ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 6, 1984 Механика

УДК 539.3:62—414

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ИЗГИБЕ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

ЛУРЬЕ С. А.

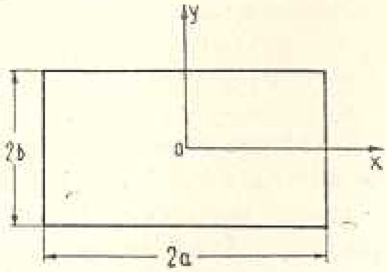
Исследование напряженно-деформированного состояния в задачах изгиба прямоугольных пластин и в плоской задаче теории упругости для прямоугольной области с помощью метода однородных решений приводит к проблеме разложения двух различных вещественных граничных функций в ряды по однородным функциям с одной системой комплексных постоянных. Вопрос о возможности таких одновременных разложений изучался Г. А. Гринбергом [1].

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию возможности совокупных разложений. Рассматриваются граничные условия, при которых задача определения коэффициентов в разложениях может быть решена путем непосредственного использования свойств однородных решений — условий обобщенной ортогональности.

1. Метод однородных решений является распространенным методом исследования плоской задачи теории упругости и задач теории изгиба пластин, сводящихся для прямоугольной области (фиг. 1) к однородному уравнению вида

$$q\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2g\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0 \quad (1.1)$$

Здесь x и y — безразмерные координаты, отнесенные соответственно к a и b (фиг. 1), $\Phi(x, y)$ для плоской задачи является функцией напряжений, а для задачи изгиба пластины — функцией прогиба.



Фиг. 1.

Представление решения уравнения (1.1) в форме

$$\Phi=\sum_k a_k F_k(y)\exp(\lambda_k x) \quad (1.2)$$

позволяет получить для F_k уравнение

$$F_k^{IV}+2\lambda_k^2 g F_k''+q F_k\lambda_k^4=0 \quad (1.3)$$

Функции $F_k(y)$ распадаются на две группы — четные в отношении y, то есть

$$F_k(y) = c_{1k} \cos t_1 \lambda_k y + c_{2k} \cos t_2 \lambda_k y \tag{1.4}$$

и нечетные, то есть

$$F_k(y) = c_{1k} \sin t_1 \lambda_k y + c_{2k} \sin t_2 \lambda_k y \tag{1.5}$$

Для конкретных однородных граничных условий при $y = \pm 1$ комплексные параметры λ определяются из соответствующих трансцендентных уравнений. Величины $t_{1,2}$ являются корнями характеристического уравнения $z^4 - 2gz^2 + q = 0$. В общем случае $t_{1,2} = \gamma_1 \pm i\gamma_2$.

В частности, для граничных условий

$$F_k(\pm 1) = 0, \quad F_k'(\pm 1) = 0 \tag{1.6}$$

соответствующих в задаче изгиба пластины жесткому закреплению краев $y = \pm 1$, в функциях (1.4) $c_{1k} = \cos t_2 \lambda_k$, $c_{2k} = -\cos t_1 \lambda_k$, λ_k удовлетворяют уравнению

$$\psi(\lambda) = t_1 \sin t_1 \lambda \cos t_2 \lambda - t_2 \sin t_2 \lambda \cos t_1 \lambda = 0 \tag{1.7}$$

Соответственно для нечетных функций $F_k(y)$ (1.5) имеем

$$\begin{gathered} c_{1k} = \sin t_2 \lambda_k, \qquad c_{2k} = -\sin t_1 \lambda_k \\ \psi(\lambda) = t_1 \cos t_1 \lambda \sin t_2 \lambda - t_2 \cos t_2 \lambda \sin t_1 \lambda = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Наибольшую трудность в реализации метода однородных решений представляет определение постоянных a_k, входящих в разложение (1.2), которые должны быть найдены из граничных условий на краях $x = \pm 1$. Точно эти постоянные определяются лишь для граничных условий, соответствующих решению Файлона для плоской задачи и решению Леви для задачи изгиба, то есть условий, имеющих следующий вид:

$$f(y) = \sum_k a_k F_k(y), \quad \varphi(y) = \sum_k a_k \lambda_k^2 F_k(y) \tag{1.9}$$

