiP_2$ в (20) и отбрасывая члены порядка U_1^2, находим

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{1}{c_0\rho_0}\frac{\partial P_2}{\partial t} - c_0\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}\right) -$$

$$-(n+1)\,kiU_1^2 - \frac{16}{3}\nu k^2 U_2 = 0 \qquad (21)$$

Откуда видно, что $U_2 \sim kU_1^2$, поэтому из (20) получим

$$P_2 = \rho_0 c_0 U_2 + O(U_1^2) \qquad (22)$$

Тогда из (21), с учетом (22), можно получить

$$2\frac{\partial U_2}{\partial t} + 2c_0\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{ic_0}{2k}\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) + (n+1)\,kiU_1^2 + \frac{16}{3}\nu k^2 U_2 = 0 \qquad (23)$$

Из (12) с учетом (15), (16), (22) и (23) следует

$$V_2 = -\frac{i}{2k}\frac{\partial U_2}{\partial y} + O\left(\frac{U_1^2}{k\sqrt{k}}\right) \qquad (24)$$

Из уравнений (8) и (10), оставляя в нелинейных членах порядки $k^2U_1^3$, используя уравнения (15), (16), (22), получим

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} - kic_0 U_1 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{ki}{\rho_0}P_1 + \frac{4\nu}{3}\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial U_1}{\partial x}ki -\right.$$

$$\left. -k^2 U_1\right] + \frac{4}{3}\nu\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \qquad (25)$$

$$\rho_0 c_0 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{i\rho_0}{k}\left(c_0\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial t} - \frac{ic_0}{k}\frac{\partial^3 U_1}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\right) - kic_0 P_1 =$$

$$= \rho_0 c_0^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{i}{k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + kiU_1\right) - (n+1)\,kic_0\rho_0 \overline{U}_1 U_2 \qquad (26)$$

Подставляя значение P_1 из (26) в уравнение (25) и учитывая значение $\partial P_1/\partial x$, определенное из (15), имеем

$$2\frac{\partial U_1}{\partial t} + 2c_0\left(1 - \frac{4ki}{3c_0}\nu\right)\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{ic_0}{k}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)\left(1 - \frac{4ki}{3c_0}\nu\right) -$$

$$-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(c_0\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial t}\right) - \frac{2i}{k}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial x} - \frac{i}{kc_0}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} +$$

$$+(n+1)\,ki\overline{U}_1 U_2 + \frac{4\nu}{3}k^2 U_1 = 0 \qquad (27)$$

Существенно, что при получении (27) слагаемые в уравнениях (8) и (10), содержащие U_0, V_0, P_0, выпали из окончательных уравнений, то есть в дифракционных задачах они (среднее течение) не влияют на решение.

В нестационарной задаче, отбрасывая малые $O(U_1/k)$ и обозначая $U_1 = U \exp\left(-\frac{2}{3}\frac{\nu k^2}{c_0}x\right)$, находим

$$2\frac{\partial U}{\partial t} + 2c_0\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ic_0}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (n+1)ki\overline{U}U_2 = 0$$

где U_2 определяется из уравнения (23), которое можно переписать в следующем виде:

$$2\frac{\partial U_2}{\partial t} + 2c_0\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{ic_0}{2k}\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + (n+1)kiU^2\exp\left(-\frac{4}{3}\frac{\nu k^2}{c_0}x\right) +$$

$$+\frac{16}{3}\nu k^2 U_2 = 0$$

В задаче стационарной дифракции получается

$$2c_0\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ic_0}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (n+1)ki\overline{U}U_2 = 0$$

$$2c_0\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{ic_0}{2k}\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + (n+1)kiU^2\exp\left(-\frac{4}{3}\frac{\nu k^2}{c_0}x\right) + \frac{16}{3}\nu k^2 U_2 = 0$$

То, что в комплексном уравнении (27) отброшены в коэффициентах малые величины, содержащие $ki\nu/c_0$, а также члены порядка U_1/k, можно обосновать, вводя действительную амплитуду a и фазу φ по формуле $U_1 = a\exp(i\varphi)$ и отделив действительную и мнимую части уравнения. Из полученной действительной системы уравнений для α и φ видно, что в основных порядках следует указанные члены отбросить.

Такие же уравнения соответственно в нестационарной и стационарной задачах дифракции получаются из уравнения коротких волн [7], что доказывает правильность замены исходной системы уравнений уравнениями коротких волн при получении модуляционных уравнений для весьма сложной среды [7].

Отметим, что для исследования уравнений на устойчивость и вообще для применимости предположения о медленно меняющихся амплитудах следует считать $\nu k^2 \ll 1$ или $k \ll 1/\varepsilon$.

Таким образом, область применимости уравнений модуляций несколько шире условий, наложенных на окрестность волны при получении уравнений коротких волн [5, 6].

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄՈԴՈՒԼՅԱՑԻԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍՏԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ԿԱՐՃ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՕԳՏԱԳՈՐԾՄԱՆ ՀՆԱՐԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում մածուցիկ սեղմելի հեղուկի օրինակով տրվում է ելակետային հավասարումների սիստեմից մոդուլյացիայի հավասարումների արտածումը, և ցույց է տրվում, որ մոդուլյացիայի վերջնական հավասարումները հիմնական կարգերում համընկնում են կարճ ալիքների հավասարումներից ստացված հավասարումների հետ: Հիմնավորվում է կարճ ալիքների հիման վրա ալիքների մոդուլյացիայի հավասարումների ստացման ընդհանուր մոտեցման օգտագործման հնարավորությունը: Ցույց է տրվում, որ գծային մոտեցման դեպքում դիֆրակցիոն խնդրի համար մածուցիկությունը չի ազդում մոդուլյացիայի հավասարումների վրա:

ON POSSIBILITIES OF THE USING OF EQUATIONS OF SHORT WAVES IN DERIVATION OF MODULATION EQUATIONS FOR THE WAVES

A. G. BAGDOEV, L. G. PETROSSIAN

Summary

In this paper on the example of viscous compressible fluid the derivation of modulation equation from initial system of equations has been deduced and it has been shown that the final modulation equation coincides in main orders with the equation obtained from the equation of short waves. The possibility of utilisation of the general method of yielding of modulation equations of waves, based on the equation of short waves is proved. It has been shown that for the diffraction problem in linear approximation viscosity does not effect the modulation equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн.— ПММ, 1958, т. 22, № 5, с. 586—599.
2. *Шефтер Г. М.* Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости.— ПММ, 1969, т. 33, № 1, с. 162—168.
3. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов для анизотропной упругой среды. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: ЛГУ, 1961, № 5, с. 36—46.
4. *Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции.— Л.: ЛГУ, 1974. 124 с.

5. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо диссипативной среды.—ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2504—2511.
6. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями.—ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2512—2519.
7. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т. 36, № 5, с. 3—16.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977. 624 с.

Институт механики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
31. I. 1983