Одновременное разложение заданных функций $f(y)$ и $\varphi(y)$ по функциям $F_k(y)$ с одной и той же системой постоянных a_k осуществляется с помощью условия обобщенной ортогональности, которому удовлетворяют функции $F_k(y)$. Для граничных условий (1.6) оно имеет вид

$$\int_{-1}^{1} (F_k'' F_i'' - q \lambda_k^2 \lambda_i^2 F_k F_i)\, dy = 0 \quad i \neq k \tag{1.10}$$

В предположении существования разложений и равномерной сходимости ряда для $\varphi(y)$ и дважды продифференцированного ряда для $f(y)$ во всем интервале $-1 \leqslant y \leqslant 1$, комплексные коэффициенты определяются с помощью следующей формулы:

$$a_k = \int\limits_{-1}^{1} [f''(y) F_k'' - \varphi(y) \lambda_k^2 q F_k(y)]\, dy \Big/ \int\limits_{-1}^{1} [(F_k''(y))^2 - q \lambda_k^4 (F_k(y))^2]\, dy \qquad (1.11)$$

Отметим, что для получения (1.11) существенную роль играет структура граничных условий (1.9).

Так в задаче изгиба условие (1.9) соответствует заданию на краю $x = 1$ прогиба w и момента M_x. В случае плоской задачи для полосы разрешимыми, сводящимися к условиям (1.9), оказываются комбинации, при которых на краю $x = 1$ заданы нормальное перемещение u и касательное напряжение τ или касательное перемещение v и нормальное напряжение σ.

Можно доказать, что условие обобщенной ортогональности позволяет раздельно определить коэффициенты в разложениях двух различных вещественных функций в ряды по однородным функциям $F_k(y)$ лишь в том случае, если коэффициенты разложений отличаются множителем λ_k^2.

Вопросы построения однородных решений для изотропной пластины, когда в уравнении (1.1) $g = (b/a)^2$, $q = (b/a)^4$, рассматривались в работах [1—3]. Существенные результаты в этом отношении получены в работе [1], где в результате непосредственного суммирования рядов (1.9) с коэффициентами (1.11) установлены достаточные условия существования разложений (1.9).

В настоящей работе для случая ортотропной пластины представлены результаты, аналогичные установленным в [1], даются некоторые уточнения условий, полученных Г. А. Гринбергом.

2. Для ортотропной пластины коэффициенты g и q уравнения (1.1) включают упругие постоянные материала и в результате корни характеристического уравнения, соответствующего (1.3), в общем случае не являются кратными. Для ортотропной пластины справедливы все записанные выше соотношения. Рассмотрим разложения (1.9), считая, что при $y = \pm 1$ выполняются граничные условия (1.6). Так как всякая функция может быть разбита на четную и нечетную части, разлагаемые соответственно по четным функциям, отвечающим формулам (1.4), (1.7) и нечетным функциям, определяемым равенствами (1.5), (1.8), то достаточно рассмотреть в отдельности разложения четных и нечетных функций. В дальнейшем будем исследовать четные функции. Нечетные изучаются аналогично.

Как и в работе [1], для получения достаточных условий существования разложений (1.9) займемся суммированием соответствующих бесконечных рядов, когда коэффициенты a_k в них находятся по формуле (1.11). Запишем разложения (1.9) с учетом (1.11) в виде

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} A_n^f, \qquad \varphi(y) = \lim_{n \to \infty} A_n^\varphi$$
$$2A_n^f = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\omega_k}{\eta_k} F_k(y), \qquad 2A_n^\varphi = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\omega_k}{\eta_k} \lambda_k^2 F_k(y) \qquad (2.1)$$

где

$$\omega_k = \int\limits_{-1}^{1} [f''(x) F_k''(x) - q\lambda_k^2 \varphi(x) F_k(x)]\, dx$$

$$\eta_k = \int\limits_{-1}^{1} [(F_k''(x))^2 - q\lambda_k^4 (F_k(x))^2]\, dx$$

Суммы в (2.1) распространены на все первые $4n$ корней уравнения (1.7). Корни λ_k и $-\lambda_k$ считаются различными.

Запишем следующее полезное тождество:

$$\begin{aligned} F_k'' &= -\lambda_k^2 (c_{1k} t_1^2 \cos t_1\lambda_k y + c_{2k} t_2^2 \cos t_2\lambda_k y) = \\ &= -t_1^2 F_k(y)\lambda_k^2 + (t_1^2 - t_2^2) c_{2k} \lambda_k^2 \cos t_2\lambda_k y = \\ &= -t_2^2 F_k(y)\lambda_k^2 + (t_2^2 - t_1^2) c_{1k} \lambda_k^2 \cos t_1\lambda_k y \end{aligned} \tag{2.2}$$

Рассмотрим первое равенство (2.1) и заменим в нем порядок суммирования и интегрирования. С учетом (2.2) получим

$$A_n^f = \int\limits_{-1}^{1} [-t_1^2 Q_n(x, y) + (t_1^2 - t_2^2) P_n(x, y) f''(x) - q\varphi(x) Q_n(x, y)]\, dx \tag{2.3}$$

$$Q_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\lambda_k^2 F_k(x) F_k(y)}{\eta_k}, \quad P_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\lambda_k^2 c_{2k} \cos t_2\lambda_k x F_k(y)}{\eta_k} \tag{2.4}$$

Значение η_k нетрудно получить непосредственно, вычислив интеграл. Используя равенство (1.7), найдем

$$\eta_k = (t_1^2 - t_2^2)^2 \cos^2 t_1\lambda_k \cos^2 t_2\lambda_k \cdot \lambda_k^4 \tag{2.5}$$

В дальнейшем понадобится выражение для $\psi'(\lambda = \lambda_k)$

$$\psi'(\lambda_k) = (t_1^2 - t_2^2) \cos t_1\lambda_k \cos t_2\lambda_k \tag{2.6}$$

Перепишем выражение для $Q_n(x, y)$ с учетом равенств (2.5), (2.6)

$$Q_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{M}{(t_1^2 - t_2^2)\lambda_k^2 \cos t_1\lambda_k \cos t_2\lambda_k \cdot \psi'(\lambda_k)} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} M = (\cos t_2\lambda_k \cos t_1\lambda_k x - \cos t_1\lambda_k \cos t_2\lambda_k x)(\cos t_2\lambda_k \cos t_1\lambda_k y - \\ - \cos t_1\lambda_k \cos t_2\lambda_k y) \end{aligned}$$

С помощью теоремы о вычетах имеем

$$Q_n(x, y) = -(a_{-1})_{z=0} - \sum_s [(a_{-1})_{z_s/t_1} + (a_{-1})_{z_s/t_2}] + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_n} \frac{M_1}{M_2}\, dz \tag{2.8}$$

$$M_1 = \cos t_2 z \cos t_1 zx - \cos t_1 z \cos t_2 zx)(\cos t_2 z \cos t_1 zy - \cos t_1 z \cos t_2 zy$$
$$M_2 = (t_1^2 - t_2^2) z^2 \cos t_1 z \cos t_2 z (t_1 \sin t_1 z \cos t_2 z - t_2 \sin t_2 z \cos t_1 z)$$

Здесь C_n — окружности радиуса R_n выбраны так, что $\lambda_{4n} < R_n < \lambda_{4n+1}$ и точки на окружности отличаются на конечную величину от λ_{4n}, λ_{4n+1} и от корней уравнения $\cos t_{1,2} \cdot z = 0$. Через $(a_{-1})_{z=z_s/t_{1,2}}$ обозначены вычеты в точках $z_s/t_{1,2} = \frac{\pi}{2}(2s-1)/t_{1,2}$, соответствующих корням уравнений $\cos t_{1,2} z = 0$ (полюсы первого порядка). Непосредственным вычислением можно проверить, что вычеты $(a_{-1})_{z_s/t_1} + (a_{-1})_{z_s/t_2} = 0$, так что равна нулю и их сумма. Устремим $n \to \infty$. Нетрудно видеть, что согласно лемме Жордана при всяких $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ интеграл в (2.8) равномерно стремится к нулю, так что

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(x, y) = 0 \tag{2.9}$$

Следовательно, для всякой абсолютно интегрируемой на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функции $\psi(x)$ с учетом (2.9) можем записать следующее равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} \psi(x) Q_n(x, y)\, dx = 0 \tag{2.10}$$

Перейдем к рассмотрению $P(x, y) = \lim_{n \to \infty} P_n(x, y)$. Представим $P(x, y)$ в виде

$$P(x, y) = P_1(x, y) + P_2(x, y) \tag{2.11}$$

где

$$P_1(x, y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\lambda_k^2 c_{1k} c_{2k} \cos t_1 \lambda_k y \cdot \cos t_2 \lambda_k x}{\gamma_k}$$

$$P_2(x, y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\lambda_k^2 c_{2k} c_{2k} \cos t_2 \lambda_k x \cos t_2 \lambda_k y}{\gamma_k}$$

С помощью теоремы о вычетах преобразуем $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$. Получим

$$P_1(x, y) = \frac{(-1)}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \oint_{C_n} \frac{\cos t_1 zy \cos t_2 zx dz}{z^2 (t_1^2 - t_2^2)(t_1 \sin t_1 z \cos t_2 z - t_2 \sin t_2 z \cos t_1 z)} -$$

$$- (a_{-1})_{z=0} \tag{2.12}$$

Точка $z = 0$ является здесь полюсом третьего порядка. Вычисления приводят к следующему выражению:

$$(a_{-1})_{z=0} = \left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{3!} + \frac{t_1^2 y^2 + t_2^2 x^2}{2} \right) \frac{1}{(t_1^2 - t_2^2)^2}$$

Следовательно, учитывая, что в (2.12) интеграл стремится к нулю, найдем

$$P_1(x, y) = -\frac{1}{(t_1^2 - t_2^2)^2}\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{3!} + \frac{t_1^2 y^2 + t_2^2 x^2}{2}\right) \tag{2.13}$$

Для $P_2(x, y)$ имеем следующее равенство:

$$P_2(x, y) = -(a_{-1})_{z=0} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} (a_{-1})_{z=\frac{\pi}{2}(2s-1)/t_2} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_n} \frac{\cos t_1 z \cos t_2 z x \cos t_2 z y dz}{(t_1^2 - t_2^2) \cos t_2 z (t_1 \sin t_1 z \cos t_2 z - t_2 \sin t_2 \cos t_1 z) z^2}$$

Вычисляя вычеты и учитывая, что интеграл стремится к нулю, получим

$$P_2(x, y) = -\frac{1}{(t_1^2 - t_2^2)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (a_{-1})_{z=\frac{\pi}{2}(2s-1)/t_2} +$$

$$+ \frac{1}{(t_1^2 - t_2^2)^2}\left(\frac{t_1^2 - t_2^2}{2} + \frac{t_1^2 + t_2^2}{3!} + \frac{t_2^2 (x^2 + y^2)}{2}\right)$$

Следовательно, с помощью (2.11) найдем окончательно

$$P(x, y) = \left[-\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos r_k x \cos r_k y}{r_k^2} + \frac{1}{2}(1 - y^2)\right] \frac{1}{(t_1^2 - t_2^2)^2} \tag{2.14}$$

$$r_k = (2k - 1)\pi/2$$

Перейдем к определению A^f.

Пусть функция $f(y)$ — непрерывная вместе со своей первой производной в интервале $-1 \leqslant y \leqslant 1$ и имеет в этом интервале абсолютно интегрируемую вторую производную.

Учитывая равенство (2.1), (2.9), запишем

$$2A^f = -\int_{-1}^{1} f''(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos r_k x \cos r_k y}{r_k^2} dx - \frac{(1 - y^2)}{2} \int_{-1}^{1} f''(x)\, dx \tag{2.15}$$

Ряд, стоящий в первом члене выражения (2.15), сходится равномерно в отношении координаты x, поэтому можно изменить порядок суммирования и интегрирования. Найдем

$$\int_{-1}^{1} f''(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos r_k x \cos r_k y}{r_k^2} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos r_k y \left\{-\int_{-1}^{1} f(x) \cos r_k x dx +\right.$$

$$\left. + [f'(x) \cos r_k x + f(x) r_k \sin r_k x]_{-1}^{1} \frac{1}{r_k^2}\right\}$$

Учитывая, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} f(x) \cos r_k x dx\right) \cos r_k y$$

представляет собой удвоенный ряд Фурье для функции $f(y)$, который сходится равномерно в интервале $-1 < y < 1$, получим

$$2A^f = 2f(y) - 2f(1) - \frac{(1-y)^2}{4} \cdot 2f'(1) \qquad (2.16)$$

В равенстве (2.16) множитель 2 соответствует тому, что в ряду (2.1) суммирование распространяется на все четные функции $F_k(y)$, соответствующие как λ_k, так и $-\lambda_k$.

Таким образом, доказана теорема:

Пусть $f(y)$ — четная, непрерывная вместе со своей первой производной в интервале $-1 \leqslant y \leqslant 1$ функция, обладающая абсолютно интегрируемой в этом интервале второй производной, и пусть $\varphi(y)$ какая-либо другая абсолютно интегрируемая в этом интервале функция. Тогда при $-1 < y < 1$ сумма ряда $A^f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k F_k(y)$ с коэффициентами (1.10) равна

$$A^f = f(y) - f(1) + \frac{1}{4}(1-y^2) f'(1) \qquad (2.17)$$

Для того, чтобы сумма ряда A^f равнялась $f(y)$, требуется выполнение условий $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, которые должны быть наложены дополнительно.

Доказанная теорема является аналогом теоремы, доказанной для изотропной пластины в работе [1] при разложении по однородным функциям $F_k(y)$, удовлетворяющим тем же граничным условиям при $y = \pm 1$. Однако, в формулировке теоремы имеется и отличие. В доказанной выше теореме имеется добавочное условие $f'(1) = 0$, отсутствующее в теореме, изложенной в работе [1]. Это связано с тем, что в работе [1] при исследовании интеграла M_n [формула (2.16) в [1]] не учтен вычет в нуле подынтегральной функции комплексного аргумента.

Условия $f'(1) = 0$, $f(1) = 0$ являются достаточными для сходимости рассматриваемого в теореме ряда к функции $f(y)$. С другой стороны, если $f'(1) \neq 0$, то исследуемый ряд сходится к $f(y)$ с точностью до квадратичной функции, что при решении конкретной задачи указанным способом соответствует, например, неучтенному в решении нагружению полосы при $x = \pm 1$. Это условие представляется также существенным в связи с тем, что оно является достаточным для обеспечения сходимости продифференцированного ряда A^f к $f'(y)$.

Обратимся к вычислению суммы

$$2A^\varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{4n} a_k \lambda_k^2 F_k(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{4n} \frac{\omega_k \lambda_k^2}{\eta_k} F_k(y) \qquad (2.18)$$

Коэффициенты a_k определяются формулой (1.11). При исследовании этого ряда можно использовать способ, примененный в работе [1]. Однако, такой подход, как будет показано дальше, приводит к излишним требованиям к функции $\varphi(y)$. Поступим несколько иначе. В соответствии с формулой (2.18) рассмотрим ряд

$$R(y) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}\varphi(x)F_k(x)\,dx\right)\frac{F_k(y)\lambda_k^4}{\eta_k}\cdot q \tag{2.19}$$

Предположим, что $\varphi(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд Фурье на интервале $-1 < x < 1$ по ортонормированной системе функций $\{\cos r_k x\}$, $r_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)$, то есть

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i \cos r_i x$$

Подставляя $\varphi(x)$ с помощью записанного выражения в равенство (2.19) и меняя порядок суммирования по индексу i и интегрирования, найдем

$$R(y) = 2q\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_i\frac{\lambda_k^4}{\eta_k}F_k(y)\,r_i\sin r_i\left(\frac{c_{1k}\cos t_1\lambda_k}{r_i^2-(t_1\lambda_k)^2}-\frac{c_{2k}\cos t_2\lambda_k}{r_i^2-(t_2\lambda_k)^2}\right) \tag{2.20}$$

Здесь можно изменить порядок суммирования. Теперь достаточно исследовать суммы следующих рядов, входящих в рассматриваемое выражение:

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i \sin r_i N_{1,2}^i; \qquad N_{1,2}^i = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2 c_{1,2}\cos t_1\lambda_k F_k(y)}{\eta_k} \tag{2.21}$$

По теореме о вычетах имеем

$$N_{1,2}^i = \pm\Bigg[-\left((a_{-1})_{z=r_i/t_{1,2}} + (a_{-1})_{z=-r_i/t_{1,2}}\right) + \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\oint_{C_n}\frac{(\cos t_2 z\cos t_1 zy - \cos t_1 z\cos t_2 zy)\,dz}{(t_1^2-t_2^2)(r_i^2-t_{1,2}^2z^2)(t_1\sin t_1 z\cos t_2 z - t_2\sin t_2 z\cos t_1 z)}\Bigg]$$

Можно подсчитать, что

$$(a_{-1})_{z=r_i/t_{1,2}} + (a_{-1})_{z=-r_i/t_{1,2}} = \pm\frac{\cos r_i y}{t_{1,2}^2}\,\frac{1}{r_i\sin r_i} \tag{2.22}$$

Учитывая, что интеграл в выражении для $N_{1,2}^i$ стремится к нулю при $n\to\infty$, а также формулы (2.20)—(2.22), найдем

$$R(y) = 2\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\cos r_i y = 2\varphi(y) \tag{2.23}$$

Используя тот же прием, аналогично получим

$$\lim_{n\to\infty} I_n(y) = I(y) = 0, \quad I_n = \sum_{k=1}^{k=4n}\left(\int_{-1}^{1} f'' F_k''(x)\,dx\right)\frac{F_k(y)\lambda_k^2}{\eta_k} \tag{2.24}$$

Учитывая (2.23), (2.24), можно утверждать, что доказана следующая теорема:

Если функция $\varphi(y)$ всюду непрерывна в интервале $-1 < y < 1$ и имеет в этом интервале ограниченное изменение и если таким же условиям удовлетворяет функция $f''(y)$, то при $-1 < y < 1$ имеет место соотношение

$$A^{\varphi} = \varphi(y) \tag{2.25}$$

Сравнение данной теоремы с аналогичной, приведенной в работе [1], показывает, что разложение (2.25) имеет место при существенно более слабых требованиях к гладкости функций $\varphi(y)$ и $f''(y)$, чем те, которые приводятся в [1].

Приведем без доказательства некоторые полезные следствия из доказанных теорем.

Следствие 1. Если функции f и φ удовлетворяют условиям теорем 1 и 2 и выполняется равенство $f'' = D\varphi$, то справедливы разложения

$$f''(y) = l_{1,2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 c_{1,2k} \cos l_{1,2} \lambda_k y$$

$$\varphi(y) = m_{1,2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 c_{1,2k} \cos l_{1,2} \lambda_k y$$

D, $l_{1,2}$, $m_{1,2}$ — постоянные

Следствие 2. Если функции $f(y)$ и $\varphi(y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того, f'' имеет непрерывную первую производную и непрерывную вторую производную, имеющую ограниченное изменение в интервале $-1 < y < 1$, то имеет место равенство

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_{-1}^{1} f^{\mathrm{IV}}(x) F_k(x)\, dx}{\eta_k} F_k(y) \tag{2.26}$$

Ряд (2.26) можно четыре раза почленно дифференцировать и на интервале $-1 < y < 1$ справедливо равенство

$$f^{\mathrm{IV}}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_{-1}^{1} f^{\mathrm{IV}}(x) F_k(x)\, dx}{\eta_k} F_k^{\mathrm{IV}}(y) \tag{2.27}$$

Суммы (2.26), (2.27) распространяются на все λ_k, $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$.

В сходимости ряда (2.27) к $f^{\mathrm{IV}}(y)$ нетрудно убедиться, если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{-1}^{1} f^{IV}(x) F_k(x)\,dx\cdot F^{IV}(y)\right)\Big/\eta_k =$$

$$= -q\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{-1}^{1} f^{IV}\lambda_k^2 F_k(x)\,dx\cdot\lambda_k^2 F_k(y)\right)\Big/\eta_k -$$

$$-2g\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{-1}^{1} f^{IV}\lambda_k^2 F_k(x)\,dx\cdot F_k''(y)\right)\Big/\eta_k$$

Можно показать, что вторая сумма в записанном равенстве стремится к нулю при $N\to\infty$, а первая сумма на основании теоремы 2 сходится к $f^{IV}(y)$.

Полученные формулы могут быть полезны при проведении преобразований.

Аналогично могут быть доказаны теоремы для нечетных функций $f(y)$, $\varphi(y)$ ($F_k(y)$ — нечетные). Имеет место, например, следующая теорема. Если функции $f(y)$, $\varphi(y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то при $-1<y<1$ сумма ряда $A^{f''}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k''(y)$ сходится к функции

$$A^{f''}=f''(y)-3y\left(f'(1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx\right)$$

3. Рассмотрим кратко случай более общих граничных условий при $y=\pm 1$ для нечетных функций $F_k(y)$. Их можно записать в виде

$$\alpha_1 F_k''+\alpha_2\lambda_k^2 F_k=0,\quad \beta_1 F_k'''+\beta_2\lambda_k^2 F_k'=0 \tag{3.1}$$

При различных постоянных α_i, β_i граничные условия могут соответствовать в задачах изгиба как свободному, так и жестко защемленному краю. В работе [3] показано, что для изотропной пластины условия обобщенной ортогональности, построенные П. Ф. Папковичем в форме (1.10), остаются справедливыми для однородных функций, удовлетворяющих граничным условиям свободного края в задаче изгиба (защемления в плоской задаче). Однако, следует отметить, что в этом случае остается открытым вопрос о существовании разложения (1.9), который кратко рассматривается ниже.

Перепишем граничные условия (3.1) в виде

$$F_k''=\alpha F_k\lambda_k^2,\quad F_k'''=\beta F_k'\lambda_k^2 \tag{3.2}$$

Здесь α и β могут принимать значения в интервале $-\infty<\alpha,\ \beta<\infty$. Значениям $\alpha=\infty$ соответствует $F_k=0$, а $\beta=\infty$, $F_k'=0$. Функции $F_k(y)$ имеют вид (1.4), параметры λ_k являются корнями уравнения (для условий (3.2))

$$\varphi(\lambda) = (t_2^2 + \alpha)(t_1^2 + \beta)\, t_1 \sin t_1\lambda \cos t_2\lambda - (t_1^2 + \alpha)(t_2^2 + \beta)\, t_2 \sin t_2\lambda \cos t_1\lambda = 0 \tag{3.3}$$

Приведем для рассматриваемого случая выражения для коэффициентов a_k в разложениях по однородным функциям, построенным с помощью соотношений обобщенной ортогональности, опуская вывод самих условий обобщенной ортогональности.

$$a_k = \int_{-1}^{1} [((2g + \alpha + \beta)\,2g + \alpha\beta - q) f'' F_k'' + q(2g + \alpha + \beta)(\varphi F_k' + f'' \lambda_k^2 F_k) -$$

$$- q(-q + \alpha\beta)\, \varphi \lambda_k^2 F_k]\, dy/\eta_k \tag{3.4}$$

$$\eta_k = \int_{-1}^{1} [((2g + \alpha + \beta)\,2g + \alpha\beta - q)(F_k'')^2 + q(2g + \alpha + \beta)\, 2\lambda_k^2 F_k F_k'' -$$

$$- q(-q + \alpha\beta)\, \lambda_k^4 (F_k)^2]\, dy$$

λ_k — корни уравнения (3.3).

Не останавливаясь на доказательствах, аналогичных проделанным выше, но несколько более громоздким, отметим теоремы, аналогичные изложенным во втором разделе работы. Теорема 1 формулируется следующим образом: Пусть $f(y)$ — непрерывная вместе со своими первой и второй производной в интервале $-1 \leqslant y \leqslant 1$ функция и пусть $\varphi(y)$ — абсолютно интегрируемая в указанном интервале функция. Чтобы сумма ряда A^f, где a_n определяется по формуле (3.4), сходилась к $f(y)$, требуется выполнение следующих условий:

$$f(1) = f'(1) = 0$$

Формулировка теоремы об условиях сходимости ряда A^φ к функции $\varphi(y)$ совпадает с формулировкой теоремы 2. Следует, конечно, помнить, что коэффициенты в разложениях определяются по формуле (3.4).

Следует отметить, что для рассматриваемого в этом разделе случая имеют место следствия, аналогичные сформулированным во втором разделе работы.

Автор благодарен В. В. Васильеву за сделанные замечания и внимание к работе.

ՀԱՄԱՍԵՌ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՀԱՐԹ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԵՎ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ս. Ա. ԼՈՒՐՅԵ

Ամփոփում

Ցույց է տրվում, որ ընդհանրացած բիհարմոնիկ հավասարումների համար եզրային խնդիրներում համասեռ լուծումների մեթոդի օգտագործումը հանգում է կոմպլեքս հաստատունների մեծ համակարգով երկու տարբեր իրական ֆունկցիաների միաժամանակյա վերլուծման կառուցման պրոբլեմին։ Ամրակցված սալի խնդրում ապացուցվում են վերլուծման զուգամիտության բավարար պայմանների վերաբերյալ թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են հայտնի թեորեմների ընդհանրացում և ճշտում։ Ավելի ընդհանուր եզրային պայմանների համար բերվում են ընդհանրացված օրթոգոնալության պայմաններ և ձևակերպվում են թեորեմներ համապատասխան վերլուծությունների զուգամիտության բավարար պայմանների վերաբերյալ։

ON THE METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS IN THE PLANE STRESS AND ORTHOTROPIC PLATE BENDING PROBLEMS

S. A. LOURIE

S u m m a r y

It has been pointed out that the use of the method of homogeneous solutions for boundary problems of generalized biharmonic equation leads to the construction problem of simultaneous expansions of two different real functions with one system of complex constants.

The theorems concerning the sufficient conditions of convergence of expansions in the problem of the damped plate have been proved, which are the generalization and correction of the known theorems. The conditions of generalized orthogonalization for more general boundary conditions have been demonstrated and the theorems on sufficient conditions of expansion convergence have been formulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых обобщениях.— ПММ, 1953, т. 16, 62, с. 211—228.
2. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы.— ДАН СССР, 1940, № 4, с. 335—339.
3. *Прокопов В. К.* О соотношении обобщенной ортогональности П. Ф. Папковича для прямоугольной пластинки.— ПММ, 1964, т. 28, в. 2, с. 335—339.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступила в редакцию
24. V. 1982